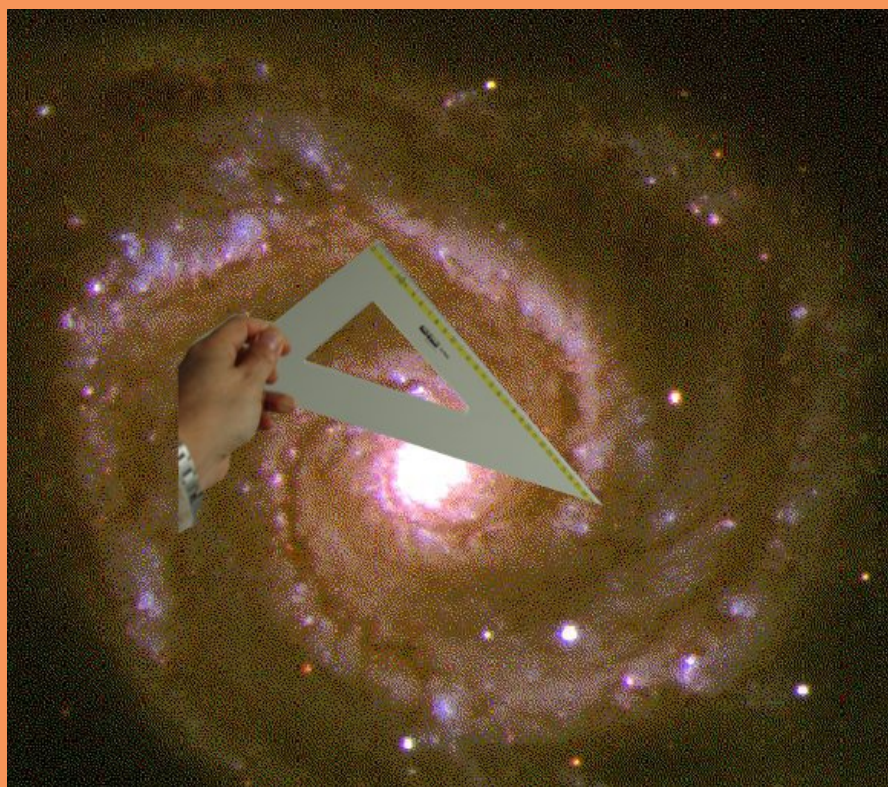


В.Г. Гаврюсев

ОСНОВАНИЯ ФИЗИКИ



ТОМ I

ВВОДНЫЕ ГЛАВЫ

Цель науки

Основы математики

Основы физики как описания мира

Некоторые мифы физики

Книга посвящена систематическому изложению представлений, лежащих в основаниях физики. Все понятия вводятся на том уровне общности, который требуется для понимания возникающей теории. Понятия уточняются по ходу дела там, где это становится необходимым, и объясняются причины такого выбора направления их развития. Первый том концентрируется на самых началах, тех идеях, которые при последующем развитии, обобщении и уточнении, становятся скелетом теории. При желании, эта книга может быть использована и как учебник. Однако, определённый уровень образования, знакомства с основными идеями, всё же желателен. Поэтому книга предназначена, в первую очередь, научным работникам, аспирантам и студентам.

Гаврюсов Владимир Григорьевич закончил в 1976 году физический факультет Московского Государственного Университета им. М.В.Ломоносова. Кандидат физико-математических наук с 1986 г. Работает в области астрофизики, физики высоких энергий и теории поля.

© В.Г. Гаврюсов, 2018

email: vgavryusev@gmail.com site: vladimirgavryusev.ru

© ЛЕНАНД, 2018 ISBN 978-5-9710-5739-0

Оглавление

Введение	3
1 Цель науки	7
1.1 Описание реального мира	7
1.2 Требования к языку науки	10
1.3 Материя, Идеи, Понятия	12
1.4 Существование и Не Существование	16
1.5 Часть и Целое, Анализ и Синтез	18
2 Основы математики	23
2.1 Множества, Операции и Целые Числа	23
2.2 Дискретное и Непрерывное, Бесконечности	32
2.3 Геометрия синтетическая и аналитическая	44
2.4 Определения (конструкции) против аксиом	51
2.5 Отображения, Операторы, Функции, Переменные	54
2.6 Ряды, Дифференцирование и Интегрирование	57
2.7 Степени, Полиномы и Показательная функция	66
2.8 Координаты, Векторы, Матрицы	68
2.9 Тензоры	80
2.10 Координаты регулярные и сингулярные. Мера	89
2.11 Линейная независимость. Плотности	109
2.12 Аффинная связность	122
2.13 Метрика	132
2.14 Иерархия структур в математике	143
2.15 Симметрии	148
3 Основы физики как описания мира	153
3.1 Вселенная и её части	153
3.2 Приближённое описание мира	161
3.3 События и причинно-следственные связи	163
3.4 Цепочки событий как основа измерений. Время, Действие, Масса	167
3.5 Волна? Частица?	176
3.6 Пространство, Псевдоевклидовость	179
3.7 Преобразования Лоренца	190
3.8 Инерциальные системы отсчёта	195
3.9 Число измерений	201

3.10	Геодезические.	
	Сохранение энергии-импульса	204
3.11	Относительность общая и движения	207
4	Некоторые мифы физики	221
4.1	Мистический взгляд на эффективность математики	221
4.2	Однородность и Изотропность. Законы сохранения	224
4.3	Большой взрыв и Эволюция Вселенной	235
	Литература	247

Введение

Книга, которую Вы, читатель, держите перед собой, является попыткой изложить как можно яснее и чётче, так, чтобы не оставалось двусмысленностей и возможности иных толкований, не только теоретические основы физики, но и все те причины, которые вынуждают формулировать эти идеи именно таким образом. При этом мне хотелось построить изложение так, чтобы для его понимания не требовалось какого-либо специального образования. Так, чтобы все основные понятия формулировались и уточнялись именно в тексте этой книги. Это не значит, что все эти понятия будут описаны во всей их полноте, со всеми теми подробностями, которые обычно затрагиваются в специальных курсах, им посвящённых. Но именно те свойства этих понятий, которые необходимы для формулирования оснований физики, будут описываться здесь. Сначала на самом интуитивном уровне, откуда и каким образом возникает та или иная идея. Потом будет представлено её уточнённое описание и, по возможности, более строгая формулировка. А потом и конкретное применение в физике.

В связи с этим, изложение будет в некоторой степени нелинейным, многоплановым, затрагивающим одновременно несколько направлений. Которые, в конечном счёте, рассматривают с разных сторон один и тот же предмет. Кроме того, к рассмотрению многих важных идей я буду возвращаться неоднократно. Надеюсь, что таким образом улучшится понимание их смысла и места в общем подходе к описанию мира.

Первый том книги, “Вводные главы”, разбит на три основных главы. Первая из них, “Цель науки” может рассматриваться скорее как некоторое философское введение в круг тех понятий, которые будут использоваться позднее в построении теории. Необходимость такого, расширенного введения диктуется тем, что очень многие понятия, которые придётся использовать, допускают неоднозначное толкование, что не приемлемо для хорошей теории. Часто наиболее широко распространённые представления о них, получаемые обычно ещё в школе, или не достаточно точны, или и вовсе ошибочны применительно к описанию реального мира. Для всего этого, безусловно, имеются серьёзные причины. Вот эти-то причины и нужно высветить явно. И явно указать, какой именно смысл будет вложен в то или иное слово, употребляемое далее в этой книге. Ведь, по сути дела, речь

здесь пойдёт не больше и не меньше как о формировании *Мировоззрения*. **Воззрения на Мир**. В этом плане важно не только уточнить смысл слов (понятий), но и дать Вам возможность сравнить имеющиеся различные, общепринятые в настоящий момент, или возникавшие в историческом развитии, теоретические представления о Мире.

Естественно, далее речь пойдёт о физических и математических идеях. Причём математика, будучи вполне самостоятельной наукой, для физики является сегодня скорее инструментом. Эта ситуация не совсем хороша, т.к. на самом деле не полностью соответствует действительности. Да, большая часть абстрактной математики выглядит самостоятельным миром идей, существующим независимо и помимо реального мира. Такого рода философский взгляд на положение математики имеет длиннейшую историю. И сегодня многие исследователи его придерживаются. Для меня же математика возникла и развивается из наших потребностей описывать Мир как можно точнее. Да, математика это мир идей, но идей, уже имеющихся в Мире. Наша роль состоит только в формулировании существа этих идей словами наших языков и в указании тех свойств реального мира, которые эти идеи описывают. По необходимости, сама формулировка идей в самом общем виде должна идти раньше их детального уточнения с целью применения в физике. Этому посвящена вторая глава, “Основы математики”. В этой главе я стараюсь сформулировать именно основные идеи математики, нужные нам для описания мира. В большей степени делая упор на их взаимосвязях и указывая направления их дальнейшего развития только в общих чертах. Для детального изучения тех или иных разделов математики могу порекомендовать книги [1-8]. Причём для лучшего понимания предмета полезно не ограничиваться какой-то одной из них, а хотя бы посмотреть как тот же самый предмет излагается разными авторами. Точка зрения и предпочтения автора при изложении математики имеют значение. Конечно, это только примерный список полезной литературы.

В “Основах математики” моё изложение нацеливалось на выявление общего на базе частных примеров. Понятия математики я старался сформулировать так, чтобы они позволяли решить потом основную задачу анализа совместно с синтезом, целью которой является описание целого с помощью описания его частей. Естественно, практически все понятия доводятся до идеально подходящих для достижения этой цели. Причём возможность этого, возможность полноценного анализа и полноценного синтеза частей в целое, достижимость конечной цели, предполагается на каждом этапе. Следующая глава возвращает нас с небес на землю.

В “Основах физики” излагаются реальные наши возможности, те ограничения, которые заставляют нас применять выработанные математикой идеализированные понятия с необходимой

осторожностью, с нужными оговорками. И там, где это уместно. С теми ограничениями, которые мы либо сами принимаем как наиболее нам удобные (при наличии права выбора делать так а не иначе), либо не в состоянии переступить. Примером последнего вида ограничений является нереализуемость идеи потенциальной бесконечности — что бы мы не делали, все наши действия ограничены конечным числом шагов. В этой главе рассматриваются неоднократно, с разных сторон те вопросы, понимание которых является определяющим для построения всего здания физики. Само же описание фундамента здания физики в двух главных приближениях, квантовом и классическом, будет представлено в других томах этой книги.

Последняя глава, “Некоторые мифы физики”, содержит специальные параграфы, стоящие несколько в стороне от основного изложения. Их, при желании, можно читать после всей книги, а можно и не читать вовсе. Хотя, думаю, многим именно эти параграфы будут интересны. В этой главе обсуждается ряд вопросов, которые, на мой взгляд, подаются в физике совершенно неправильно, даже выдающимися учёными. И от этого мировоззрение широкой публики может только пострадать.

Глава 1

Цель науки

1.1 Описание реального мира

Мы с вами живем в Мире, *являемся его частями*. Помимо нас в Мире есть много других частей, с которыми мы постоянно взаимодействуем. Есть неживое и живое, есть предметы и существа, явления природы и изменения в нас самих и окружающем нас мире. Человек отличается от остальных частей мира, в первую очередь тем, что он не только осознает себя как вполне определённую, выделенную часть, но и тем, что научился общаться с себе подобными, передавать другим людям своё представление о себе и остальном мире. Своё *описание* окружающего мира.

Для себя картину (описание) мира мы создаём на базе своих чувств — вкуса, обоняния, осязания, зрения и слуха. Ну и, конечно, все эти ощущения проходят обработку уже внутри нас самих. Для передачи чего-либо вовне возможности наши выглядят более ограниченными. Вкус и обоняние, пожалуй, наиболее остро реагирующие на окружающий мир чувства, но именно поэтому их направленность скорее снаружи внутрь. Только три последних чувства — осязание, зрение и слух подходят для того, чтобы передавать состояние внутреннее наружу, другим объектам мира. Но тоже в разной степени. Наиболее ограниченным, в первую очередь дальностью действия, является осязание. Поэтому основные средства обмена информацией между людьми базируются на зрении и различных явлениях, которые воспринимаются слухом. В частности, на наших способностях создавать звуки, главной из которых является речь.

Самих по себе этих способностей не достаточно для общения. Необходимо также, чтобы люди, обменивающиеся своими представлениями об окружающем мире (и не обязательно люди, конечно) ассоциировали с одними и теми же знаками или звуками одни и те же представления. Значит, речь идёт о *языке*, языке знаков, слов, рисунков и т.д., и т.п. **Описание мира по-необходимости является языком**, языком общения.

Таких языков люди создали очень много разных. Причём отнюдь не все из них мы считаем языками в полном смысле этого

слова. Например, язык танца, или живопись, или музыка в широком смысле. Всё это может быть использовано и используется для общения, для передачи своего видения мира другим людям.

Языками в более узком смысле обычно называют ту совокупность речевых и письменных (не обязательная составляющая) конструкций, которую определённая группа людей использует для общения между собой. К ним можно добавить и вторичную надстройку, язык знаков (в частности, язык глухонемых), который позволяет при наличии ограничений на создание звуков всё-таки обмениваться информацией.

Поскольку все такие группы людей *существуют в одном и том же Мире*, то при их взаимодействии возникает потребность в *переводе*, в отождествлении конструкций из разных языков. Эта задача отнюдь не простая, более того, часто однозначное отождествление оказывается невозможным. Даже в пределах одной языковой группы люди нередко вкладывают немного разный смысл в одни и те же слова. "... Мысль изречённая есть ложь...", сказал замечательный поэт Ф.И.Тютчев. И это не только красивая фраза. Она подчеркивает то, что есть разные формы существования вроде бы одного и того же, но их тождественность ничем не гарантирована. Уже само то, что это *разные* формы чего-то *допускает наличие некоторых различий между ними*. Разные люди могут вкладывать разный смысл в одни и те же слова, а значит мысли их при этом будут различаться. А для разных языковых групп, разных народов, это случается гораздо чаще.

Не секрет, что среди языков есть более развитые, описывающие мир полнее других. Имеет место также обмен понятиями, заимствования слов и приёмов речи. Поскольку развитие языка происходит в течение длительного времени, люди создают новые понятия, часто вкладывают немного разный смысл в одни и те же слова, смысл слов меняется со временем, появляются другие слова с тем же самым или похожим смыслом. Поэтому любой бытовой язык является многоплановым и весьма запутанным.

А Мир наш един, и хочется иметь его *адекватное описание*. Адекватное означает такое описание, такой язык, чтобы в этом описании каждой части мира, каждому явлению, каждой связи между частями мира соответствовало одно и только одно понятие. В попытке достижения этой цели человечество выработало такое понятие, как **наука**. Наука — это и часть языка, и метод формирования и самих понятий, и их конструкций, и правил употребления этих понятий и конструкций. Она стремится создать **такое описание мира, чтобы каждой части мира, каждому явлению в нём имелось соответствие в описании**. И наоборот. Научный подход означает, в первую очередь, использование понятий базирующихся на опыте. **Научный метод требует, чтобы понятия, используемые в языке науки всегда имели соответствие в реальном мире. Причём, по возможности, взаимно однозначное. До-**

стижение такого соответствия описания реальному миру — это цель науки.

Ясно, что текущее состояние науки вряд ли совпадает с намеченной целью в точности. Ясно также, что попытка науки выработать свой собственный, специальный язык не может увенчаться успехом полностью. Такой язык всегда останется лишь частью полного, бытового языка, не сможет обойтись без тех слов и конструкций, которые уже ранее были освоены человечеством. Так как именно бытовой язык осваивается людьми в процессе взросления (познания окружающего мира) и всегда будет служить для разъяснения всех новых, дополнительных понятий. Более того, сама наука в процессе своего становления оказалась обречена на возникновение не одного единственного языка, а довольно таки многих, подходящих для описания разных сторон, разных частей реального мира. Появились “разные науки”, со своими собственными терминами, понятиями и правилами их использования — физика, химия, биология, математика, филология, и многие другие. И в каждой такой науке также продолжают множиться диалекты, приводящие иногда даже к утере связей между разными разделами одной и той же науки. Поскольку эта книга посвящена основаниям физики, я буду использовать главным образом примеры из этой области науки, хотя и не всегда.

Уже в школе мы знакомимся с разными диалектами физики — механика, электричество, магнетизм, астрономия и т.д. А связи между этими разделами физики часто остаются за пределами знаний, получаемых в школе. Более того, единство физики остаётся пока не достигнутой мечтой для самих физиков, т.е. людей, которые посвятили этой науке свою жизнь.

Иногда, такие ситуации со временем преодолеваются, но чаще пока происходит наоборот. К старым проблемам добавляются новые. Для физики ярким примером преодоления такого рода проблемы может служить теория электромагнетизма, к созданию которой приложили руку многие учёные, но завершающую картину сформулировал Д.К.Максвелл. Поэтому эту часть физики, эту часть описания мира называют теорией Максвелла. Ведь поначалу магнетизм и электричество полагались разными и не связанными друг с другом явлениями. Сегодня же совершенно ясно, что это проявления одного и того же свойства реального мира. Для понимания этого потребовалось время и усилия многих выдающихся учёных. Но результат того стоил.

В качестве другого такого примера можно указать современную термодинамику, базирующуюся на идеях Л.Больцмана (не только его, конечно, тот же Максвелл сделал в этом направлении очень много). В термодинамике было сформулировано много специфических понятий, казавшихся оторванными от такого раздела физики, как механика. В итоге же оказалось, что всё это проявления относительного движения мельчайших составля-

ющих тела частиц (частей мира). Специфические понятия термодинамики не утратили своего значения, однако их происхождение и смысл стали гораздо яснее.

Но единого понимания всех разделов физики нет до сих пор. И главным препятствием для этого являются гигантские провалы в самих основаниях физики, в представлениях о полях, частицах, силах, энергии, пространстве и времени. Многие из этих понятий до сих пор не сформулированы ясно и однозначно. Тем не менее, задача выработки единого, самосогласованного описания Мира была и останется главной как для физики, так и для науки в целом. Отдаём ли мы себе в этом отчёт, или нет.

1.2 Требования к языку науки

Для достижения своей цели наука, как язык, должна сформулировать самоограничения на допустимые в её рамках понятия и способы, которыми эти понятия могут применяться. Конечно, всё это должно быть сделано с помощью обычного языка, но так, чтобы результат не допускал неоднозначного толкования, и, по возможности, был совершенно ясен всем. Такие самоограничения необходимы по простейшей причине. Обычный язык не только не заботится об однозначности и ясности выражений и конструкций, наоборот, многозначность им весьма интенсивно используется. Особенно в литературе, поэзии, анекдотах. Да и в обычной жизни мы не чужды всякого рода двусмысленностей, часто они даже приветствуются в общении. А вот для науки это не годится. Нам нужно однозначное, адекватное описание Мира. Никто нам не гарантирует, что эта цель достижима. Но, как говорят, мечтать не вредно — вредно не мечтать. Поэтому попытаемся сформулировать сначала требования к языку науки, а потом будем описывать сам язык, который уже есть, но не всегда является полностью удовлетворительным.

В этой книге я постараюсь использовать для формулировки описания реального мира только хорошо определённые понятия. Сначала буду останавливаться на их уточнении. При этом описание многих понятий будет начинаться с их бытового смысла. После уточнения смысла, далее в тексте книги, там где по контексту возможно неоднозначное толкование тех или иных слов (ведь для книги я по необходимости использую и бытовой язык!) и обязательно требуется применять только уточнённое, ранее описанное их значение, я буду использовать для таких терминов наклонный шрифт. Пример — множество и *множество*, как сугубо математическое понятие. Там, где таких неясностей не должно бы возникнуть, когда и так ясно о чём идёт речь, шрифт будет обычным. Да и наклонный шрифт я буду иногда употреблять просто для привлечения внимания к тем или иным словам.

Иногда то или иное понятие я буду употреблять в не совсем том смысле, который следует из его определения. Чаще всего,

расширяя применение таких слов, но опираясь на главные свойства понятия. В таких случаях я постараюсь говорить об этом явно. И, кроме того, при таком употреблении буду помещать слова в кавычки. Например, группа как понятие математическое, и “группа” как более широкое, не соответствующее в точности определению группы в математике. Хотя кавычки я также часто буду использовать при уточнении смысла того или иного понятия, для того, чтобы акцентировать внимание именно на этом слове. Далее уже такие слова будут использоваться без кавычек.

Как я уже неоднократно говорил, желательнее, чтобы все понятия, используемые в языке науки были определены чётко и однозначно. Добиться этого трудно, но стремиться необходимо. Базироваться при этом нам придётся на понятиях обычного языка. А значит нужно будет их проанализировать (не все, а некоторые, базовые), выделить основное, годное для использования в языке науки, и сделать на этом акцент, т.е. обеспечить, чтобы при их дальнейшем употреблении (это касается только языка науки, естественно) никакого иного смысла в эти понятия не вкладывалось. Нужно сказать, что задача эта отнюдь не тривиальная. Ведь каждый читающий книгу может понять написанное сообразно своему опыту и знаниям, произвольно изменяя тот смысл, который вложил в слова автор.

Соответственно, таким же образом должны быть уточнены и методы определения новых понятий, и методы работы с ними.

Для начала я попытаюсь определить одно из важнейших для науки понятий, формулирующее ту цель, к которой наука (и вся в целом, и определённая её часть, ограничивающаяся описанием только части свойств Мира, например, физика) должна стремиться. Это понятие называется **теория**.

Слово теория используется для краткого, собирательного названия описания некоторых свойств Мира. Например, теория Ньютона, теория Максвелла, теория Эйнштейна, теория чисел, теория групп, теория Дарвина. Как водится, появившееся в одной части языка понятие начинает использоваться гораздо шире. Теория заговора, например. И часто при этом само понятие может утрачивать определённые, важные черты, которые в него были вложены изначально, видоизменяясь иногда до такой степени, что диву даёшься.

За примером далеко ходить не надо. В физике последние десятки лет весьма модной является так называемая “теория” суперструн, все эти годы обещающая решить все проблемы, лежащие в основаниях физики и стать тем фундаментом, на котором вырастает её величественное здание. К сожалению, все эти обещания и многократные декларации, что всё уже сделано, осталось совсем чуть-чуть, так и остаются ничем не подкреплёнными обещаниями и декларациями. Всё бы ничего, проблемы ведь серьёзнейшие и поиски их решения отнюдь не обязательно увенчиваются успехом. Вот только не следует эти поиски называть

“теорией”.

Так что же нам следует понимать под словом теория?

Теория – это, желательно, полностью самосогласованная система взглядов, объясняющая некоторую совокупность фактов и/или явлений реального мира. В основу теории обычно положено некоторое количество определений и соглашений, желательно, в явном виде. В идеале все они не должны противоречить друг другу. Кроме того, должны быть очерчены методы и терминология, которыми пользуется теория. В науке это, по необходимости, методы логики и математики.

В действительности же, многие успешные в своей области теории не следуют этому определению полностью. Но такие моменты являются их слабыми местами и, в конечном итоге, наличие таких отклонений приводит к необходимости их модификации или даже замены другими теориями. Тем не менее, наличие всех трёх составляющих — системы определений, правил работы с определёнными в теории понятиями и, что чрезвычайно существенно, соответствия этих понятий некоторому кругу фактов и явлений реального мира, является определяющим для того, чтобы можно было говорить о некоторой системе взглядов, как о теории.

Целью этой книги является формулировка такой теории в одной из областей науки, в физике. Конкретнее, теории её оснований, её фундамента. Поэтому главное внимание в вводных главах я буду уделять уточнению понятий, жизненно важных для построения такой теории.

1.3 Материя, Идеи, Понятия

Начнём с уточнения понимания слова “понятие”. У слова “понятие” имеется аналог, почти синоним — слово **идея**. Слово понятие представляется имеющим несколько более широкое значение, чем слово идея. Но именно поэтому уточнить смысл слова “идея” может оказаться немного легче. А потом уже можно, опираясь на это уточнение, либо уяснить в чём же смысл слова “понятие” шире, либо просто **договориться** использовать оба слова как полноценные синонимы.

Для уточнения обсудим соотношение между материей и идеями. Традиционно понятия “идея” и “материя” противопоставляются. Самый характерный пример, это противопоставление философских течений материализма и идеализма.

Идея, идеальное обычно противопоставляется материальному как нечто, доступное скорее только нашему разуму или, если уж чувствам, то неким внутренним ощущениям, вроде веры. И никак не непосредственным чувствам. Вот здесь, по-моему, и лежит причина такого противопоставления. Попробуем же вычленив понятие идеи, уяснить, что же мы вкладываем в это слово,

в чистом виде.

Возьмём для примера идею музыки. Вряд ли кто-то будет оспаривать утверждение, что музыка существует. Но что это такое, “музыка существует”? Музыка это — те звуки, которые льются из дудочки? Или звуки огромного оркестра? Или то ощущение, которое возникает у человека, когда он эти звуки слышит? Нет человека и нет музыки? Кажется, что это нечто очень субъективное, неразрывно связанное с человеческим восприятием. Однако, существует и нотная запись, позволяющая людям одарённым “слышать” музыку просто глядя на лист бумаги испещрённый некими значками. И где же там звуки? Опять в голове у человека? Но приходит не столь одарённый человек, которого научили понимать эти значки и пользоваться неким инструментом — и вот она, музыка. А сейчас ещё проще — нажал кнопку на каком-нибудь приборе и оркестра не надо. Звучит музыка. Даже если тот, кто нажал кнопку понятия об этом не имеет, и слова такого не знает. Представим фантастическую ситуацию. Вымерли люди. А вот созданные ими проигрыватели музыки на флэш-памяти сохранились и ещё функционируют. А выжившие потомки обезьян, или скажем кошек развили свой разум. Нашёл их будущий археолог проигрыватель, нажал кнопку и зазвучала музыка. И понравился этот набор звуков археологу, и началась новая жизнь музыки. Без человека. Получается, в принципе, музыка не нуждается в человеке для своего существования?

Но ведь очень долгое время никаких звуков не было. А музыка сохранилась. Что же сохранилось на самом деле? Сохранилась идея музыки. Не в форме звуков. Не в форме человеческих ощущений. Но сохранилась.

Что общего во всех этих случаях — колебания воздуха, строчки на бумаге, нечто невидимое глазу на магнитофонной ленте или на оптическом диске? Все эти предметы являются носителями, формой существования музыки, как идеи. Но сама идея отлична от любой своей формы. Даже от той самой, которую мы и назвали музыкой изначально. В слове “музыка” всегда имеются две составляющие — абстрактная идея и её форма существования.

Зададимся вопросом — а идея музыки, простая или сложная? Т.е. можно ли эту идею рассматривать как совокупность более простых? Можно. Мы знаем идею, называемую мелодия. Мелодия это уже музыка. Но она может быть очень простой и бесхитростной. А музыка как общее понятие может быть построена из множества мелодий, звучащих вместе или по-очереди. А мелодия? Мелодия тоже идея сложная, она является последовательностью звуков. Звук это тоже ведь идея, имеющая разную форму существования. Но звук мы музыкой не назовём. А мелодию назовём. Если идея музыки общего вида рождается из объединения, взаимодействия совокупности мелодий, то сами мелодии рождаются при объединении звуков. При объединении идей

изначально других. Причём не всякое объединение звуков рождает мелодию. Гораздо чаще рождается шум.

А возьмём теперь колесо. Колёса бывают разные — деревянные, железные, со спицами или цельные. И даже нарисованные на бумаге. Опять мы имеем идею и формы её существования. И сохраняются колёса получше музыки при нашем исчезновении с лица планеты. Да и использовать найденное колесо будущему археологу будет совсем просто. Или повозку с колёсами. Снова мы имеем идеи сложные, составленные из более простых, которые, в свою очередь, получились как объединение и взаимодействие идей ещё более простых.

Что нам показывают эти примеры? То, что наши понятия всегда содержат две составляющие — идею и её форму реализации. Что идеи бывают разные. Что они могут объединяться и взаимодействовать. Порождать другие идеи. Причём разные. Идеи звука могут порождать и идею музыки, и идею речи, и идею шума. А уж в какие разные идеи механизмов даёт свой вклад идея колеса и перечислять устанешь.

Позвольте, но ведь и колесо, и звук — всё это вещи сугубо материальные. Именно так. Если вы присмотритесь внимательно, в любой материальной вещи, какую не назови, вы найдёте идею. Идею этой вещи, очищенную, отвлечённую от конкретной реализации, которая может быть разной. Вот тут может возникнуть соблазн. Идея первична, а материя вторична. Так? Не так. Может ли существовать идея без какой-либо её реализации? Мне скажут — вот придумая я что-то, что и сделать нельзя. Вот вам и идея без реализации. Лукавство это. Идея реализуется уже тогда, когда она придумана. И существует она вполне реализованной в голове её создателя, как набор каких-то связей между его нейронами. Мы ещё плохо знаем, как устроен наш мозг, почва эта зыбкая, рассуждать о том, как именно наши мысли в нём реализуются. Но то, что как-то реализуются именно там, сомневаться не стоит. А мозг наш вполне даже материален. А утверждение что материя первична, а идея вторична? Это утверждение обосновать можно?

Материя — что мы понимаем обычно под этим словом?

Материальное, материя. Чаще всего эти слова используются нами для обозначения всех и всяческих вещей, которые существуют или могут существовать в нашем мире. Для большинства людей это будут предметы, которые можно пощупать (стол, стул, хлеб, вода и т.д.) или хотя бы ощутить (свет, тепло, звук и аналогичные явления). Но ведь выше приведённые примеры уже нам показали, что в каждом таком понятии, если поскрести, мы найдём идею. Идею этого предмета или явления. Да, всё это вещи достаточно сложные. Может быть поэтому в них так легко отыскать идеальное?

Посмотрим на самые основы нашего описания мира. Я не знаю понятия проще, чем элементарное, простое (неделимое) со-

бытие. Всякий предмет или явление можно описать как некоторую совокупность связанных друг с другом элементарных событий. Свободно ли это понятие от “идейной” составляющей? Нет. Не свободно. Есть идея элементарного события (одного, любого). И есть идея их множественности, множественности реализации этой элементарной идеи. И ещё одна идея уже есть. Идея организации этих событий в совокупности (цепочки, последовательности). Зависит ли этот факт от того, что мир описываем мы, люди? Ни в коей мере. Он даже не зависит от того, есть ли кто-то, кто хочет описывать мир. Да, когда мы описываем мир, эти элементы мира, их идеальные стороны находят себе новую реализацию именно в нашем описании, в книгах, разговорах, в мыслях наконец. Но без исходной материальной реализации они бы там не появились.

Идеи — это неотъемлемое свойство мира.

Получается, что идеальная составляющая лежит уже в самой основе мира, необходимо её принимать во внимание при любой попытке описывать этот мир. Так может не нужно выделять понятие идеи отдельно от материи? Нужно. Идея концентрирует в себе очень многие свойства мира, которые не описываются иным образом. Здесь и соотношения частное-общее, единичное-множественное. Ещё имеется организация одинаковых элементов в разные структуры, и таким образом появление новой идеи. И реализация той же самой идеи иными элементами тоже. Да и само описание мира, по большому счёту, тоже идея. Которая может быть реализована разными способами. Разделение мира на материю и идеи удобно, полезно и позволяет его эффективно описывать. Но это разделение единого на его свойства. Поэтому, я считаю, что противопоставление материи и идеи порочно и бесплодно.¹

Мы хотим уточнить значения слов не вообще, а для формирования той части языка, которую мы используем для наиболее точного описания мира. Слова “идея”, “материя”, “понятие”, являются неотъемлемой частью языка науки. Мы описали многими словами, что следует под ними понимать, какой смысл стоит вкладывать в эти слова. Желательно сформулировать это бо-

¹Такой взгляд на соотношение материального и идеального сразу же приводит к весьма забавным вещам. Например, упрощается отношение к религии и к понятию бога. В частности, ответ на вопрос “есть ли (существует ли) бог?” приходит сразу. Да, существует. Но не как некое отдельно где-то реализованное существо, а как идея, живущая в головах верующих в этого бога, в литературе ему посвящённой, в храмах для него построенных, ну и так далее. Влияет ли такой бог на мир, на нашу жизнь? Влияет, да ещё как. И создаёт, и разрушает, и поддерживает и управляет. И поощряет и наказывает. Да, не как существо всевидящее и всезнающее. А как идея, ведущая к тем или иным результатам, осознанным её носителями, или не осознанным, не важно. Чем идея распределённая (реализованная как совокупность множества элементов, бог как совокупность верующих) в этом смысле отличается от идеи сосредоточенной (реализованной единственным элементом, бог отдельно существующий)? Да ничем.

лее компактно и указать те ограничения, которые необходимы для достижения наших целей. **Описание мира с точки зрения его формулирования средствами языка является не чем иным, как собранием идей.** Поэтому определение содержания, смысла каждой идеи является главным в формировании языка науки. Идеи могут быть чрезвычайно сложными, запутанными и даже противоречивыми. Где-то на вершинах здания науки могут рассматриваться и такие идеи. Но! Все сложные идеи потому и сложные, что состоят из более простых. Здесь и сейчас нас интересует фундамент, основания науки. Т.е. идеи **максимально простые**. Простые означает **не сводимые к другим идеям**. Эти простые идеи всегда должны иметь хотя бы один пример реализации в мире, который мы описываем. Но необходимо также всегда осознавать, что идея и любая из её форм существования **не тождественны**. В этом смысле наше описание мира с помощью идей будет описанием того общего, что мы в нём увидели во многих его частях, а не только применительно к данной конкретной части мира. Таким образом для нас остаётся вопрос, на который нам в определённый момент придётся ответить — до какой степени однозначности соответствия миру, до какой степени конкретизации может и должно дойти наше его описание.

В этой связи хочу уточнить смысл ещё одного близкого слову “идея” понятия. Слово “идеальный”, “идеальное”. Мы будем использовать это слово для того, чтобы отметить максимально достижимую близость реализации какой-либо идеи к самой идее. Хотелось бы, чтобы идеальное описание мира соответствовало **всем нашим желаниям**. Как цель это можно принять, но, вполне вероятно, что желания придётся и померить.

Теперь хочу вернуться к соотношению между словами “идея” и “понятие”. Как можно было видеть выше, для меня эти два слова почти равноценны. Только слово понятие более употребительно тогда, когда идея чего-то ещё не сделана совершенно ясной, хорошо определённой.

1.4 Существование и Не Существование

Одной из самых простых, базовых идей, является понятие “существование”. **Я существую.** Камень существует. Мир существует. Такие утверждения являются реализацией этого понятия в его простейшей, самой ясной форме. Некая часть мира существует именно как часть мира. В такой форме понятие “существование” описывает самое базовое **свойство** любой части мира. Оно не уточняет, какова именно эта часть мира. Это свойство принадлежит любой части мира. Всё остальное, различающее одну часть мира от другой — всё это должно быть добавлено как описание. Но если в мире чего-то нет — **не существует** — то это будет столь же фундаментальное утверждение, означающее, что описание этого чего-то **не подходит для описания реального**

мира.

Однако это вот “что-то”, не существующее в реальном мире, вполне себе может существовать в нашем языке. А значит, к использованию этого понятия тоже нужно подходить со всей осторожностью.²

Для описания Мира мы должны использовать только такие понятия, такие идеи, реализация которых может быть подтверждена хотя бы одним примером в реальном мире, а не только сложной (или не очень сложной) описательной конструкцией нашего языка. Иными словами, гарантию “существования” некой идеи *как части мира, или как свойства какой либо части мира* нам может дать только **опыт**. Ещё одна идея, смысл которой как раз в этом и состоит — проверять соответствие идей реальному миру. Описание мира должно основываться на опыте и проверяться опытом. В самой упрощённой формулировке, опыт это реализация в мире сформулированной нами идеи. Пусть не в полном объёме, приближённо, ведь идея часто является обобщением опыта, или обобщением процесса, наблюдаемого на опыте. Но смысл идеи в примере реализации должен быть виден. И должна быть видна степень соответствия идеи примеру. Так как возможно, что идея была сформулирована недостаточно точно.

Как будет видно дальше, именно с понятия “существование” в его самой базовой, фундаментальной форме и начинается построение языка для описания мира. Конечно, этот язык формировался длительное время, притом отнюдь “не сначала” в формальной, самосогласованной форме. Именно поэтому и требуется всё это предварительное обсуждение смысла, вкладываемого **в этой книге** в те или иные слова и понятия.

И вот это, самое базовое понятие “существование”, может легко сделать любое описание мира совершенно ему не соответствующим, если не следить за его употреблением внимательно. Ведь в описании речь **всегда** будет идти об идеях. А идеи *в самом общем смысле* начинают существовать в тот момент, когда они сформулированы. Даже если они противоречивы или совсем абсурдны. Поэтому нам придётся выяснять, насколько полно та или иная идея, то или иное понятие, которые мы используем в своём описании мира, *могут быть реализованы в том самом мире опытным путём*.

Каким бы простым не казалось понятие “существование”, оно всё-таки требует уточнения. Дело в том, что мы используем его в двух разных смыслах.

Первый смысл, самый простой, подразумевает только то, что что-то есть, имеется. Этим что-то может быть что угодно. Как что-то действительно имеющееся в реальном мире, так и что-то реализованное всего лишь нашими словами, мыслями или какими-либо символами. Камень существует. Не важно где, не

²Как раз таким “существованием” обладает понятие бога как чего-то цельного, отделённого от Мира.

важно какой. Но в мире есть нечто, что мы называем камень. Существует сфинкс. Да, в Египте имеется сооружение из камня, которое называют “сфинкс”. Есть рисунки, словесные описания. Имеется идея “сфинкс” как некое существо. Но вот существа такого в реальном мире нет. Не существует.

Этот смысл понятия “существует” используется очень широко. И в языке быденном, и в научном. В научном в особенности часто. В математике это одно из образующих её понятий. Имеется специальный знак \exists , который используется в формулах и описаниях как краткий символ этого понятия. Имеется то-то и то-то. Как условия. Тогда имеется то-то. Как результат.

Второй смысл этого понятия подразумевает апелляцию к другому понятию, времени. Очень часто “существовать” означает “длиться”, иметься не только “вообще в наличии — где-то, когда-то, да даже и в виде не реализуемой в мире идеи”, а именно “быть”, существовать, как вот этот, конкретный, камень или какое-либо реальное существо. Этот смысл чрезвычайно важен для нас, он обязательно должен появиться в основаниях физики. По этой причине нам придётся уточнять его ниже неоднократно. Здесь пока будет достаточно лишь указания на то, что вот такое, расширенное понимание слова “существование” имеется и является важным.

1.5 Часть и Целое, Анализ и Синтез

Часть и Целое. Эти два понятия, **часть** и **целое**, их взаимная связанность, являются формообразующими для описания мира. Для нас естественно делить мир на части. Мы сами являемся его частями. Поэтому Мир как целое для нас при любых попытках его описания выглядит как совокупность частей. Частей, каждая из которых сама может представляться, в свою очередь, целым. Потому, что практически любую выделенную нами часть мира мы можем, явно или теоретически, снова разделить на части. Вообще, делить что-то на части для нас весьма естественно. А вот собирать потом из этих частей целое уже сложнее. Иногда намного сложнее. В научной терминологии эти два процесса, деление целого на части с их последующей классификацией, и противоположный процесс, объединение предметов (явлений, действий и т.д.) в целое, единую, взаимосвязанную совокупность, получили специальные названия — **анализ** и **синтез**. В части научного языка, называемой математикой, имеются более специфические названия — **дифференцирование** и **интегрирование**. На них мы подробно остановимся позже. Здесь же обсудим самые общие свойства этих понятий. Те свойства, которые являются для нас интуитивными, очевидными из нашего повседневного опыта, которые потом частично сужаются, уточняются при определении понятий. Нужно нам это для того, чтобы происхождение и необходимость этих математических понятий стала если не очевид-

ной, то, хотя бы, в достаточной степени понятной.

Важно отметить, что выделяя в Мире те или иные его части, называя их, описывая, мы не склонны видеть между ними какие-либо связи. Предметы, вещи представляются нам изолированными друг от друга. Происходит это часто потому, что для того, чтобы разделить что-то на части, необходимо, хотя бы неявно, признавать, видеть хоть какое-то **различие** между этими частями. А значит части внутренне разные, не связанные. Даже если первоначально они представлялись как части одного целого. Например, разрезав яблоко пополам, мы уже имеем две совершенно отдельные половинки. Как результат, с такой точки зрения Мир представляется как собрание совершенно не связанных друг с другом предметов, которые ничего не знают друг о друге, по крайней мере до тех пор, пока не придут в соприкосновение. Здесь рождается идея **дискретного**. Здесь находятся корни идеи **вмещающего пространства**, чуждого самим предметам, в нём находящимся.

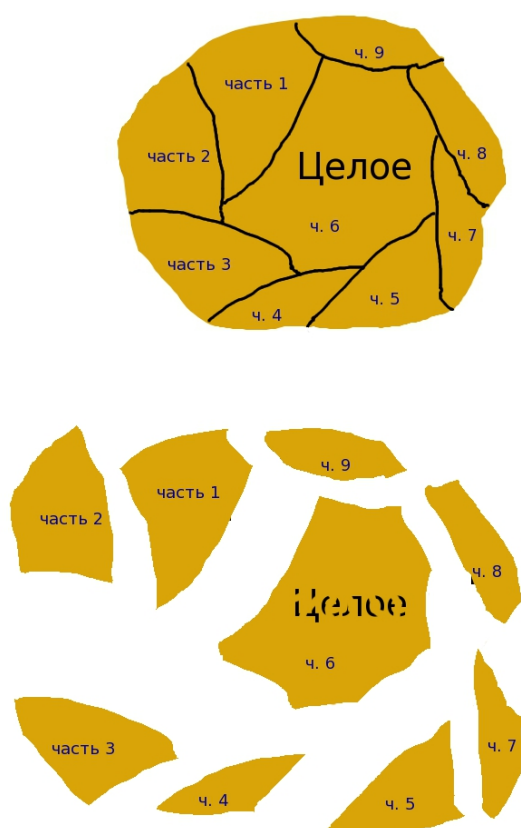


Рис. 1.1: Целое и множество частей. Анализ. После разбиения целого на части связи между ними могут быть утеряны. Полностью или частично. И совокупность частей уже перестаёт быть эквивалентом целому.

С другой стороны, наш опыт находит в мире и такие его части, которые явным образом порождают идею **связей** между ними. Иногда эти связи явные, но легко разрушаемые. Иногда связи можно разрушить тоже, но это гораздо сложнее. Примером первого типа связей могут служить нитки, которые легко рвутся руками. А вот стальную проволоку руками уже разорвать практически невозможно. Такие предметы (части мира) порождают идею **непрерывного**. Идею непрерывного гораздо сложнее сформулировать, чем идею дискретного. Она даже представляется вторичной по отношению к идее дискретного, и в этом смысле **сложной, составной**. Ниже мы увидим, что это не совсем так. Идея непрерывного вполне самостоятельна, и даже, в определённом смысле, более фундаментальна, чем идея дискретного. В итоге оказывается, что *лучше всего рассматривать эти две идеи как независимые, хотя и взаимосвязанные*.

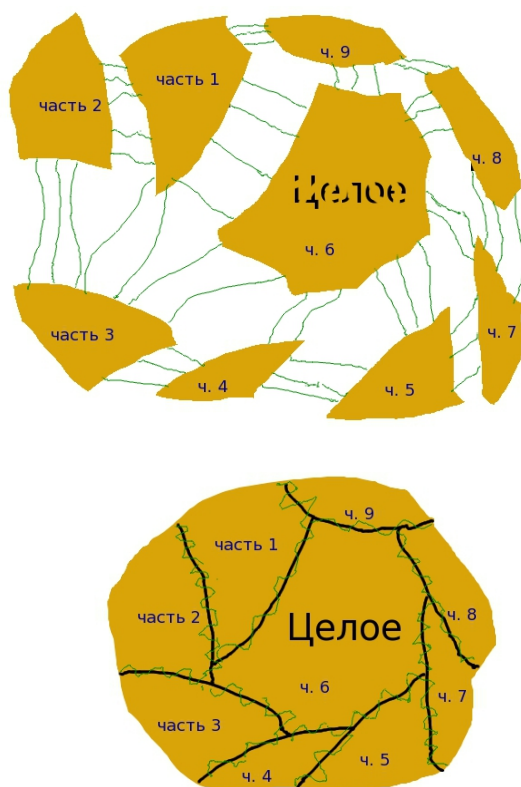


Рис. 1.2: Связи частей и объединение частей в целое с помощью связей. Синтез. Если между частями имеются связи, то их можно объединить в целое. Однако, для полноценного синтеза, чтобы целое было полностью эквивалентно самому себе до разделения на части, известных связей может быть недостаточно.

Помимо хорошо видимых примеров непрерывных частей ми-

ра, имеются примеры связей между явно различимыми разными предметами, которые невозможно увидеть. И, тем не менее, их наличие нам хорошо известно. Два всем понятных примера — притяжение всех предметов к Земле и притяжение разных полюсов магнитов. И отталкивание одинаковых полюсов. Эти явления породили идею физического **поля**. А также идею того, что связи, обеспечиваемые полями, разрушить невозможно.

И ещё, они дают основу для осознания **целостности, единства Мира**, как совокупности всех предметов и явлений. Последнее очень важно для формирования правильного, продуктивного взгляда на мир. Полноценного мировоззрения.

Очень долго наука шла по пути анализа, дробления знания о мире. И продолжает идти. Просто потому, что это легче нам делать, чем объединять разрозненные части знания в единое целое. Нет, конечно, попытки синтеза предпринимались всегда, на всех этапах истории человечества, в том числе и тогда, когда понятия о науке ещё не существовало. Вот только такие построения отличаются от аналитических в худшую сторону наличием множества ничем не обоснованных допущений и соглашений. Синтез сложнее анализа из-за утраты знаний о некоторых связях между предметами анализа, обусловленных самим процессом анализа.

Глава 2

ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ

2.1 Множества, Операции и Целые Числа

Обсудим теперь те понятия, которые естественным образом возникают из уже рассмотренных нами, и могут быть положены в основу нужного нам языка науки, который называется математикой. Общим мнением является представление, что математика в основе своей это наука о числах. Однако уже довольно давно было понято, что математика начинается немного раньше, с понятия **множества**.

В самом деле, то что мы по-необходимости выделяем в мире различные его части, делает понятие “множество” для нас естественным, очевидным ещё до возникновения каких-либо представлений о счёте, а значит и о числах.

Под множеством мы понимаем произвольную совокупность некоторых предметов, частей мира, имеющих какое-то **общее свойство**. Свойство это может быть совершенно произвольно, но оно обязательно имеется. Например — кучка камней, кучка яблок, стадо овец. Свойства здесь — принадлежность части мира к камням, яблокам, овцам. Всё это множества, в самом простом, интуитивном, бытовом смысле. Подчёркиваю, все предметы, части мира, включаемые интуицией в множество, обязательно имеют какое-то **одинаковое** свойство. Об этом я скажу ещё немного подробнее чуть позже. Сейчас же хочу обратить ваше внимание на то, что вместе с понятием множества возникает понятие **операций, действий** с множествами. Причём, очевидным является наличие двух возможных, прямо противоположных по результатам операций. Это операция **объединения множеств** и операция **разделения множества на части**, которые сами являются множествами. Те же самые примеры — несколько кучек камней или яблок, или стад овец, объединяются в одну. Или наоборот, кучка камней, яблок, стадо овец разделяются на несколько.

Это ещё не математика, но уже тот каркас, с которого она начинается. Это примеры реализации в реальном мире идей, формализованных в той части языка, которую мы называем математикой. Как же математика формализует описанные выше идеи?

Рассмотрим это подробнее.

Во-первых, математика отказывается от слежения за ярлыком, маркером, согласно которому мы объединяем предметы в множества. Т.е. для математики это свойство частей мира объявляется не существенным. Предметом математики объявляются только объекты, называемые множествами, с которыми можно проводить две операции объединения и разделения так, что результатом любой операции снова является объект того же вида, т.е. снова множество. Это не единственные операции, которые математика определяет для множеств. На части из них, хотя и не на всех, мы остановимся ниже.

То, что **все** множества, с которыми оперирует математика, имеют одно и то же свойство, по которому они формировались, один и тот же ярлык, **подразумевается неявно**. Хотя Кантор ввёл определение множества именно как “единое имя для совокупности всех объектов обладающих данным свойством”. Отметьте для себя этот момент. Это свойство математики нужно хорошо помнить всегда, когда вы пытаетесь применить её рассуждения к реальному миру. Заметьте также, что то интуитивное представление о множестве, которое я обсуждал раньше и давал примеры его реализации, немного отличается от определения Кантора. А именно, оно не требует говорить о **всех** объектах, обладающих данным свойством. “Всех” — это слишком много, и легко может привести к парадоксам (и приводит), в то время как для формулирования самого понятия достаточно существования и некоторых объектов с одним и тем же свойством.

Правильно ли поступают математики, оставляя кое-что, существенное для нас в понятии множества, за рамками своего рассмотрения? И да, и нет. Да, потому, что при этом они описывают всё то, что можно будет применить к **любым** нашим множествам. И нет, потому, что если забыть об общем ярлыке совсем, то при применении математических построений к реальному миру, для его описания, можно получить абсурдные результаты. Это касается не только теории множеств, а всей математики в целом. Примером такого абсурда может служить объединение камней и овец. Что будет результатом?

Так что же позволяет нам объединять некоторые части мира в “множества”? Позволяет это делать самая простая форма **процедуры измерения**. Понятие, идея процедуры измерения, по моему мнению, является основой нашего описания мира, и потому важнейшим элементом этого описания. По сути дела, всё, что вы прочтёте в дальнейшем, опирается на это понятие и приписываемые ему нами (или реальным миром) свойства.

Что мы делаем, когда объединяем части мира в некоторое специфическое множество?

1. Выбираем **эталон**, представитель будущего множества. Некоторое свойство, которым должна обладать любая часть

мира, любой предмет, которые могли бы рассматриваться как подходящий, определяет этот эталон.

2. Производим **сравнение** произвольных частей мира с этим эталоном. Есть такое же свойство, или нет.

Сравнение производится в его самой простой форме — совпадает или не совпадает.

Всё. Этого уже достаточно для того, чтобы говорить о множестве одинаковых предметов. При этом, предметы эти (части мира) могут и **должны** быть в чём-то отличными друг от друга. Но эти отличия игнорируются на данном этапе, при формулировании понятия о множестве.

Зададимся вопросом, а какое же свойство частей реального мира лучше всего подходит для формулирования **математического** понятия о множестве? Ведь свойств можно выбрать или придумать тоже множество (простите за каламбур, но уж таков наш обычный язык). Есть ли какое-то свойство самое-самое, общее для всех частей мира, а потому предпочтительное при попытках описания **всего** мира (мы ведь будем стремиться именно к этому)?

Такое свойство есть, и я уже уделил ему внимание раньше. Это свойство **существовать**, быть в наличии, иметься в реальном мире. Все части реального мира этим свойством обладают. Если мы выберем только это свойство как определение нашего эталона, то в одно и то же множество можно будет объединять любые предметы, любые части мира. Например, можно рассматривать вместе и овец и камни, но только как предметы, существующие части мира, отвлекаясь от всех их остальных свойств. Мы можем добавлять дополнительные требования к свойству существования, тем самым ограничивая рассматриваемые множества. Но все эти новые множества могут быть очевидным образом включены в самый общий тип множеств, формируемых только по свойству существования. Таким образом возникает идея *подмножеств* — множеств, вложенных в другие множества. При добавлении учитываемых свойств появятся новые вложения подмножеств одно в другое. Например, множество камней. Подмножество камней круглых. Подмножество камней круглых и красных. И т.д.

Параллельно возникает идея *пересечения* множеств. Если два множества имеют одинаковое подмножество, то говорят, что они пересекаются. И многие другие идеи. На этом пути математика разработала очень развитую и эффективную теорию, которая проникает практически во все её разделы. Просто потому, что понятие это можно ведь применить не только к частям реального мира, но и к самим идеям, которые формулируются в языке математики. Например, к идее операций, которые можно применять к самим множествам (или к иным объектам, которые будут определяться позже). Эталоном будет само понятие “операция”.

Множество допустимых операций — это ведь тоже множество с точки зрения математики.

Идея разделения любого множества на подмножества ведёт как к понятию **элементов**, составляющих любое множество, так и к понятию **количества элементов** в нём. И, далее, к понятию, с которого собственно и началась история математики, как науки, к понятию **натурального числа**.

Все эти идеи формулируются совместно, как совокупность связанных друг с другом идей. Однако, имея ввиду центральную роль числа в математике, можно организовать среди них с самого начала некоторую иерархию. Для того, чтобы в дальнейшем лучше отслеживать возникающие между новыми идеями (математическими понятиями) связи. Линейное, последовательное построение нам даётся легче, чем работа сразу с многими идеями. Конечно, чисто линейного построения, когда одно следует из другого, получиться не может, но выделить несколько основных, хотя и взаимосвязанных линий усложнения математических понятий, вполне возможно.

Положим в основу всего понятие “элемент”, с его единственным свойством — существовать. Я буду употреблять ещё одно слово как название этого понятия, как синоним. Это слово “точка”. Слово это (точка) будет чаще всего употребляться в контексте геометрии, о которой речь пойдёт позже. Примеры реализации этого понятия в реальном мире искать не надо. Стол, камень, животное, дерево и т.д. и т.п. Всё это вполне подходящие примеры.

Следующее понятие — “множество элементов” или “множество точек”. Добавленное свойство можно назвать словом “количество” различных элементов в множестве или “мощность множества”. Именно по этому единственному свойству сами множества отличаются друг от друга как множества. “Количество” это второе свойство, отличающее это понятие от базового понятия элемент, точка. Любому множеству присуще и само базовое свойство существования (или не существования, как увидим ниже) как единого целого. И больше пока никаких иных свойств. Примеров множеств, существующих в реальном мире любой может привести множество. Снова каламбур. Так что это формализация некоторого свойства именно реального мира, идеи в нём уже имеющейся не зависимо от того, описываем мы мир или нет.

На этом этапе добавляем также ещё один набор математических понятий, отличных и от понятия точки, и от понятия множество. Эти понятия объединяются словами “операция”, “действие”. Основание для их введения тоже чисто интуитивное, но, естественно, базирующееся на непосредственном опыте, почёрпнутом из реального мира. Операции проводятся с множествами (и с их элементами тоже, но **всякий единственный элемент является множеством, из него состоящим**). Операции бывают разные и определяются по конечному результату, по

тому, как изменяются множества после применения к ним операций. Например, операция объединения (сложения) множеств. Или операция выделения одного множества внутри другого, выделения подмножества. И другая операция, изъятия его (вычитания). Примеры реализации: есть куча камней; вы добавляете в неё камни или удаляете; или выделяете в общей куче другие кучки.

Важным свойством операций является то, что результат любой операции над её объектом (в данном случае, над множеством) остаётся таким же объектом.

Операция объединения множеств немного шире чем привычная нам операция сложения. Её можно определить двумя способами. Первый способ, это учёт одинаковых подмножеств, входящих в объединяемые, только один раз в результирующем множестве. Второй способ, который и называют сложением, такую сортировку не предусматривает. С самого начала все элементы объединяемых множеств полагаются идентичными, и сложение изменяет только второе свойство элементов, входящих в эти множества — их количество. Именно этот способ мы рассматриваем далее при формулировке понятия **числа (количества)** элементов в множестве.

Выбрав какой-то предмет реального мира за **эталон**, за базовый элемент, мы присваиваем такому множеству количество **один**. Добавив в это множество ещё один базовый элемент, мы определяем “количество элементов” в множестве как **два**. Потом три, четыре и т.д. Новое число — новое определение (название).

При этом среди получающихся множеств по свойству “количество” возникают **отношения порядка** — определяются понятия (идеи) **равно, больше и меньше**. Устанавливаются эти соотношения с помощью второй операции, входящей в процедуру измерения — с помощью сравнения. Но само понятие сравнения при этом обогащается, усложняется именно добавлением понятий **больше и меньше**. Т.е. усложняется сама процедура измерения. Раньше было только — совпадает с эталоном или не совпадает, что можно соотнести с понятием “равно”. Теперь, при применении к **количеству**, ещё и “больше” или “меньше”. А понятиям “больше” или “меньше” оказывается возможным добавить ещё одно свойство — “на сколько”. Сколько элементов нужно добавить к одному множеству, чтобы оно стало **равно** другому, большему по количеству элементов, т.е. совпадало бы с ним по этому свойству.

Очевидно, что минимальная разница в количествах (числах) соседних множеств (любых предметов), выстроенных в порядке возрастания, равна минимальному числу предметов в базовом, начальном множестве единственного эталона. Т.е. единице. Вся совокупность получающихся таким образом возрастающих **количеств** называется рядом (множеством) **натуральных чисел**. Натуральных = природных — т.е. идея, возникающая в природе

естественным путём.

Поставим вопрос — а сколько имеется самих таких множеств, с возрастающим количеством? Сколько имеется натуральных чисел? Здесь мы должны сформулировать одну из важнейших идей, из тех которые мы **никогда не сможем реализовать в точности каким либо примером из реального мира** — идею **потенциальной бесконечности**.

Наша интуиция позволяет производить операцию добавления эталонной единицы к имеющемуся уже множеству снова и снова. Она не находит того предела, когда следовало бы остановиться из внутренних побуждений, содержащихся в идее множеств и операций с ними. Реальный мир, наверное, мог бы положить предел продолжению операций, но это был бы предел **внешний для идеи натуральных чисел**. Мы определённо не можем продолжать сложение бесконечно, но допустить такую возможность, в принципе, можем. И делаем это, в первую очередь потому, что идея потенциальной бесконечности помогает нам в главном для нас при создании описания мира — она позволяет перебросить мостик от представления о мире как собрании разрозненных частей к представлению о мире как единому целому, связанной совокупности частей. Мы ясно увидим это в дальнейшем.

Таким образом, мы просто **определяем** количество натуральных чисел (мощность множества натуральных чисел) словом **бесконечность**. Точнее, как **потенциальную бесконечность**. Понимая под этим словом, под этой идеей, возможность продолжать сложение любого числа с единицей (или иным числом) без ограничения. Определение “потенциальная”(возможная) у этой, введённой нами, идеи бесконечности важно потому, что в следующем параграфе нам придётся ввести идею ещё одной, отличной от этой, **актуальной** (т.е. реализованной) бесконечности.

А теперь обратимся к операции обратной сложению — вычитанию. Вполне очевидно, что из произвольного, выбранного нами множества предметов, мы можем удалить некоторое его подмножество. Естественно, это справедливо и для формализованного нами для математики множества, основанного на произвольном эталоне. Операция эта является обратной к операции объединения для множеств. Количество элементов в результирующем множестве будет отличаться от исходного. Для соседних по убыванию множеств одинаковых элементов разница в количествах будет равна единице (одному эталону). Вычесть единицу из множества числом 5 означает удалить из этого множества один элемент. Останется 4 элемента, т.е. число 4. Совершая операции сложения и вычитания, мы концентрируем внимание именно на числах, игнорируя их происхождение как количеств элементов в множествах. Это происхождение никуда не девается, но о нём умалчивается. Потому, что для получения правильных результатов операций с количествами совершенно не важно, что за эле-

менты включены в множества. Достаточно, что одинаковые. А каков конкретный эталон — для сложения и вычитания (и для операций, которые могут быть определены в дальнейшем на основе этих) совершенно не важно.

Равноправны ли две эти взаимно обратные операции? Нет. Если возможность выполнять сложение представляется не имеющей каких-либо ограничений, то по отношению к вычитанию (и удалению вообще) мы этого сказать не можем. Что произойдёт, если мы из множества, имеющего всего один элемент, удалим этот элемент? Что останется? Будет ли результат снова “множеством”? Мы ведь определяем “множество” как совокупность, содержащую элементы, совпадающие с эталоном. Получается, что операция вычитания (удаления) **выводит нас в этом случае из определённой нами совокупности объектов**. Т.е. идея множества оказывается неполноценной, плохо определённой. На опыте мы это делать можем, а определённая нами идея эту ситуацию не описывает. Её свойств недостаточно для описания нашей практики. Выход простой — нужно расширить нашу идею, добавить в неё нужные свойства. Как идею множества, так и идею натурального числа.

Идея множества расширяется добавлением в совокупность возможных множеств ещё одного, специального множества — **пустого**. Пустое множество формализует свойство, противоположное тому, которое мы использовали для определения самого общего типа множеств, противоположное свойству “существование”. Если удалить какой-либо предмет, “уничтожить” его, то он перестанет существовать (приниматься в рассмотрение). Множество таких предметов “пустое”. Оно отличается от всех остальных множеств, оно особенное. Мы уже определили одно специальное множество среди всех возможных — множество, содержащее один элемент. Оно является кирпичиком, из которых построены все остальные. Все, кроме одного единственного, ещё одного специального — пустого множества.

Пустое множество это такое множество, в котором нет ни одного элемента. То есть определение это явно отрицает само существование определения понятия множество. Полезность этого понятия при формализации операций с множествами весьма велика. Что остаётся, когда мы из некоторого конечного множества удаляем элемент за элементом, и, наконец, удаляем последний? Ничего. Вот это “ничего” и носит специальное название “пустое множество”. Добавить его к другому множеству означает “ничего не добавить”. Если добавить пустое множество к пустому множеству что получится? Ничего, снова пустое множество. Важный момент: если взять “больше чем одно” пустое множество, то результатом будет не множество этих множеств, а всего лишь снова пустое множество. **Пустое множество единственно по своей природе**. Пустое множество есть символ отсутствия множества любого другого вида. И только в этом смысле и нужно его по-

нимать.

Ещё стоит добавить, что пустое множество **единственное** не только само по себе, а одно и то же для всех множеств, не зависит от эталона единицы. **Не может быть нескольких пустых множеств.**¹

Так же расширяется и идея числа, количества элементов в множестве. Пустому множеству мы ставим в соответствие специальное число — **нуль**. Число нуль означает, что **элементов, совпадающих с эталоном, определяющим множество, нет**, не существует. И количества, соответственно, тоже нет. Идея натуральных чисел при этом тоже расширяется, и становится идеей **целых положительных** чисел. Целые положительные числа — это натуральные числа с добавлением числа “нуль”.

Однако, даже добавление в идею множества понятия о пустом множестве, и в идею натуральных чисел понятия о нуле, всё ещё не позволяет рассматривать сложение и вычитание совершенно одинаково. Хорошо, мы определили, что остаётся когда мы удаляем из множества последний имеющийся элемент, или вычитаем из единицы единицу. А если нам нужно из множества с двумя элементами удалить три элемента, т.е. из двух вычесть три? Ведь в нашей практике имеются похожие ситуации — например, кто-то взял у вас три яблока и обещал вернуть. Между делом одно яблоко съел. Как он может вернуть три? Два вернул. Останусь должен одно яблоко, говорит он. Сколько у него яблок? Вроде нет вовсе, но ведь одно он должен? Как это **описать**? Напомню, что мы ведь формируем язык для **наиболее точного описания мира**. Здесь мы приходим к идее **отрицательных чисел**.

Заметим, что понятие множества как таковое мы при этом не расширяем. Но добавляем ещё одно, дополнительное, свойство к свойству множества под названием “количество”, “число” (для нас это синонимы). Это свойство мы называем **знак** числа. Мы расширяем одно конкретное множество, множество целых положительных чисел, добавляя в него **все натуральные числа, снабдив их дополнительным знаком минус** и называя их **отрицательными** числами. А положительные отмечаем знаком плюс.

Исторически сложилось так, что для записи всех этих слов, в

¹С пустым множеством следует обращаться очень осторожно. Оно особенное. Я встречал в литературе попытку создать всю теорию чисел из ничего, используя пустое множество как исходный элемент. Логика там такова: Имеется пустое множество. Оно уже имеется, вот вам единица. Добавим ещё одно пустое множество, их уже два — вот и число два. Ну и так далее. И что в этой логике ущербно? Ущербно то, что “не существует” спутано с “существует”. Ущербно то, что одному и тому же элементу в построении приписаны два совершенно разных значения, смысла (причём одновременно!) — пустое множество и нуль, и единица. Есть поговорка: сколько не говори — халва, халва — во рту слаще не станет. Так и сколько к “ничего” на добавляй “ничего” — “ничего” и получишь.

математике (сначала в обыденной жизни, пока ещё математика как наука не оформилась) были приняты определённые знаки. Знаки эти со временем менялись, но сейчас обозначения уже более менее стали всеобщими. Ну, настолько, насколько математика была воспринята людьми разных народов как **общая часть** их языков. Следует ясно понимать, что сами по себе обозначения одних и тех же понятий на письме могут быть выбраны произвольно. Но поскольку они уже кем-то выбраны, мы будем их использовать.²

В настоящий момент множества принято обозначать большими буквами латинского алфавита. Для обозначения операций с ними используются специальные знаки. Я не буду их здесь пока указывать, так как теория множеств, как отдельный раздел математики, стоит в стороне от задач этой книги. А вот обозначения арифметики (для описания операций с числами, количествами), алгебры, и, главное, геометрии будут использоваться в полной мере. Так что они обязательно будут обсуждаться по ходу дела.

Для изображения чисел мы используем сейчас арабские цифры и позиционную систему счисления, основанную на десятках — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... Нуль обозначается знаком 0, единица — 1 и т.д. Для базовых операций арифметики, сложения и вычитания используются знаки + (плюс) и − (минус). Последний знак используется также для записи отрицательных чисел, явно указывая их происхождение — **-1, -2, -3, ...** Знак плюс для записи положительных чисел, как правило, не используется. Хотя в некоторых случаях, чтобы подчеркнуть принадлежность целого числа именно к натуральным, его указывают. Иногда знак ставят даже перед нулём, когда речь идёт не о конкретном числе, а о приближении к нулю со стороны отрицательных или со стороны положительных чисел.

Итак, мы расширили наше понятие о числах до **целых** чисел, включив в него натуральные числа, число нуль и отрицательные числа, как второй набор натуральных, снабжённых специальным знаком (минус). Хотя введение нуля и отрицательных чисел необходимо следует из нашей практики, но всё же, если натуральные числа легко представить зрительно, этого нельзя сказать о нуле и отрицательных числах. Этот недостаток будет легко исправлен в дальнейшем, когда мы ещё больше расширим наше представление о числах и введём понятие **геометрии**. Для целых чисел операции сложения и вычитания являются полностью равноправными и взаимно обратными. Соответственно,

²Обращаю ваше внимание, что здесь мы снова сталкиваемся с возможностью разных описаний одного и того же. **Наличие самой этой возможности пронизывает наше описание мира насквозь, и является одним из главных его формирующих факторов.** Так же как и произвольное, обусловленное только нашим **выбором** ограничение этих возможностей. Напрямую или косвенно.

понятие потенциальной бесконечности расширяется ещё дальше — ведь в целых числах вычитание тоже возможно продолжать без ограничения. Поэтому, можно говорить об **отрицательной потенциальной бесконечности**.

Хочу обратить ваше внимание, что при формулировании идей общего множества, и множеств разных чисел, помимо описания самих объектов мы всё время ведём речь об операциях с этими объектами. В формальной математике часто именно этой стороне любой идеи придаётся основной, формообразующий смысл. Да, то, какие операции (действия) можно производить с теми или иными объектами (частями мира, или идеями) важно. Но для нас при построении физики как описания **реального** мира, а не формальной схемы гораздо более важным является то, что любая составляющая нашего описания, и операции, и сами объекты, должна иметь исходный образ в этом мире. Хотя бы приближённые, не соответствующие формулируемой идее в точности, но вполне понятные примеры должны быть. Как, например, понятие потенциальной бесконечности. Пока для бесконечности мы не имеем точной реализации какой-либо частью мира. Но как **незавершаемый процесс** она нам достаточно понятна. Развитие математики такими рамками себя не ограничивает. И это, в целом, хорошо. Позволяет рассуждать о возможном (да и невозможном тоже). Но пока не появилось примеров реализации тех или иных идей такой (формальной) математики, она остаётся бесплодной, хотя, может быть, и красивой схемой.

Должен сказать, что огромное число таких, чисто теоретических построений, идей, введённых сначала формально, нашли позднее свой образ в реальном мире и стали мощнейшим инструментом для его описания, как в математике как таковой, так и в физике и других, менее точных науках.

2.2 Дискретное и Непрерывное, Бесконечности

Я уже упоминал выше об идеях непрерывного и дискретного, которые связаны с понятиями целого и части. Это идеи полностью самостоятельные. Но хотелось бы понять, как они соотносятся с уже введёнными (описанными) нами идеями множества и целого числа.

В определении множества мы явно говорили о том, что каждое множество при операциях с ним рассматривается как *целостный объект*. И *каждый его элемент тоже целостный объект*, хотя бы уже потому, что единственный элемент, эталон, тоже является множеством. Но *никаких связей, отслеживаемых математикой*, ни между элементами одного множества, ни между множествами не подразумевается. Они не принимаются во внимание. Некоторые простейшие связи реально есть (один

и тот же ярлык, одно и то же свойство декларированное процедурой измерения), но они оставлены сознательно в стороне. Для данных идей не являются предметом рассмотрения.

Таким образом, и идея множества, в том виде как она оформлена, и идея целого числа являются реализациями идеи дискретного. Совокупностей не связанных частей.

Причём, если идея множества может быть дополнена, модифицирована так, чтобы соответствовать идее непрерывного, то идея целых чисел нет. Поэтому именно **свойства множества целых чисел берутся математикой как эталон дискретного множества**. Любое дискретное множество может быть **отображено** на множество целых чисел с помощью следующей процедуры: целые числа рассматриваются не как количества, а как ярлыки, знаки; каждому элементу дискретного множества присваивается ярлык в виде некоторого числа из множества целых чисел, так чтобы не было двух одинаковых ярлыков. Вы легко можете осуществить эту процедуру для маленьких конечных множеств камней, наклеивая этикетки с разными числами на них. Вполне понятно, что это можно сделать вообще для любых дискретных множеств, имея ввиду потенциальную бесконечность, возможность неограниченно добавлять числа в ряд целых.

Дискретные множества могут иметь разные свойства, среди которых для нас важнейшим будет наличие или отсутствие в множестве порядка. Поскольку целые числа по своему определению являются упорядоченным рядом, то сохранение за ярлыком его значения как числа в этом ряду, позволяет описывать порядок в любом упорядоченном дискретном множестве. Независимо от того свойства, по которому этот порядок устанавливается. Достаточно сохранить соответствие между исходным порядком в отображаемом множестве и порядком в числовом ряду. Важно отметить, что при установлении такого отображения, числа как ярлыки всё-таки перестают быть полноценными числами. Их принято в таком случае называть **номера**ми. А само отображение — **нумерацией**. Это новая, самостоятельная идея.³

Номера и нумерация являются очень широко распространённым инструментом в математике. И мы будем их использовать широчайшим образом. Поэтому очень полезно осознавать разницу между числом как номером, и числом как количеством чего-то. Иногда эту разницу весьма сложно заметить. В первую очередь потому, что часто номер совпадает с количеством того подмножества, которое ограничено этим номером. Ведь можно вводить нумерацию именно таким образом, и это всегда очень удобно.

Возникает вопрос — мы расширили понятие натурального числа до целого положительного. А количество таких новых чи-

³Заметьте, мы ввели ещё одну, новую идею, новое понятие — **отображение**. Более подробно это понятие будет описано позже, поскольку оно весьма важно как для математики, так и для физики, нашего описания мира.

сел отличается от количества старых? Вроде бы да, на единицу. Это было бы верно в случае конечного множества. А вот для потенциально бесконечного это вовсе не так. Ведь для него количество отнюдь не простое число, а специально введённое обозначение — потенциальная бесконечность. Есть и символ, используемый при записи этого числа: $\rightarrow \infty$. Состоит он из двух знаков, и вот почему. Слово “бесконечность” обозначается знаком ∞ . Слово “потенциальная” обозначается стрелкой. Это вполне соответствует необходимости констатации наличия **процесса** в этом обозначении. В принципе, в литературе можно часто встретить употребление только знака ∞ , но это может оставлять за собой некоторую неясность, т.к., как далее мы увидим, бесконечностей, нужных нам для описания реального мира, имеется две. К необходимости рассматривать второй тип бесконечности, **актуальную** бесконечность нас приведёт потребность описывать целое как непрерывность. И для этого потребуются расширить понятие числа. Чем мы и займёмся чуть ниже. А пока вернёмся к количествам. Работать с бесконечностями заметно труднее, чем с обычными, конечными числами. Однако, интуитивно довольно легко понять, что добавляя к потенциальной бесконечности любое конечное число, в том числе единицу, мы в этой бесконечности ничего не меняем. Ведь сама возможность неограниченного добавления уже включена в эту идею. Давайте произведём **нумерацию** целых положительных чисел, назвав нуль первым, единицу вторым элементом и т.д. Идея понятна? Мощности (∞) положительных чисел (с нулём) и натуральных совпадают — для каждого положительного числа в натуральных найдётся подходящий номер. Примерно таким способом математики установили, что и все целые (включая отрицательные) числа по мощности эквивалентны натуральным. Бесконечность у них одна и та же. Все такие множества называют **счётными**, фактически указывая, что их элементы можно посчитать, пронумеровать натуральными числами. Можно констатировать и то, что **все дискретные** множества являются счётными.

Давайте теперь расширим понятие числа, опираясь на практику, на наш опыт. Легко видеть, что введённых нами целых чисел для описания нашей практики не достаточно.

Вспомним, что мы очень любим делить мир на части. И части эти снова делить. И снова, и снова. Деление, разделение — это операция. Операция, проводимая нами (или не нами, а самим реальным миром — неважно) над частями мира. Части мира на языке математики мы описываем как элементы множеств и как сами множества. Соответственно, нужно ввести и математическую операцию деления. Для множеств мы уже говорили о выделении в них подмножеств. Что-то от нашего обыденного деления тут есть. Делим множество на элементы. Делим множество на подмножества. В таком делении результирующих множеств может быть несколько и они могут отличаться друг от

друга. Число элементов в результирующих множествах может быть разным, от нуля до количества элементов в исходном множестве. **Но всегда будет целым** числом.

Однако, наше бытовое деление обычно подразумевает нечто немного другое — по умолчанию, когда делим, мы ожидаем что части целого, результирующие множества будут **одинаковыми** по числу входящих в них элементов. Конечно, лиса Алиса может делить так: это мне, это опять мне, это, конечно, мне..., ну а это, так и быть, тебе.

В математике действие **деление, как операция с числами**, определено не по принципу лисы Алисы (такое деление допустимо в теории множеств), а по справедливости — результатом деления числа на части должно быть равенство количества, приходящегося на каждую часть для всех частей. Т.е. операция деления чисел, помимо собственно деления в бытовом смысле, подразумевает сравнение результатов на совпадение.

Такое деление легко и просто производить тогда, когда итогом получаются снова целые числа. Например, два яблока разделить на двоих. А вот как одно, да разделить на двоих или троих? Как мы это делаем? Ножом, на две или три равных части. А в числах как это будет выглядеть? А в целых числах никак, нет для результата соответствия в целых числах. Чтобы описывать такую ситуацию мы вводим новые числа — **дробные**. Новые числа обозначают доли целых чисел. Одна (числитель) вторая (знаменатель), одна третья, три четвёртых — мы используем два целых числа для описания значения дроби. Знаменатель дроби указывает на сколько частей делится целое. А числитель указывает сколько таких частей объединяется для данного конкретного числа. К идее целого числа добавляются дробные и общая идея носит название **рациональных** чисел.

Рациональные числа появляются вместе с определением операции деления и, косвенно, сравнения одного элемента (предмета, или его формализованной идеи) с другим. Операция деления как идея имеет огромное количество примеров в реальном мире. Вместе с этой операцией необходимо рассматривать и обратную ей операцию, которую называют **умножение**. Умножение числа на число сводится к сложению чисел, равных первому, столько раз, сколько указывает второе число. Или наоборот. Результат по определению этой операции будет одинаков. Заметьте — важным моментом опять является косвенное сравнение. Обязательно равных чисел. При чистом сложении складываем мы любые числа. А вот операцию умножения можно рассматривать только как сложение равных чисел. Так же, как операция “деление” подразумевает деление на равные части. То, что это операция, обратная делению, установить легко. Умножение любой дроби на число, которое стоит в её знаменателе (на число частей) очевидным образом является операцией обратной делению на это число, является операцией собирания частей.

В рациональных числах операция умножения определена для всех чисел без исключения. В том числе и для числа нуль. Нуль по отношению к умножению никаких особых свойств не имеет. Сколько пустых множеств не складывай, так и будет пустое множество, нуль. А если эту операцию не делаете “ни разу”, то к чему её не применяй, так ничего и не получите, т.е. нуль. Интуитивно ясно.

А вот с операцией “деление” дело обстоит иначе. Мы первый раз сталкиваемся с невозможностью решить проблему равноправия всех операций по отношению ко всем введённым нами числам. Если для всех отличных от нуля чисел не возникает никаких проблем в их использовании в качестве знаменателей дроби, для указания количества частей, на которые нужно разделить другое число, то нуль в этом качестве употреблять **запрещено**. В арифметике рациональных чисел. То есть в множестве рациональных чисел со всеми определёнными для него операциями. В качестве числителя — пожалуйста. “Ничего” можно делить на любое число частей, “ничего” и получим. А вот что значат “ни сколько” частей? Нет ответа.⁴

Для записи всех наших идей об операциях с числами мы используем определённые знаки, иногда больше одного для одних и тех же операций. Да и для записи дробных чисел широко употребительны, по крайней мере, две разных формы. Приведу здесь эти знаки и формы записи.

- Равенство чисел (=): $1 = 1$.
- Сложение (+): $1 + 2 = 3$.
- Вычитание (-): $2 - 1 = 1$, $1 - 2 = -1$, $3 - 3 = 0$.
- Деление (: или /, где сперва идёт числитель, а потом знаменатель; или горизонтальная черта, над которой ставится числитель а под ней знаменатель): $4 : 2 = 2$, $1 : 2 = 1/2 = \frac{1}{2}$. Есть ещё специальная запись для деления столбиком, но она в этой книге употребляться не будет, поэтому я её не привожу.
- Умножение (\cdot или * или \times): $2 \cdot 3 = 6$, $3 * 3 = 9$, $4 \times 2 = 8$. Если вместо чисел используются буквы (а они используются очень часто для обозначения **переменного** или любого числа, об этом мы будем подробнее говорить позже),

⁴Можно доопределить множество чисел, в котором обычно запрещено деление на нуль так, чтобы это стало возможным. Но дело это очень деликатное. В первую очередь потому, что способов доопределения больше чем один, и все они обязательно выходят за рамки непосредственной проверки практикой. В дальнейшем мы будем использовать один из таких методов доопределения. Конечно при этом будут указаны как причины выбора конкретного метода, так и ограничения его применения, вместе с описанием той идеи, которая в него вложена.

то тогда, когда не возникает потери смысла записи, знак умножения вообще может отсутствовать: $2a$ — означает, что число a , конкретное значение которого в данный момент не существенно, умножается на 2.

Полезно также специально остановиться подробнее на уже упоминавшейся выше операции сравнения, которая особую роль приобретает в физике, как основа всякого, позволяющего проверку экспериментом, описания мира. А другие описания (не позволяющие проверку экспериментом) мне здесь и не интересны. Операция сравнения выполняется нами весьма часто. И в быту, и в науке. Однако в науке она формализована до предела и сводится лишь к отношениям вида: что-то может быть больше (знак $>$), равно (знак $=$) или меньше (знак $<$) чего-то другого. Кроме того, возможно уточнение этих простых соотношений в случае отсутствия равенства — во сколько раз одно больше (меньше) чем другое. По сути дела, то самое идее образующее понятие множества — его мощность, количество элементов (точек) в множестве — и появляется как результат этой операции сравнения. И понятие числа, естественно, тоже. Один момент, очевидный для бытового языка и утерянный математиками, я хотел бы ещё раз подчеркнуть в этой связи. По большому счёту, **сравнивать мы имеем право только однородные сущности**. Например баранов с баранами, а столы со столами. Только в этом случае результат будет иметь смысл. Однако, в бытовом языке мы можем иначе расставить акценты и сравнение казалось бы несравнимых сущностей может приобрести смысл. Например, если нас интересует только свойство предмета, объекта быть, существовать, иметься (то самое, которое мы выделили как самое базовое, начальное свойство-понятие), то по этому свойству можно сравнивать любые предметы. Скажем, вопрос — “сколько всего предметов в коробке?” — вполне осмысленный для совершенно произвольного набора самых разных предметов. К сожалению, сегодня математика полагает, что она опирается только на это, предельно очищенное от всех остальных оттенков, возможных в реальном мире, понятие и поэтому совершенно не придаёт значения указанному выше ограничению на применимость операции сравнения. А ведь все числа в математике, когда она используется как язык для описания реального мира, безо всякого исключения есть результат применения именно этой операции. И при использовании таких числовых описаний применительно к разным явлениям реального мира забвение происхождения самих чисел может стать фатальным. В экспериментальной физике число появляется в результате процедур подсчёта объектов мира или в результате измерения, т.е. сравнения одного объекта с другим. Здесь мы и подсчёт предметов уже включили в понятие измерения как частный, простейший случай, как должно быть понятно из сказанного на эту тему выше. Измерение, как законченная

процедура (когда она может быть закончена), даёт в результате рациональное число, а целые числа, результат подсчёта, являются подмножеством, частным случаем рациональных чисел.

Остановимся подробнее на рациональных числах, рассматриваемых именно как результат измерения одного объекта другим. Очень долгое время существовало убеждение, что отношение двух любых однородных объектов всегда можно выразить именно рациональным числом. Т.е. полагали, что существует такая пара целых чисел, что это отношение можно записать с их помощью. Например, $1 : 2$, $2 : 3$ и т.д. В этом смысле процедура измерения в части определения такого отношения **всегда завершаема, правильный выбор единицы измерения позволяет закончить процедуру сравнения за конечное число шагов**. Поясню, что я имею в виду. Пусть знаменатель искомого отношения (дроби) равен n , а числитель k , где n и k любые натуральные числа (т.е. не нуль и не отрицательные). Выберем вместо первоначального предмета, с которым мы сравнивали другой (назовём этот предмет масштабом или единицей измерения) его n -ую долю. Отношение старого масштаба к этому новому можно записать целым числом n . Но и отношение того предмета, который мы измеряли старым масштабом к новой единице измерения тоже будет записано целым числом, равным $k * n$. Т.е. **сформулированное выше убеждение можно переформулировать как следующее утверждение: для любых двух однородных предметов (частей реального мира) можно найти такую их долю, что отношение обоих предметов к ней будет выражено натуральными числами.**⁵

Убеждение это оказалось неверным. Насколько мне известно, первым это обнаружил Пифагор (или его последователи). Рухнуло это убеждение при попытке измерять отрезки прямых линий другими отрезками. Т.е. там, где наша интуиция предполагает наличие непрерывности. Оказалось, что сделать это для гипотенузы и любого из катетов в прямоугольном треугольнике, катеты которого равны друг другу, невозможно. Сегодня это открытие расценивают как первый кризис математики. Оно позволило увидеть, что в реальном мире имеются примеры реализации идеи актуальной бесконечности, реализованной потенциальной бесконечности, бесконечного процесса, доведённого до конца. **Не нами. Реальным миром, его частями.**

Понятие, которое позволяет говорить о реализации актуальной бесконечности является формализацией, идеализацией множества опытных данных, которые мы объединяем в представлении о непрерывных объектах, все части которых связаны

⁵Отметим, что этот пример ясно показывает, что понятие рационального числа генетически связано с объединением целых чисел в пары и операцией их сравнения. Математики часто делают акцент на такой форме определения рационального числа. Но нам здесь важнее опираться на наш практический опыт, а не на освобождённую от него формальную схему.

друг с другом. Это не означает, что такие объекты вообще нельзя делить на части. Это возможно, и, более того, это возможно продолжать и для любых получающихся при таком делении частей. **Все части, получающиеся в результате деления непрерывного множества на конечное число частей, сами остаются непрерывными множествами.** То, что процесс деления можно продолжать потенциально бесконечно и является основным, определяющим свойством самого представления о непрерывном. Простейшими примерами реализации непрерывности являются такие предметы реального мира как верёвка, струна, нить и подобные им.

Хочу подчеркнуть вторую сторону непрерывности, на которую обычно не обращают внимания. Идея непрерывности, если её предельно формализовать и очистить от частных её проявлений, может быть ещё оформлена как **идея связи, связности** частей реального мира. Вот в каком смысле. Идея непрерывности как свойство предмета быть бесконечно делимым без утери этого свойства может показаться не соответствующей реальному миру, если принять во внимание, что все имеющие массу покоя массивные тела являются чётко отделёнными от остального мира частями. Хотя и здесь вполне можно апеллировать к представлению о линии существования любого такого тела. Правда нужно будет разбираться со смыслом утверждений квантовой механики об отсутствии вполне определённой траектории для самых малых таких тел, таких, как электрон. **Но и там остаются причинно-следственные связи между событиями.** Чтобы здесь не вдаваться в эти подробности, обращаю ваше внимание на другое (не связанное с наличием массы покоя) проявление связей между частями реального мира. Я имею в виду те проявления таких связей, которые называют полем. Например, электромагнитным полем. Да, зрительно продемонстрировать такие связи как линейные, поверхностные или объёмные образования напрямую невозможно. Можно только с помощью вторичных их проявлений (например, опилки выстраиваются вдоль “силовых” линий). Но демонстраций наличия этих связей между, например, двумя магнитами, великое множество. И вот эти-то связи тоже являются реализацией идеи непрерывности. Непрерывность как идея всеобщей связности мира выступает также как оформление представления о мире как едином целом. Таким целом, в котором имеются самые разные части. Части разные, отделимые определённым образом друг от друга, но при этом взаимосвязанные. *Что с миром не связано (не связано ни с какой частью мира), того в мире и нет.* **Наш мир как целое не может состоять из нескольких не связанных кусков.** Чисто дискретное множество частей не может рассматриваться как удовлетворительное описание мира. Чтобы описать мир как целостность, нам необходимо иное понятие, иная идея, которую мы назвали непрерывностью. Эта идея необходимо также включает в себя и дискретное,

хотя бы как совокупность произвольно выбранных частей.

Идея множества модифицируется так: к уже описанным **добавляется новое свойство**, позволяющее включить в себя и навязываемую нам практикой идею непрерывности. Новое, непрерывное множество ещё называют **континуумом**.

Новое свойство, о котором идёт речь, называют “**длиной**”, “**расстоянием**”, “**размером**”, “**мерой**”. Ещё я буду употреблять название “линейная мера” для простейшего варианта этого свойства. Как ясно видно из названия, свойство это связано со сравнением по новому качеству двух (или более) непрерывных множеств. То есть опять мы напрямую опираемся на понятие измерения, только уже более сложное, чем просто подсчёт элементов множества. Как мы увидим далее, с любым непрерывным множеством мы по определению связываем бесконечное число элементов. И в то же время, мы допускаем, что два или более непрерывных множества вовсе не обязаны быть эквивалентны. Мы просто знаем это из опыта, что так оно и есть. Вот эта разница и описывается новым, дополнительным понятием “величины” множества, его “размера”, “меры”. Оно не связано напрямую с количеством элементов в множестве, и, однако, является новой формой определения, какая непрерывность больше, какая меньше, а какие непрерывности равны. В наиболее общей форме это понятие называется **мерой** непрерывного множества. У него тоже имеется ряд (потенциально бесконечный!) градаций:

Единственная, “линейная” мера, “длина” для непрерывных множеств, прототипом которых являются различные линии, тем или иным способом реализованные частями реального мира.

“Площадь” как комбинация двух линейных мер для непрерывных множеств, возникающих как идеализация примеров разного рода поверхностей.

И т.д., с увеличением числа линейных мер, требующихся для идеального описания всё новых и новых образцов непрерывностей.

Всё это я буду подробно обсуждать ниже. Здесь же я обсуждаю понятие меры только для того, чтобы акцентировать ваше внимание на том, что именно это новое качество, введённое как определение, и отличает непрерывные множества от дискретных. После того, как мы определили меру как именно такое качество, мы можем распространить это понятие и на дискретные множества, присвоив им значение меры “нуль” — фактически отсутствие этого качества, в полном соответствии с понятием нуля как образа пустого множества, “не существования”.

Начнём с обсуждения простейшего случая меры, простейшего вида непрерывности, такого множества, которое можно характеризовать всего одной “длиной”, простейшей, “линейной” мерой.

Математиками разработано много разных способов для работы с континуумом средствами, естественным образом определёнными для дискретных множеств. По необходимости, все они

опираются на понятие **реализованной потенциальной бесконечности**, т.е. **актуальной бесконечности**. В первую очередь, таким понятием в математике является понятие предела.

Это самостоятельная идея, позволяющая перебросить мостик от дискретного к непрерывному. Не следует думать, что при этом переход от дискретного к непрерывному становится определённым только в терминах свойств дискретных множеств. Нет, *это только способ сформулировать, обозначить превращение потенциальной бесконечности в актуальную*. Опираясь на операции деления и сравнения.

Понятие предела, предела последовательности, вероятно впервые оформилось именно как формализация представления о возможности измерения некоторых отрезков прямых, соотношение которых с выбранной единицей измерения не может быть выражено рациональным числом. Опора делается на подбор двух рациональных чисел, одно меньше, а другое больше искомого соотношения, так, чтобы разница между этими рациональными числами всё время уменьшалась. Это создаёт убеждение, что искомое число точно существует, ведь оно “где-то между этими двумя рациональными числами”, причём всё более близкими. Хотя кусочек между ними всё так же остаётся кусочком непрерывности.

Легко увидеть, что если мы будем дробить единицу измерения, скажем на десять более мелких равных единиц, и повторять эту процедуру бесконечное число раз, то всегда можем получить две бесконечных последовательности (две потенциальных бесконечности), суммы которых будут одна всегда меньше измеряемого отрезка, а вторая больше. Причем разница между двумя этими суммами всегда, на каждом шаге будет равна выбранной для шага единице длины отрезка. А единица эта (кусочек непрерывности!) будет всё меньше и меньше, по сравнению с начальной. В этой процедуре мы рассматриваем четыре отрезка: Один, длина которого принимается за единицу. Второй, который мы хотим измерить этой единицей, т.е. сравнить длины этих отрезков и поставить в соответствие получившемуся результату некое число. И ещё два служебных отрезка, на каждом шаге процедуры сравнения разных. Один, имеющий длину меньшую измеряемого на одну текущую единицу измерения, и при этом выраженную рациональным числом. И второй, на текущую единицу измерения (текущую долю начальной единицы) больше этого, а также просто больше чем измеряемый отрезок, и тоже имеющий длину, выраженную рациональным числом. Такое соотношение между четырьмя отрезками явным образом убеждает нас, что *если бы мы были в состоянии продолжать эту процедуру бесконечное число раз*, то результат был бы конечным, поскольку он заключён между двумя, сколь угодно близкими (длина новых единиц становится всё меньше и меньше исходной длины отрезка, принятого в начале за единицу измерения) рациональными числами.

Это убеждение имеет основание в нашем опыте и иных доказательствах не требует.

Его можно сформулировать так: Пределом последовательности длин отрезков, получаемых в результате деления одного исходного на целое число частей, одинаковое на каждом этапе, при количестве этапов равном реализованной бесконечности, является “отрезок” нулевой длины.

Результат, такого, **завершённого** измерения, как число, является образом актуальной бесконечности и получил название **иррационального** числа. Конечно речь о том случае, когда ни на каком этапе не удаётся получить точное совпадение с одним из пары рациональных чисел, охватывающих искомое отношение. Соответствующее место в непрерывной линии (в данном случае это конец измеряемого отрезка) можно назвать **точкой**, той сущностью, из которых состоит сама линия или *элементом, из которых состоит непрерывное множество, континуум*.

Важно! Для континуума как множества, его элемент, точку мы определяем как итог бесконечного процесса уменьшения меры выбираемых из него частей, непрерывных подмножеств. Иного определения для точки континуума мы не имеем.

Ясно, что такая процедура измерения позволяет также соотнести с некоторыми точками линии и все рациональные числа. Но между соседними рациональными числами (при заданном знаменателе, том числе, на которое единица измерения, выбранная на данном этапе делится для получения единицы измерения для следующего этапа) всегда имеется непрерывный отрезок, где имеются другие точки, которые придётся ассоциировать с иррациональными числами. Побочным следствием этой процедуры возникает понимание того, что **в сколь угодно малом отрезке непрерывной линии всегда имеется бесконечное (актуально бесконечное) число таких точек**. Ещё одним побочным следствием возникает понимание, что с помощью такой процедуры измерения на **любом** отрезке прямой можно разместить (поставить в соответствие её точкам) некоторую часть множества рациональных чисел. А если измерять неограниченную прямую, а не её отрезок (с помощью отрезка любой выбранной длины!), то всё множество рациональных чисел можно поставить в соответствие части множества точек прямой.

Объединение всех точек неограниченной прямой будет соответствовать объединению множеств рациональных и иррациональных чисел, которое называют множеством **действительных чисел**. Действительные числа имеют ещё одно название — **вещественные** числа. Именно множество этих чисел и становится эталоном, опорным для описания всех непрерывностей. Как множество натуральных для дискретных множеств. **Множеству точек, составляющих непрерывность, с помощью процедуры измерения (её идеи, подразумевающей бесконечное число**

шагов возможным) мы ставим в соответствие множество действительных чисел. Важно понимать, что эти понятия просто описывают некоторые свойства реального мира, а не выводятся из применённой процедуры.

Опираясь на процедуру измерения, которая производит отображение непрерывной линии на множество действительных чисел, мы также вводим некоторое **стандартное** понятие, которое очень часто используется в математике. Понятие **числовой прямой**. Числовая прямая возникает для **произвольного, любого** способа отображения линии на действительные числа. Любая процедура измерения даст один и тот же результат — “числовую прямую”. Поэтому математика для определённых целей вполне может позволить себе забыть на время о необходимости связывать с числами упоминание о том, каким единицам измерения они соответствуют. Для чисел с числовой прямой единица измерения “любая”, что в математике трактуется как отсутствие размерности, т.е. отсутствие нужды о ней помнить.

Здесь идея множества, которая появляется из простейшей идеи существования, расширяется. Все свойства определённых ранее множеств в ней присутствуют. Добавлены новые свойства. По этим свойствам множества можно различать: дискретные и непрерывные, континуумы. Свойства эти не сформулированы одним словом, они формализуют набор свойств специальной процедуры, которая реализует примеры новых типов множеств в реальном мире. В физике эту процедуру называют процедурой измерения длины. Это довольно сложный набор операций, который включает в себя детализацию операций выбора, сравнения, деления и может сам рассматриваться как реализация комплексной операции создания отображения одного множества на другие. Один из таких образов, одно такое множество является, по сути дела, становым хребтом математики, да и физики тоже. Это множество действительных чисел. Но нужно помнить, что доступные нам процедуры измерений являются только исходным образом, позволяющим сформулировать эту идею, идею действительного числа. Иррациональное число является именно идеей, т.к. практическое завершение любой процедуры измерения всегда оставляет нас с рациональным числом, являющимся всего лишь приближением к иррациональному (сверху или снизу). Настоящей, точной реализацией иррационального числа может быть только набор из двух несоизмеримых отрезков линии. Например, гипотенуза и катет в прямоугольном треугольнике с равными катетами. Или длина окружности в сравнении с её радиусом.

Процедура измерения в её простейшем варианте была определена нами ранее при формализации понятия о дискретных множествах. То новое, что появилось, стало следствием уточнения свойств этой процедуры, её обогащения. Процесс этот не завершён. Для нового типа множеств появляются дополнительные

возможности. Например, помимо выбора базовой единицы измерения, масштаба, можно выбирать и тот элемент континуума, которому будет поставлен в соответствие такой элемент множества действительных чисел как нуль. Появляется возможность выбирать **начало отсчёта** на непрерывном множестве. Можно выбирать также и **направление отсчёта** на непрерывном множестве, которое будет считаться положительным. И направление, в котором числа будут считаться отрицательными. И это позволяет получить хорошую визуальную иллюстрацию для понятия отрицательного числа. Да и для нуля тоже — нуль начальная точка (любая на прямой!), расстояние которой **до самой себя** равно “ничему”. Отрицательные числа это те, расстояние до которых измеряется в одну (обычно, левую на рисунке прямой) сторону от нулевой точки (точки отсчёта), а положительные — в другую сторону, противоположную. Появляются также возможности рассматривать континуумы числа измерений большего, чем одно. И многое, многое другое. Отсюда вырастают колоссальные ветви **геометрии, теории групп, алгебры** и многие другие. Идеи, их наполняющие, где-то обособляются, где-то пересекаются вплоть до полного совмещения, становясь разными диалектами языка, говорящего об одном и том же.

Вот к описанию важнейшего для нас понятия **геометрия** мы и переходим.

2.3 Геометрия синтетическая и аналитическая

Геометрия, как понятие, появилась очень давно, для удовлетворения наших практических потребностей. О смысле этих потребностей говорит само название — в переводе с древнегреческого оно означает измерение земли. **Обратите внимание — измерение!**

Развитие этого понятия было очень долгим (помимо всего прочего и изменение понятия числа связано с развитием геометрии). Множество мыслителей и практиков приложили свои усилия для его развития. В определённый момент, ещё до нашей эры, понятие это было оформлено в красивейшую систему взглядов.

Более двух тысяч лет геометрия, изложенная в “Началах” Евклида (в этот труд входят больше десяти книг, и, вероятно, не все они написаны собственно Евклидом, но известны они именно под его именем), оставалась примером изложения этой науки. И сегодня в школе, когда мы впервые знакомимся с геометрией как наукой, изложение, по сути дела, базируется на тех же принципах, хотя и переложенных на современный язык.

Что в этих принципах главное? Речь идёт об основополагающих идеях геометрии — геометрических фигурах, плоских и

пространственных, их взаимоотношениях.

Среди фигур выбраны основные:

- плоскости;
- прямые линии (вырожденные плоскости, не имеющие такого свойства как *площадь*);
- их отрезки, характеризуемые определённой *длиной*;
- вырожденные отрезки — точки — т.е. *отрезки, длины не имеющие*, концы которых совпадают;
- углы между прямыми линиями.

Предметом геометрии являются также и кривые линии, в первую очередь всяческие дуги, кусочки окружности произвольного радиуса (включая, естественно, полную окружность). Дуги не являются полностью самостоятельными элементами геометрии. Они рассматриваются как геометрические места точек, занимаемых концом отрезка определённой длины при его вращении вокруг точки, в которой закреплён второй конец отрезка (отрезок в таком случае называют радиусом).

Вращение, как одна из операций с основными элементами геометрии, напрямую связано с понятием одного из этих элементов, с понятием угла.

Помимо основных элементов, важнейшей составляющей геометрии Евклида являются **движения**, причём непрерывные — движения точек порождают линии, движения линий порождают поверхности, движения поверхностей порождают трёхмерное пространство. Пересечения поверхностей порождают трёхмерные тела и снова линии и точки. А пересечения линий порождают фигуры, отрезки линий и точки.

Типичным рассуждением евклидовой геометрии является такое: “... Имеем два угла, образованных двумя прямыми. *Совместим* их вершины. *Совместим* одну из сторон каждого из углов. Тогда, если углы равны, вторая сторона одного из углов *пойдёт* по второй стороне другого угла, т.е. и вторые стороны *совместятся*. Или наоборот, если вторые стороны тоже *совместятся*, то углы равны.”

Обратите внимание на то, что понятие “движение” в евклидовой геометрии, хотя и опирается на наше интуитивное представление о движении (чего-то относительно чего-то), но на самом деле ему в точности не соответствует. Бытовое понятие о движении связано с понятием времени. Движение в геометрии Евклида со временем никак не связано.

В качестве **величин** базовых геометрических элементов, помимо длин, рассматриваются ещё **площади** плоских фигур, ограниченных указанными выше основными элементами (отрезками,

дугами, точками). И **объёмы** трёхмерных тел, также ограниченных плоскостями, отрезками, точками, дугами, и поверхностями, получаемыми в результате вращения основных элементов вокруг точек или прямых. Рассматриваются и всевозможные отношения между отрезками, углами, фигурами и телами, и их длинами, величинами углов, площадями и объёмами. Все эти величины описываются числами. Но, надо сказать, в большинстве своём, конкретные числа для построения утверждений геометрии не важны. Как правило, утверждения эти не зависят от выбранных единиц измерения. (Математика всё время стремится к такой независимости! Правда, не всегда ей это удаётся.)

Между базовыми элементами, к которым отнесены прямые, точки и углы, приняты без всякого доказательства, как заведомо выполняющиеся утверждения, некоторые соотношения — а именно пять знаменитых **аксиом** Евклида.

Все геометрические построения служат для того, чтобы на основании этих аксиом вывести все прочие соотношения между геометрическими элементами. Эти построения называют **теоремами**. Построения включают в себя чертежи (наглядные образы) как основу доказательств теорем, и рассуждения, их поясняющие.

Важнейшим фактором завораживающего влияния этого великодушного здания евклидовой геометрии на всё развитие математики, как науки, на протяжении тысячелетий была именно ограниченность фундамента всего этого построения всего лишь пятью аксиомами. Сами основные элементы геометрии очень долгое время много внимания к себе не привлекали, так как их понятия казались настолько очевидными, что дополнительного осмысления не требовали.

Хочу обратить ваше внимание на одну из сторон евклидовой геометрии: *В большинстве своём её рассуждения и построения оперируют базовыми элементами как цельными сущностями.*

И не только с базовыми элементами обращаются таким образом. Построенные с их помощью фигуры и тела для евклидовой геометрии также очень часто представляются как нечто цельное — треугольники, окружности, пирамиды, цилиндры и т.д. и т.п.

Такой подход получил название “синтетического”. А “геометрии” (математические конструкции, базирующиеся на аксиомах, подобных Евклидовым, или в чём-то отличающихся), построенные по такому же правилу (или использующие такой подход в большинстве случаев, по крайней мере, во всех случаях, когда это возможно) часто называют **синтетическими**. Основной упор делается на свойства фигур, тел и пр. Как цельных, хотя и различающихся в общем случае, объектов. Конкретные числа при этом играют лишь вспомогательную роль. Измерение, как процедура, производящая числа (и лежащая в основе геометрии), остаётся вне интереса геометрии, как нечто присутствующее неявно.

Взгляды на геометрию, базирующиеся на таком подходе были фактически довлеющими, начиная с древних греков до начала семнадцатого века, когда Р.Декарт сформулировал совершенно иной подход к геометрии — **аналитический**. Кстати, именно ему мы обязаны также и объединением иррациональных чисел с целыми в единое понятие вещественного числа, и полноценным рассмотрением в этом ряду отрицательных чисел, с изображением их как измеряемых от точки отсчёта в направлении, противоположном выбранному положительному. Декарт явно сформулировал метод, который является ключевым для того описания мира, которое мы здесь пытаемся построить. Этому методу мы далее будем уделять основное внимание, освещая его свойства с самых разных сторон, указывая как они проявляются в нашем описании, в самых, казалось бы, неожиданных местах. Здесь же я хочу коснуться только самых общих моментов методов аналитической геометрии, без их существенной конкретизации.

Понятно, что метод предложенный Декартом, не совпадает в точности с теми подходами к изложению аналитической геометрии, которые используются сейчас. В развитии этого метода участвовали с тех пор многие выдающиеся учёные. Ряд названий сегодня, например, слова — **абцисса, ордината, координаты** — появились в конце семнадцатого века в трудах Лейбница. Однако вклад именно Декарта невозможно переоценить. Все основные идеи метода были рассмотрены уже им. После оставалось уточнять их, развивать, делать более удобными для применения и т.д. Достаточно сказать ещё, что даже обозначения численных коэффициентов в соотношениях буквами, стоящими в начале латинского алфавита (a, b, c, d, \dots), а неизвестных — буквами (x, y, z), как это делаем сейчас мы, ввёл тоже Декарт, как и многое, многое другое. Ясно, что и Декарт работал не в одиночестве. Многие и до него рассматривали другие мыслители. Но только он свёл их частные работы в систему и обогатил своим пониманием мира.

Однако, поскольку нас интересует существо дела, а не точность истории вопроса, я ограничусь сейчас только описанием основных идей аналитической геометрии. Таким образом, как считаю полезным для понимания моей системы взглядов на мир. Пока самое основное. Детализации будет посвящено дальнейшее изложение.

Главным шагом в формулировке аналитического подхода к геометрии, на мой взгляд, является установление связи двух миров идей — мира линий и точек с миром чисел, вместе с естественным объединением имевшихся к тому времени разновидностей чисел в единый ряд вещественных и предоставлением этому ряду ясного геометрического образа — числовой прямой, с отмеченной на ней точкой — началом отсчёта. И явно сформулированной идеей направления отсчёта, связанной при этом с понятием знака числа. Причём, сделано это с явным упором на

процедуру измерения. Вот слова Декарта:

“... Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. ...”

Оригинальный текст (лат.):

“... Per Numerum non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem quae pro unitate habetur rationem intelligimus. ...”

Что это как не прямое указание на необходимость проведения процедуры измерения? Правда, тут же её удаляют из поля зрения математики словом “отвлечённое”. То есть измерение обязано проводиться, но *до нашего рассмотрения числа, как объекта математики*. Как именно выбирается единица нам для дальнейшего не важно.⁶

Этим две ветви дерева математики, уже довольно далеко ушедшие друг от друга, были снова увязаны в единое целое. С помощью алгебры стало возможным решать геометрические задачи, и наоборот, геометрия помогала решать задачи алгебраические.

Один из основных элементов геометрии, точка, получил описание не просто как отвлечённая идея, а как идея **связанная** с другими элементами геометрии — линия стала геометрическим местом точек, характеризующихся определённым числом, имеющим смысл расстояния до некоторой другой точки, взятой за начало отсчёта. И точки, внешние для прямой, точки плоскости, стало возможным описывать таким же, естественным образом, с помощью расстояний до выделенных пересекающихся прямых, принятых за систему отсчёта на плоскости, с началом отсчёта в точке их пересечения. Аналогично в пространстве — с добавлением в систему отсчёта третьей базовой прямой, тоже проходящей через единственную точку начала отсчёта. Стало возможным сформулировать идею координат всех точек, как совокупности этих расстояний. И понятие системы координат через описание начала отсчёта и базовых прямых. Более того, стало возможным легко расширить это понятие на более общие системы координат. Ведь все необходимые для описания точки черты представлены явно, и видны возможности изменения каждого из необходимых свойств.

В частности, открыт путь для обобщения понятия числа измерений, как качества, отличающего основные элементы геометрии — точки (нуль измерений), линии (одно измерение), поверхности (два измерения), трёхмерные пространства.

У точки нет никакого качества, свойства, которое присут-

⁶ А вот при применении математических методов к физике, да и для лучшего понимания некоторых свойств самой геометрии тоже, это ой как важно. Но об этом позже.

ствуется у линий, поверхностей, и т.д., и которое можно называть её мерой. Мера линии это “длина”. Мера поверхности — “площадь”. Если нам и потребуется далее для общности снабдить точку понятием меры, то мы будем вынуждены приписать ей меру “нуль” — отсутствие меры. Отдельные точки можно только считать, или описывать их с помощью фиксации положения относительно других точек. А для этого требуется использовать уже другой элемент геометрии, отрезок прямой.

Отрезок прямой имеет свойство, качество, отличающее его от точки — то, что мы назвали “длиной”. Эта мера отрезка, длина, может быть использована для установления расстояний между точками и приписывания им координат. В самом простом случае длина это расстояние между концами выбранного отрезка прямой. Важным моментом становится и тот факт, что любой отрезок прямой своим существованием реализует рассмотренную нами ранее актуальную бесконечность. Какой малой не была бы его длина (лишь бы это был отрезок, а не точка), всё равно на нём уместается бесконечное число точек. Поэтому мера отрезка линии является совершенно новым качеством её, отличным от количества точек на этом отрезке. Смысл введения этой меры состоит в том, что нам необходимо как-то описать имеющееся в реальном мире различие между двумя отрезками линии, количество точек на которых совпадает в смысле мощности множеств, которая равна актуальной бесконечности как для любых отрезков, так и для полной прямой. Вот такое новое понятие, позволяющее оперировать с актуальными бесконечностями, которые в определённом смысле совпадают, а в другом смысле различны. Это не противоречие между свойствами реального мира, это наш способ описывать эти свойства. Констатация того, что наше понятие о бесконечностях тоже можно и следует уточнять, добавляя к нему новые стороны, новые качества. В данном случае, это понятие меры.

Мера счётного множества, пусть и потенциально бесконечного, равна нулю по определению. А у непрерывного множества, реализующего актуальную бесконечность, появляются разные ненулевые меры, в зависимости от некоторого, дополнительного свойства, которое приписывается каждому данному континууму — в зависимости от количества его измерений.

Поверхность (плоскость) с точки зрения количества точек не имеет такого качественного отличия от непрерывной линии (прямой), как линия от точки. Различие количественное в определении меры для этого континуума, причём конечное — для описания всех точек поверхности **удобно использовать два расстояния, два измерения, две координаты**. Для плоскости, как континуума двух измерений, вводится своя мера, отличающаяся от меры на линии. Её называют “площадью” участка поверхности. Мера эта, как и в случае длины линии, является новым качеством объекта, не связанным с количеством точек, состав-

ляющим данный объект как множество. Математикам удалось показать, что точек на линии столько же, сколько и в поверхности — всё та же актуальная бесконечность. Это может показаться странным, но представьте себе непрерывную линию, заполняющую квадрат, начиная с левого верхнего угла. Сначала слева направо, при достижении границы смещается “на толщину” линии вниз и идёт влево. Достигая границы снова поворачивается, смещается ниже и идёт вправо, т.д., до достижения правого нижнего угла. Для реальных линий, имеющих некоторую толщину, таким образом заштриховать любой квадрат легко и просто. Идея линии толщины не имеет. Но вспомним, что в нашем распоряжении имеется две идеи, две бесконечности — процесс можно повторять потенциально бесконечно, и бесконечное число не имеющих размера точек (в данном случае, не имеющих толщины линий) вполне себе заполняет любой конечный отрезок. Так и линия заполнит этот квадрат. Важно, что число точек в этой линии достаточно для заполнения квадрата. Актуальная бесконечность поверхности не превышает актуальную бесконечность линии. Длина линии ведь точно также растёт. Это идея демонстрации того, что, в принципе, каждой точке плоскости можно поставить в соответствие единственное действительное число. Точно также и для трёхмерного куба, и для пространств большего, но конечного числа измерений. Другое дело, что такой способ обозначения точек многомерных пространств является крайне неудобным, да и практически не реализуемым. В первую очередь из-за того, что процесс обозначения даже для такой простой части поверхности, как квадрат, должен быть потенциально бесконечным. Для нас эта бесконечность является недостижимой идеей. А с помощью двух измерений всё делается вполне обозримым. Кроме того, имеются вполне понятные иные причины намеченного выше подхода (увеличения числа используемых расстояний, координат). На них мы остановимся ниже, в соответствующем месте.

Эту линию развития, увеличения количества **независимых** координат, расстояний, чисел, используемых для описания положения точки относительно других точек, увеличение мерности, потенциально можно продолжать бесконечно. Таким образом, появляется идея пространства произвольного числа измерений.

Есть и другие пути развития геометрии, которые мы будем описывать позже.

Сейчас подчеркну лишь ещё раз одно из важнейших отличий аналитической геометрии от синтетической, объясняющее наш выбор в пользу этого метода для описания мира. Синтетическая геометрия работает с цельными сущностями. Но это всё равно некоторые части мира. Причём связи между ними, в общем случае, не отслеживаются — тела, фигуры, прямые, точки не связаны друг с другом. Они сравниваются, но сравнения эти абстрактные. Их движения рассматриваются, но движения эти

сами являются абстракцией, идеей реальных движений, которая соответствует отнюдь **не всем возможным** примерам движений из реального мира. У тел, фигур и пр. в евклидовой геометрии нет прямой привязки к реальному миру. Это не более, чем идеи. Причём **идеи вполне определённых частных случаев** предметов, имеющихся в реальном мире. А именно, это некие, отвлечённые **образы твёрдых тел**, свойства которых полагаются не зависящими ни от места, ни от времени. Ни от чего. Однако, это отнюдь не так для прототипов этих идей, реальных твёрдых тел.

Получается, что невозможно объединить эти элементы в единое целое для описания хотя бы не слишком большой части мира, включающей прототипы этих идей. Невозможно (или, по крайней мере, затруднительно) также и использовать эти элементы для дальнейшего деления мира на части.

А аналитический метод свободен от всех этих недостатков, и, кроме того, предоставляет явные и ясные методы расширения своих возможностей, возможностей перехода к всё более общему и общему описанию мира. Как мы увидим далее, на этом пути можно попытаться описать все свойства реального мира. А также понять, с чем связан выбор той или иной формы, идеи для описания того или иного свойства.

2.4 Определения (конструкции) против аксиом

Прежде чем продолжить главную линию развития необходимых нам идей, описания аналитической геометрии в деталях, остановимся на обсуждении метода их формулирования. Геометрия Евклида сделала на долгое время главной линией в развитии математики стремление сделать её (математику) аксиоматической. Во главу угла ставится некоторый, по возможности ограниченный, набор аксиом, которым подчиняются рассматриваемые объекты. И далее строится совершенное здание соответствующего раздела математики. Вероятно, наиболее известным адептом такого подхода можно назвать Д.Гильберта, с его программой аксиоматизации математики и даже физики. Сегодня этот подход в математике применяется практически везде. И в физике его пытались применить, но пока плодотворность его оказалась достаточно низкой.

Вот тут полезно сделать отступление, посвящённое способу формализации, создания определений, который на мой взгляд следует использовать при построении и изложении математики как науки. На эту тему было и остаётся много споров, имеются философско математические направления обоснования математики, которые часто объединяются под такими названиями как логицизм, интуиционизм, конструктивизм, формализм, ак-

сиоматическое и теоретико-множественное направления. Может быть и другие, на полноту классификации я претендовать не хочу. Мы уже много говорили о синтетической геометрии Евклида, основанной на пяти аксиомах. И говорили также, что эти аксиомы, в свою очередь завязаны на такие интуитивные понятия как точка, прямая, плоскость, прямой угол и, может быть, другие. Плохо уже то, что нужно начинать с заметного количества интуитивных понятий. А ещё хуже, когда, например, **точка определяется как нечто, не имеющее ни длины, ни ширины, ни высоты**. Ещё до того, как сами эти понятия (длины, ширины и высоты) появляются в геометрии. На мой взгляд, гораздо лучше начать с единственного (и самого базового) интуитивного понятия — свойства чего бы то ни было “существовать” или “не существовать” (что мы уже и сделали при описании понятия “множество”). И конструировать новые понятия, добавляя к этому свойству по одному новому явно описанному свойству, явным образом определяя это свойство. Ну или хотя бы, добавляя достаточно малое число таких свойств, если не получается ограничиться одним. В конце концов, все математики так и поступают, давая определения и формулируя аксиомы. По сути дела, всякая аксиома тоже является описанием какой-то идеи. И большого смысла выделять их в отдельную категорию нет.

Что, однако, существенно отличает предлагаемый способ определения идеи как описания с указанным набором свойств, от обычного подхода, формулирования аксиом? То, что упор делается на генетических связях идей, на уточнении уже ранее определённых понятий. За счёт добавления новых, самостоятельных понятий, или указанием, что ранее определённое свойство может пониматься шире, грубо говоря, может принимать разные значения, которые ведут в итоге к идеям различающихся математических понятий.

Так мы поступали при описании понятия “множество”. Сначала опора только на одно свойство частей реального мира — существовать. Добавили различие между множествами по качеству, которое определили (назвали) количеством элементов в множестве. Описали возможные операции с получившимися идеями (множествами). Назвали специфические множества, концентрирующие внимание только на одном свойстве (количестве) числами (натуральными). Расширили понятие “множество” по основному свойству “существование”, добавив к ранее определённым множествам специальное, “пустое” множество, реализующее понятие “не существование”. *Эти два понятия можно при желании рассматривать как одно свойство, принимающее два значения.* Эту линию естественным образом перенесли на идею числа, добавив к натуральным числам нуль. Далее расширили понятие числа до всех целых чисел, включая отрицательные. На этом этапе, обоснование расширения оказалось слегка зависимым в воздухе, немного недостаточно обоснованным с точки зрения

наглядности реализации примерами реального мира. Они имеются, но хотелось бы что-то более надёжное, “видимое”.

Эта мелкая проблема автоматически решилась в тот момент, когда мы вернулись снова к общему понятию множества и ввели в рассмотрение новое качество, которым можно любое множество охарактеризовать. Мы сосредоточили внимание на отношениях целого и части, и пришли к идее связей между частями. Пришли к необходимости описывать множества двух видов — дискретные и непрерывные. Причём для этого описания расширили возможность уже определённого ранее свойства множеств — количества элементов — принимать новое значение — актуальную бесконечность. Далее мы начали переход к разным способам описания множеств с новыми свойствами (непрерывностей), к формулированию понятий геометрии. Заодно расширив ещё больше понятие числа, до действительных (вещественных) чисел, дополнив предыдущее понятие иррациональными числами. И введя новое понятие, характеризующее непрерывные множества, позволяющее описывать разницу уже между ними — понятие меры.

Геометрия при этом оказывается общим названием всех систем идей, которые будут годны для описания непрерывных множеств. И опять мы начали с примера. Евклидова геометрия, хотя и является отнюдь не самым простым примером для начала описания геометрии, но она является уже очень хорошо известным примером. На его основе мы выбрали более подходящую для наших целей схему — аналитический метод построения геометрии и вкратце обсудили причины именно этого выбора. Выбор этот сразу позволяет нам говорить о базовых элементах геометрии, точках, как об элементах уже описанных объектов, множеств. Все остальные базовые элементы евклидовой геометрии сводятся к некоторым специальным множествам точек, обладающих дополнительными свойствами.

Два, казалось бы, разных мира, мира элементов геометрии, и мира множеств, в первую очередь множеств чисел, объединились. Как результат, мы можем продолжать строить своё описание мира в рамках указанной стратегии — дополнения и уточнения старых идей при описании новых, вернувшись на гораздо менее развитый уровень описания геометрии, чем евклидово пространство. Аналитический подход позволяет нам начать с более простой идеи **непрерывного множества, снабжённого отображением на множество действительных чисел. Для самого простого такого множества, линии, речь пойдёт об отображении с помощью процедуры измерений, включающей в себя всего один эталон.**

Хотя я и вложил развитие идей в почти линейную, последовательную схему, можно легко видеть, что она не чисто линейная, а скорее сплетение нескольких линий развития, пересекающихся и обогащающих друг друга. Этого и следовало ожидать на пу-

ти создания описания мира как единого целого, но разделённого нами на части.

Именно этому пути я буду продолжать следовать при введении тех или иных математических понятий. А путь чистой аксиоматики для описания мира мало полезен. Если ему следовать, то рано или поздно придётся так или иначе увязать все формальные системы аксиом со свойствами реального мира. По мне лучше делать это на каждом шагу, сверяясь с опытом, чем вдруг повиснуть в воздухе, не зная за что зацепиться.

2.5 Отображения, Операторы, Функции, Переменные

Если вы внимательно читали предыдущий параграф, то должны были обратить внимание на слово “**отображение**”, которое появилось при описании непрерывностей числами. Мы его использовали и раньше, пообещав разъяснить его смысл, описать эту идею позже. Время для этого пришло.

Тесно связанные между собой понятия, получившие названия “**отображение**”, “**оператор**”, “**функция**” представляют собой базовые понятия ещё одной линии математических идей, которая появляется одновременно с представлением о множестве. Наличие среди этих слов слова “оператор” сразу наводит на мысль, что линия эта связана с понятием операций, о которых мы уже много говорили раньше. Действительно, *идеи эти формулируются именно как развитие, обобщение идеи “операция”*.

Любая из операций, которые мы можем придумать и применить к элементам множеств, может также рассматриваться в качестве отображения, оператора или функции. Единственное существенное отличие этих идей от понятия операции состоит в том, что мы их рассматриваем как более общую идею. Вот в каком смысле. Сложение двух чисел мы назовём операцией. А вот если мы имеем несколько чисел, объединённых в некоторую совокупность (множество), и складываем числа из неё с, например, двойкой, получая другую совокупность (множество) чисел, то эту процедуру мы назовём уже отображением, саму операцию сложения обозначим как оператор, а результирующее множество назовём функцией исходного.

Такое обобщение полезно тем, что можно не конкретизировать исходное множество, к которому применяется операция (оператор). Разные исходные множества — разные результирующие множества. Операторы тоже можно определять отдельно, самыми разными способами.⁷

⁷В том числе и далёкими от математики, что мы и делаем постоянно в обыденной жизни. И даже часто используем те же самые слова, перешедшие в бытовой язык. Примеры:

Пастух повесил на шею овцам в стаде колокольчики. Были овцы без коло-

Как легко понять из этого примера, разница между понятиями отображения и функции весьма призрачна. Поэтому очень часто их и не различают даже заядлые формалисты. Однако, в разных областях математики чаще применяется какое-то одно из них.

Понятие функции породило много специальных разделов, в которых его уточняют дальше. Эти разделы можно объединить общим названием “Функциональный анализ”. Это не значит, что синтез в этих разделах не рассматривается, просто первичным всегда выступает анализ.

То же самое произошло с понятием оператора, которое тоже породило свою специфическую часть математики, где упор делается именно на его свойствах. Ну и отображение не осталось в стороне.

Идея оператора в некотором смысле уже чем понятия “отображение” и “функция”. Дело в том, что можно определить отображения и функции таким образом, что выделить в них оператор, как совокупность операций, не представляется возможным, или, по крайней мере, не целесообразным. Примерами такого рода в математике являются **тригонометрические функции, экспоненциальная функция** и многие, многие другие. Они обычно получают названия (часто их объединяют в понятие “специальные функции”).

Надо сказать, что для моих целей именно такие функции будут очень важны.

Понятия, составляющие идеи отображения и функции получили специфические названия, и, таким образом, тоже оформлены как некоторые идеи. Употребление этих названий позволяет сразу понять, что речь пойдёт именно об отображении или функции.

Так, элементы исходного множества называют **независимой переменной**, иногда **абсциссой** и часто обозначают буквами x , y , или z . Конечно, и другие буквы (или их комбинации) могут иногда использоваться. Буквы служат указанием на то, что на их место может быть поставлен любой элемент из исходного множества, которое становится **множеством значений** независимой переменной.

Элементы результирующего множества называют **зависимой переменной**. А иногда **ординатой** или просто функцией. Обозначения могут быть разными, но чаще всего используется буква y . Соответственно, само результирующее множество называют **множеством изменения функции**.

кольчиков (исходное множество), стали овцами с колокольчиками (результирующее множество). Пастух, вешающий колокольчики — оператор. Вся процедура вместе — отображение.

Или художник нарисовал пейзаж. Кусочек природы — исходное множество. Картина — результирующее. Художник с красками и кистью — оператор. Ещё и картину, и процесс её создания можно назвать отображением (изображением) природы.

Можно встретить много разных обозначений наличия функциональной зависимости между множествами, но чаще всего используются подобные вот этим: $y = f(x)$; $y = F(x)$; или просто $f(x)$, $F(x)$. Более конкретная запись зависимости может выглядеть так: $y = 2x$; $y = ax + b$. Последнюю форму записи следует понимать так — число a умножено на независимую переменную x и к результату добавлено число b . Числа a и b называют **коэффициентами**, а саму такую форму часто называют **уравнением**.

При такой форме записи коэффициенты изначально не определены ничем, кроме неявного предположения, что они принадлежат к какому-то множеству чисел.⁸

При этом можно говорить уже не о единственной функции, а о **семействах функций**, имеющих одинаковую форму зависимости от независимой переменной и разные коэффициенты. Например, последнее уравнение называют **линейным**.

Такая форма записи (через неопределённые коэффициенты) позволяет достаточно легко пойти по пути дальнейшего расширения понятия функции. Ведь конкретный её вид теперь зависит ещё и от значения коэффициентов. А значит им можно приписать точно такой же смысл, как и независимой переменной. Так мы приходим к идее **функции нескольких переменных**. Формы записи при этом сохраняются, в том числе и с обозначенными буквами коэффициентами. Просто некоторые буквы рассматриваются как независимые переменные, а другие — как коэффициенты.

В математике, как языке, имеется много различных форм записи её утверждений, в том числе касающихся отображений, функций и операторов. Часто в её различных разделах, одним и тем же, по сути дела, идеям оказываются присвоены совсем разные обозначения, разные формы записи одной и той же идеи. Так что и понять их схожесть (а иногда и тождественность) оказывается весьма затруднительным. В этом нет ничего странного. Математика, как и всякий язык, в процессе своего расширения распадается на диалекты. Я тоже буду использовать разные диалекты языка математики для разных целей. Но всегда буду стараться указать связи между ними, схожесть или точное соответствие, если оно имеется.

Помимо указанных форм записи, я буду гораздо шире опираться на понятие **индекса**. Индексация переменных и функций возникла на основе одного специфического отображения, которое мы уже упоминали. Это **нумерация**. Вместо того, чтобы

⁸И даже это не обязательно. Мы вполне можем рассматривать идею такой записи в самом общем виде, допустив и коэффициентам, и самим переменным принадлежать к множествам произвольного вида. Но такое развитие этих идей в целом стоит в стороне от нужного мне направления. Хотя в некоторые моменты построения описания мира и потребуется пользоваться именно таким расширением понятия функции. Но это всегда будут вполне конкретные идеи, вводящиеся и описываемые по ходу дела.

использовать для обозначения разных переменных **одного вида** разные буквы (букв ведь не так и много, может не хватить!), мы их нумеруем. Буквы, обозначающие переменные, являющиеся одинаковыми в некотором, определённом нами смысле, мы снабжаем дополнительной буквой, обычно помельче, и смещённой вверх или вниз. Эту букву называют индексом. Индексы, как и остальные переменные или коэффициенты по определению могут принимать значения из некоторого указанного множества. Чаще всего, это будет множество целых чисел. Вот пример:

Имеется три независимых переменных, x , y , z . А мы используем только одну букву x для их обозначения, добавив индекс i , который может пробегать значения 1, 2, 3: x_i или x^i .

Такого рода обозначения я буду использовать далее весьма интенсивно, так как они существенно облегчают запись большинства соотношений в описании мира. Делают их компактными, легко обозримыми. А значит их будет легче и понимать.

Очевидно, что такая форма записи может рассматриваться и как дальнейшее обобщение и расширение понятия функции, наделение этой идеи новыми чертами.

Множества значений всех переменных, и независимых, и зависимых, в общем случае могут быть произвольными, и дискретными, и непрерывными. Соответственно, появляются ветви тех или иных отображений и функций. Как всегда, эти ветви при развитии, доопределении, и разветвляются, и пересекаются, и снова сходятся на некоторых этапах.

Хотя математика работает не только с числовыми множествами, для целей описания мира именно числовые множества являются необходимыми. Поэтому я буду описывать далее, в основном, те функции, для которых и множества значений независимых переменных, и множества изменения зависимых переменных являются числовыми множествами.

2.6 Ряды, Дифференцирование и Интегрирование

Одной из чрезвычайно важных для описания мира форм функциональной зависимости является идея **числового ряда и его суммы**.

Рассмотрим процедуру измерения расстояния на прямой от точки выбранной за точку отсчёта (начало координат) до произвольной точки этой прямой. Как мы это делаем?

Выбираем единицу измерения.⁹ Пусть это будет метр.

⁹Выбор единицы измерения связан с выбором **эталона**, инструмента для измерения. И выбор этот отнюдь не тривиален. Но о тех возможностях, которые мы реально для этого имеем, позже. Здесь же я подразумеваю, что проблем с выбором линейки, как мы это привыкли считать, нет. Т.е. привычные вам линейки, деревянные, железные — любые. Лишь бы твёрдые и неизменные, которые мы *можем перенести вдоль прямой и приложить*

Выбрали точку, до которой будем измерять расстояние. Оказалось, что до неё k_1 полных метров. И ещё сколько-то. Можем мы закончить измерение на этом? Устроит нас такое измерение?

Скорее всего, нет. Уж больно неточно, скажем мы. Метр для нас достаточно большой. Хорошо бы взять единицу поменьше, измерить поточнее. Взять совсем другой эталон? Мы поступаем иначе. Да, мы вводим **новый эталон**. Но не полностью независимый, а определённый как часть прежнего. Вполне определённую часть. Например, $1/10$ часть, которую называем дециметр. И продолжим измерение с той точки, где мы остановились, не доходя до нашей цели. **Мы могли бы повторить измерение от начала отсчёта с помощью новой единицы, дециметра. Но это будет другая процедура измерения, с полностью новым эталоном. Сейчас же я уточняю, расширяю данную процедуру измерения с помощью всё того же метра. Сейчас мне важна именно такая формулировка этой идеи.**

Итак, продолжили. Получилось k_2 дециметров. И опять не дошли. Именно не дошли. Мы временно приостанавливаем процедуру измерения именно по недостатку, а не по превышению. **Повторяем сделанные нами шаги снова.** Делим дециметр на десять **равных** частей, называем их сантиметрами. Прикладываем к прямой снова, начиная с последней достигнутой точки. Опять не дошли до цели? Хорошо, вводим миллиметры. И так далее, пока не сочтём, что неточность нашего измерения нас устраивает. То, что иногда этот процесс может остановиться на конечном числе шагов не суть важно. Важно то, что на прямой **имеются** точки, до которых таким способом нельзя добраться за **конечное число шагов. Не соизмеримые с конкретным эталоном длины, выбранным в качестве единицы измерения**, даже при потенциально бесконечном его делении **на заданное число равных частей**. Расстояния до таких точек будут **бесконечной** процедурой измерения выдаваться в виде иррациональных чисел. Все прочие расстояния будут рациональными числами. При другом выборе эталона или точки отсчёта, ситуация вполне может измениться. Те расстояния, которые выражались иррациональными числами станут рациональными, и наоборот.

Всё это так. Но ведь мы ещё не знаем того расстояния, которое выдала нам наша процедура измерения. Мы её не закончили. Нам же нужно знать сколько **метров** до выбранной точки.

Что мы имеем? **Последовательность, ряд** чисел k_i , $i = 1, 2, 3, \dots$: k_1, k_2, k_3, \dots

Вот вам новая идея. Математическое понятие последовательности. Сразу можете расширить эту идею на всевозможные виды последовательностей (рядов) и заняться этим разделом матема-

к ней. И можем на них нанести деления меньших размеров.

тики. Он имеется, и весьма развитый. А я продолжу свой путь.

Но кое-что про эту последовательность скажу. Мы можем отметить, что, независимо от соотношения между числами k_i , каждый ¹⁰ следующий член этого ряда (с большим номером, индексом i) меньше предыдущего. Так как мы для правильного их сравнения обязаны привести их значения к одному и тому же эталону. В нашем случае, к метру. А в метрах это будет так: $k_1 \rightarrow k_1$, $k_2 \rightarrow \frac{k_2}{10}$, $k_3 \rightarrow \frac{k_3}{100}$ и т.д. И все k_i , начиная с $i = 2$, всегда меньше 10, т.к. в нашей процедуре для измерения новым, меньшим эталоном остаётся расстояние меньшее, чем текущий эталон.

Поэтому мы можем утверждать, что при потенциально бесконечном продолжении этого ряда (т.е. при потенциально бесконечном продолжении таким образом определённой процедуры измерения) числа, выражающие величину новых членов в ряду (пересчитанные в метры!) будут становиться всё меньше и меньше, приближаясь к числу нуль. **Введём новую идею, предел последовательности при её потенциально бесконечном продолжении.** Мы уже рассматривали немного эту идею раньше. Здесь мы её формализуем, описываем во всей полноте. Обозначается предел следующим образом:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} k_i.$$

В зависимости от свойств рассматриваемой последовательности, такой предел может существовать или не существовать.

В случае последовательностей чисел, он может быть конечным числом или бесконечностью, при неограниченном росте членов последовательности. А может и вообще быть не определён. Например, если в последовательность объединены растущие числа, но меняющие свой знак при переходе к следующему члену последовательности. И такие последовательности могут ведь быть зачем-то нужны математикам. В частности, для последовательности k_i предел действительно не существует, потому что на каждом шаге значение k_i может быть произвольным положительным целым числом от нуля до девяти. (Нуль будет тогда, когда оставшееся расстояние до точки оказывается меньше нового деления.)

В нашем случае опыт поддерживает наше убеждение, что предел последовательности наших измерений всё уменьшающимися эталонами существует, и равен нулю. Т.е. ошибку в определении расстояния, при возможности проводить нашу процедуру бесконечно, мы сделали бы нулём. Это наблюдение мы записываем так:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{k_i}{10^{i-1}} = 0.$$

¹⁰Забыв про то, что это числа разных смыслов — дециметры, сантиметры, миллиметры, их можно сравнить на предмет больше-меньше.

Что означает выражение 10^{i-1} будет объяснено чуть ниже.

Теперь мы имеем возможность вычислить необходимое нам расстояние от начала отсчёта до намеченной точки. Конечно, можно было бы сказать и так: k_1 метров, k_2 дециметров, k_3 сантиметров и т.д. В быту это вполне допустимо. Но для того, чтобы такое описание расстояния было хорошим, придётся использовать слишком много слов и цифр, да ещё и пояснения нужны про “дециметры”, “сантиметры” и пр. А мы сейчас вполне в состоянии дать всего лишь одно число, в единицах, с самого начала выбранных для измерения, в метрах.

Сформируем **частичные суммы** результатов всех последовательных измерений, пересчитанных в метры. Первая такая сумма равна просто k_1 . Вторая — $k_1 + k_2/10$. Третья — $k_1 + k_2/10 + k_3/100$. И так далее. Как водится, всё это можно записать компактно, используя индексную форму записи результатов измерений на каждом шаге, и введя специальный символ для записи частичных сумм:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{10^{i-1}}$$

Запись эта достаточно прозрачна. Слева от знака равенства мы определили символ, который будет обозначать частичную сумму, n суммированных результатов наших последовательных измерений (S_n). Знак \sum служит заменой слова “сумма”. Под этим знаком написано с какого индекса начинается суммирование ($i = 1$). Над знаком суммы указано на каком индексе (включительно) мы хотим остановиться. По умолчанию индекс меняется на единицу. Если бы мы вдруг захотели учитывать только члены, отличающиеся на m единиц, то могли бы это указать в этой форме записи таким образом: $i = 1, m$. Но сейчас это не наш случай. И, наконец, после знака суммы стоит описание того, что суммируется. Запись 10^i означает “десять в i -ой степени”, т.е. “десять, умноженное само на себя i раз”. По определению, $10^0 = 1$. Как и любое другое число в нулевой степени тоже равно единице по определению. Почему так, чуть позже. Всё это стандартные математические обозначения.

В принятых обозначениях наша цель, искомое расстояние S , выглядит так:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{10^{i-1}}$$

Это предел последовательности частичных сумм при продолжении измерений потенциально бесконечно. Предел этот существует, что следует из стремления к нулю той ошибки (говорят ещё “невязки”), которую мы имеем, если останавливаемся намного раньше бесконечности, скажем, на шаге N . Как можно легко видеть из уже сказанного выше, эта ошибка будет заведомо меньше чем $1/10^N$. При девяти шагах, например, она будет меньше

одной миллиардной доли метра. При практических измерениях мы обычно останавливаемся много раньше.

Понятие предела по сути дела является мостиком, позволяющим нам реализовать потенциальную бесконечность, сделать её актуальной, завершённой. Является формой записи такой реализации, которую, естественно, завершаем не мы, а реальный мир. По крайней мере, мы смогли кратко записать все те шаги, которые для этого требуются.

Хочу также обратить ваше внимание, что выбор числа 10, на которое мы делим на каждом шаге нашей процедуры измерения предыдущий эталон, в большой степени произволен. Это именно наш выбор, не более того. Мы могли бы каждый раз делить на две части, или на три, или на любое натуральное число, большее единицы. Единица не годится потому, что это означало бы отсутствие деления и нового эталона в нашем распоряжении не было бы. Кстати, обратите внимание — “ни разу не сделанное” деление в нашем случае эквивалентно делению на единицу. Возведение в степень, как многократный повтор умножения прямо соответствует нашему многократному делению на одно и то же число, ведь мы **увеличиваем** таким способом “делитель” дроби (что мы и записали в нашем определении для частичных сумм). Поэтому возведение в степень “нуль” определено соответствующим образом, чтобы давать в результате единицу, т.е. отсутствие действия.

Выбор нами числа десять в качестве базового для деления эталона вызван использованием нами **позиционной формы** записи чисел именно с такой базой. Соответственно, введённые выше частичные суммы, как приближённые значения результатов незаконченных измерений расстояния, позволяют легко записать значения дробных чисел в позиционной форме. Такую запись при выбранной базе 10 называют десятичной дробью. Позиционную форму записи мы используем исключительно для десятичных дробей.¹¹

Условимся отделять целую часть в дробном числе от нецелой части символом “точка”. Иногда используется “запятая”, но мы будем использовать только точку. Целая часть пишется слева, а дробная часть записывается с ростом базы деления во всё более правые позиции. Тогда число $3/2$ в десятичной форме будет записано как 1.5 — “одна целая и пять десятых” (долей). Число $101/100$ выглядит как 1.01 — одна целая, нуль десятых и одна сотая. “Нуль десятых” на словах обычно опускают. А вот число

¹¹При создании вычислительных машин оказалось удобнее использовать другую базу для позиционной формы записи числа. А именно, двоичную форму, с базой два. Иногда в качестве базы используются другие степени двойки — восемь и шестнадцать. Такое представление используется в самих вычислительных машинах, и, иногда, программистами. По большей части, системными программистами, которые создают и модифицируют управляющие программы для вычислительных машин. Для обычного пользователя числовая информация, как правило, предоставляется в десятичном виде.

$1/3$ будет уже записать сложнее, дать точную запись оказывается просто невозможным. Дело в том, что при выборе в качестве базы числа 10, это вполне рациональное число можно записать только **бесконечной** десятичной дробью. Естественно, на практике никто этого не делает. Используется либо **приближённая** форма записи: $1/3 \approx 1.3333$, где количество позиций справа определяется нужной (достаточной для каких-либо целей) точностью приближения. Либо специальная форма для таких “периодических” дробей. Дело в том, что **бесконечная форма записи рационального** числа десятичной дробью всегда означает появление с какой-то позиции повторяемости определённого количества позиций в дробной части снова и снова при перемещении позиции вправо. Для одной третьей это всего одна позиция, в которой всегда стоит тройка, и начинается повторение сразу, с десятых долей. Повторение обозначают взятием повторяющихся позиций в скобки и обрывают на этом запись. При этом запись считают точным эквивалентом рациональному числу. Соответственно, для одной третьей будет вот такая точная запись в виде десятичной дроби: $1/3 = 1.(3)$. Понятно, что всё это наши соглашения по форме записи формулируемых идей (сами эти соглашения тоже идеи).

Можно заметить, что десятичная дробь, как позиционная форма записи числа, очень хорошо подходит для записи результатов наших измерений расстояния: новая позиция соответствует переходу к новому шагу в процедуре измерений. Эту процедуру мы вели в сторону уменьшения эталона. Но ведь, как всегда в наших рассуждениях, мы можем пойти и обратным путём — увеличивать масштаб в нужное число раз тогда, когда он оказывается слишком мал для измеряемых расстояний. Именно так мы и делаем, вводя километры для измерения, например, дорог. Форму записи при этом менять не требуется. Просто в целой части числа слева будет больше позиций.

Также десятичная форма записи дробей позволяет легче принять наличие иррациональных чисел как результатов измерений. Мы уже отметили, что для записи некоторых рациональных чисел в такой форме требуется продолжать её (запись) бесконечно. Как и иррациональных. В этом смысле единственной разницей между рациональным и иррациональным числом является отсутствие какой-либо **периодичности в полной записи** числа. Даже если некоторое количество повторяющихся позиций и имеется, для иррационального числа эта повторяемость “где-то там” нарушается. Также легко понять, что иррациональных чисел должно быть много больше чем рациональных. Ведь любую периодичность всегда можно на каком-то этапе нарушить, если запись числа продолжается бесконечно. Причём нарушить можно многими способами.

На примере обычно используемой нами процедуры измерения, мы, помимо того, что лучше поняли, что мы при этом де-

лаем (а это для дальнейшего изложения чрезвычайно важно), ввели в обиход несколько идей, интенсивно используемых математикой для самых разных целей.

Вот одна из таких целей. Мы определили понятие функции, как зависимости между двумя (или более) переменными величинами. Для математики это почти всегда числовые переменные. Сразу же можно поставить вопросы — а как выяснить и описать как себя ведёт зависимая переменная при изменении независимой? Остаётся постоянной? Растёт? Убывает? Или зависимость гораздо более сложная?

Для ответа на такие и похожие вопросы разработаны целые разделы математики. Но все они начинаются с определения понятия **производной** функции и методов **дифференцирования** в целом (в частности и вычисления производных). Как можно было понять из упоминаний в первой главе этой книги, да и в текущей тоже, все эти идеи связаны с нашей неустранимой привычкой делить целое на части. И желанием потом собрать части в единое целое.

Здесь я только опишу базовые идеи дифференцирования и обратной ему операции **интегрирования**, причины их введения и основные черты, поскольку они будут постоянно использоваться в дальнейшем изложении.

Казалось бы, выяснить, растёт ли функция, убывает ли — достаточно просто. Нужно взять разность её двух значений и посмотреть, больше или меньше нуля эта разность. Вот только каких именно значений нужно брать разность? Наверное, ближайших. Тогда можно будет говорить, по крайней мере, о поведении функции в рассматриваемом месте.

А если и множество изменения независимой переменной, и множество значений функции являются непрерывными — то какие значения близкие? Ответить на этот вопрос нам помогает уже введённое понятие предела.

Возьмём любую точку x в множестве независимой переменной. И вторую точку, $x + \Delta x$. Будем следить за разностью между $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, устремляя Δx к нулю.

Но если функция непрерывная, то и Δy тоже будет стремиться к нулю. Что из этого можно узнать? А вот что. Можно вычислять вот такое отношение:

$$\frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Слева и справа в этом соотношении стоят просто *два разных обозначения* для новой идеи производной функции $f(x)$. А посредине её определение, предел к которому стремится (если он существует, конечно) последовательность отношений приращения функции к приращению аргумента, при стремлении последнего приращения к нулю. Поскольку точка x взята произвольным

образом из множества определения независимой переменной, то производная является новой функцией этой же самой переменной.

То, что такой предел вполне может существовать, легко видеть на примере одного из важнейших для нас класса функций — линейных функций, имеющих зависимость от переменной x вида $y = f(x) = ax + b$, где a и b постоянные числа, от x уже не зависящие.

Для таких функций производную очень легко вычислить в явном виде пользуясь определением:

$$\frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

На этом примере мы можем обсудить несколько важнейших для нас сторон обсуждаемых идей.

- Производная постоянной функции равна, по определению, нулю.
- Производная линейной функции, опять же, по определению, равна постоянной функции, а именно, значению коэффициента при независимой переменной.
- При дифференцировании (вычислении производной) **обязательно теряется информация** о её постоянной составляющей.
- Форма записи производной в виде dy/dx целиком оправдана для линейных функций, если ввести понятие $dy(x)$ — **дифференциала** функции $y(x)$ как **главной, линейной по dx (= Δx по определению), части** изменения функции $\Delta y(x)$. Соотношение $dy(x) = df(x) = \frac{df}{dx}(x) \cdot dx = f'(x)dx$ в этом случае является точным.

Понятие дифференциала функции, как главной, **линейной** по изменению независимой переменной, части приращения функции, является для нас весьма важным, позволяющим определить многие понятия в той геометрии, которая нам потребуется для описания соотношений между частями реального мира, т.е. для построения физики.

Да и математика при нашем подходе целиком опирается на эти соотношения. Но математика, как наука, больше концентрируется на получающейся внутренней логике соотношений, на возможном расширении понятий, очень часто забывая о происхождении своих идей, легко отрываясь при этом от применения новых идей к реальному миру.

Вполне понятно, что производные, как функции, тоже можно дифференцировать и получать новые функции. Соответственно,

можно пройти и в обратном направлении — попытаться установить, какая именно функция имеет данную функцию в качестве производной. Эта операция получила название “интегрирование” и специальное обозначение: \int .

Операция эта определяется как обратная дифференцированию, ставящая в соответствие дифференциалу функции $df(x)$ саму функцию $f(x)$: $f(x) = \int df(x) = \int \frac{df}{dx}(x) \cdot dx = \int f'(x)dx$.

Здесь последовательно выписаны полностью равноценные формы записи одного и того же действия. Заметим, что производной $f'(x)$, понимаемой как функция, может быть вообще любая функция. Поэтому можно определить интегрирование и как операцию, независимую от дифференцирования напрямую, можно определить интеграл произвольной функции $f(x)$: $F(x) = \int f(x)dx$.

Символ \int называют **неопределённым интегралом** функции $f(x)$, а функцию $F(x)$ называют её “первообразной”.

Из тех замечаний, которые мы сделали при обсуждении производной линейной функции, должно быть ясно, что неопределённый интеграл любой функции должен содержать некоторую произвольную постоянную. Это одна из причин, почему интеграл назвали неопределённым. Часто этот факт записывают явно таким образом: $F(x) = \int f(z)dz + const$, $const$ — это обозначение произвольной постоянной.

Вторая причина состоит в том, что этот интеграл может быть применён для вычисления **площади** под кривой графика функции $y = f(x)$, если мы рассматриваем геометрическое представление функций. Мы ещё не касались аналитической геометрии в нужной степени, но я надеюсь, что понятие графика достаточно хорошо известно. В этом случае ограничивают также и множество изменения независимой переменной, например, значениями x_0 и x_1 . Результатом в этом случае будет разница между значениями первообразной на границах. Интеграл при этом называют определённым. Произвольная постоянная составляющая первообразной очевидным образом удаляется вычитанием.

Определённый интеграл записывают таким образом:

$$S = F(x_1) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

Конечно, то что это площадь под графиком, является весьма частным случаем именно графического представления такой идеи, как функция. Смысл определённого интеграла (и неопределённого тоже) будет целиком и полностью определяться смыслом интегрируемой функции и переменной, по которой она интегрируется. Как и смысл производной — смыслом дифференцируемой функции и той независимой переменной, по которой это дифференцирование производится. В физике у нас будет много

разных производных и интегралов и мы будем уделять их физическому смыслу особое внимание.

2.7 Степени, Полиномы и Показательная функция

В предыдущем параграфе мы расширили список операций, которые мы применяем к числовым множествам. Мы добавили возведение в степень, указанную натуральным числом. Сделали мы это для простоты записи нужных нам вычислений, которые, в свою очередь, возникли из необходимости правильно описать процедуру измерения расстояний на числовой прямой. Возникает желание сформулировать и обратную операцию, которая очевидным образом должна существовать, если рассматривать исходное число и результат его возведения в степень как две стороны, связанные отображением. А отображение можно ведь рассматривать в обе стороны.

Здесь мы впервые встречаемся со случаем, когда операция по сути дела является обратной сама себе. Только нужно расширить множество чисел, которые могут использоваться в качестве показателя степени, в которую возводится другое число. Так, расширение на все целые числа достигается определением возведения в отрицательную степень $-n$ как деления на число, возведённое в положительную степень n . Для этой операции применяются два равноправных способа записи: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ по определению.

Расширение допустимости использования в качестве показателя степени на рациональные числа достигается введением понятия извлечения корня такой степени, каков знаменатель дроби из числа возведённого в степень, равную числителю дроби, стоящей в показателе степени. Записываются эти определения следующими способами: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Под извлечением корня при этом понимается нахождение такого числа, которое нужно возвести в данную степень, чтобы получить число, из которого извлекается корень. Вот эта часть операции может приводить к неоднозначным результатам. Здесь появляется также новая возможность расширить понятие числа. Так как, например, в действительных числах невозможно определить результат извлечения корня второй степени (квадратного корня) из отрицательного числа. Такие, новые числа называют **мнимыми**.

Их множество совпадает с множеством всех действительных чисел, помеченных дополнительным значком, $\mathbf{i} = \sqrt[2]{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}}$, мнимая единица. Произвольное мнимое число при этом можно записать так: $a_{\text{мнимое}} = \mathbf{i}a_{\text{действительное}}$. Все операции, введённые для действительных чисел, применяются и к мнимым.

Далее мнимые и действительные числа объединяют в пары, работают с ними как с единственным числом, которое называют **комплексным**. Комплексное число z определяется как сумма

действительного и мнимого числа: $z = a + ib$ по определению. Это отнюдь не простая формальная идея, причины для её введения в первую очередь были связаны с необходимостью надлежащего описания ситуаций, требующих решения вполне практических задач. Я не буду на этом останавливаться. Отмечу только, что комплексные числа позволяют очень удобно описать все точки на плоскости. А этой задаче, как задаче построения геометрии общего вида, я далее уделю особое внимание. Но именно в русле развития идей геометрии, а не чисел.

Здесь открываются новые пути развития теории чисел. Необходимость такого развития обосновывается не только формальными нуждами, но и вполне реальными примерами в физике. Я не буду останавливаться подробно на свойствах мнимых и комплексных чисел, хотя они потребуются для более удобной формулировки уже самых основ физики. Это может увести нас слишком далеко от основной линии идей. Поэтому я предпочту вводить идеи, связанные с применением комплексных чисел там, где это потребуется, уже готовыми, просто отсылая вас к соответствующим учебникам. Основной посыл для их введения предоставил, а дальнейшие обоснования удобства как раз и будут опираться на нашу нужду применить их при построении основ физики.

Сейчас я продолжу линию доопределения возведения в степень. Не останавливаясь на подробностях, скажу только, что показателю степени можно разрешить принимать значения не только в целых и рациональных числах. Полноценное расширение этой операции достигается только расширением понятия числа до комплексных чисел. Как чисел, возводимых в некоторую степень, так и чисел, которые определяют эту степень. **Только в комплексных числах вся совокупность операций, нами введённых, будет достаточно замкнута. В том смысле, что результат операции будет всё в тех же числах.** (Не забываем про проблему деления на нуль, которая оставляет ситуацию с числами всё ещё не идеально замкнутой.)

Наличие этой операции позволяет работать с двумя видами функций, которые будут весьма часто применяться для описания мира в дальнейшем.

Первый класс функций называют **полиномами или степенными многочленами**. Это функции, содержащие неизвестную переменную в виде суммы членов вида $f_n(x) = a_n x^n$, где a_n произвольное (но не переменное) число, а n целое. Иногда ограничиваются только целыми положительными n . Нетрудно видеть, что ряды частичных сумм результатов измерений, описанных выше, вполне можно считать такими полиномами, в которых показатели степеней могут быть целыми (и положительными тоже, если расстояния заметно больше метра).

Второй класс функций называют **показательными функциями**. Они имеют в качестве основания, возводимого в степень,

фиксированное число, а вот сама степень является переменным числом: $f(x) = a^x$. Определение таких функций позволяет ввести в рассмотрение операцию, действительно являющуюся двойственной операции возведения в степень, её называют **логарифмированием**: $x = \log_a f(x) = \log_a a^x$. Конечно, применяться такая операция может и к числу и к функции $f(x)$, которая может быть и не показательной функцией.

Среди показательных функций имеется одна, выделенная среди всех остальных функций особенностями нашего способа описания реального мира. Её называют экспоненциальной функцией, или проще экспонентой. Основание этой функции, иррациональное число, носит специальное название “ e ”, и имеет собственный символ: e или exp . Для логарифмирования по этому основанию тоже используют специальный символ: \ln .

Функция эта выделена не только среди показательных, она является вообще важнейшей для нас функцией. Причины выделенности именно этой функции мы не обойдём вниманием в своё время.

2.8 Координаты, Векторы, Матрицы

Вернёмся теперь к процедуре измерения расстояния вдоль прямой линии, которую мы описали в §2.6. Зададимся вопросом, а что же мы получили в результате этой процедуры?

А получили мы вот что:

- Соответствие между точками прямой линии и действительными числами.
- Отображение точки на прямой на множество действительных чисел. И наоборот.
- Систему координат на прямой линии.

Всё это одно и то же, только выраженное разными словами. Иногда, говорят намного короче — имеем “числовую прямую”.

С введения на прямой линии системы координат начинается аналитическая геометрия. Так что же такое **система координат**? А вот как раз то что сказано выше — **каждой точке прямой приписано некоторое число, координата. Причём, разным точкам соответствуют разные числа, разные координаты.** Слово “координаты” можно попытаться перевести на русский язык как “упорядоченные совместно”. Обычно в этом простейшем случае одну единственную координату обозначают буквой x . Разное значение числа x — разные точки прямой имеются ввиду. Среди этих точек имеется особенная точка — **начало координат** при $x = 0$. Но особенная она только вследствие нашего выбора. Для самой прямой все точки одинаковы. Так что это не особенная точка прямой, а особенная, **выделенная нами**, координата среди остальных координат.

Обратите внимание на будущее — выделенность среди одинаковых предметов, частей мира, может появиться как результат нашего произвольного, но конкретного выбора.

Раз это наш выбор, то и изменить его мы всегда можем. Выберем другую точку на прямой в качестве нового начала отсчёта. Что при этом произойдёт? Нам придётся повторить всю процедуру измерения снова, пусть и с тем же эталоном, единицей измерения. Получим **новую систему координат**. Обозначим новую координату на прямой x' . В чём отличие этих двух **переменных** чисел? Можно утверждать, что для всех значений x будет выполняться равенство $x' = x - x_0$, где x_0 это координата **нового начала отсчёта в старой системе координат**.

Выбор начала отсчёта не единственный среди тех, которые возможны при формировании процедуры измерения. Что произойдёт, если вместо метра за единицу измерения мы возьмём сантиметр? Самый обычный выбор при изображении числовой прямой на листе бумаги. Какое соотношение в этом случае будет между новой координатой и старой? Оно вполне очевидно — **новая координаты будет больше старой в сто раз**. Во столько раз, во сколько новый эталон меньше старого. Т.е. **речь идёт об умножении старой координаты на коэффициент, получаемый как отношение старого эталона к новому**. Обозначим это отношение буквой a и добавим одновременно возможность изменения начала отсчёта. Тогда соотношение между новой координатой и старой будет выглядеть так: $x' = ax - x_0 = ax + b$ ($b = -x_0$).

Это соотношение просто констатирует тот факт, что, переходя от одной процедуры измерения к другой, мы переходим от одной системы координат к другой. При этом новая координата является функцией старой координаты. Более того, описанному выше способу изменения процедуры измерения соответствует вполне конкретный вид функций — **линейные функции** старой координаты.

Мы можем легко найти производную новой координаты по старой: $dx'/dx = a$. Можно также записать функцию обратного перехода, от новой координаты к старой (ведь мы могли бы начинать с сантиметров и переходить к метрам!) и соответствующую производную: $x = \frac{1}{a}(x' + x_0) = \frac{1}{a}x' + b'$, $dx/dx' = 1/a$. Очевидно, и обратное преобразование тоже является линейной функцией.

В математике акцентируют внимание не на изменении процедуры измерения, а на изменении системы координат. Говорят — координаты преобразуются. Вводится специальный термин, **преобразования координат**, и изучаются их свойства.

Оставим пока в стороне изучение одного из важнейших для нас вопросов, свойств преобразований координат. Спросим себя — математика “забыла” о происхождении координат как результатов измерений — неужели это в точности так? Ведь как-то

должен быть описан и тот эталон, та единица измерения, с помощью которой получены все эти числа, с которыми предпочитает работать математика. Это действительно так. Образ единицы измерения имеется, и носит название **единичный касательный вектор**. Слово “касательный” мы поясним позже, пока же его можем опустить. Обсудим, что вкладывается в понятие **вектор**.

Сначала в весьма рудиментарной форме, в обсуждаемом случае единственной координаты, **пространства одного измерения**.

Как мы определяем наш эталон — масштаб, единицу измерения — в процедуре измерения? На прямой линии масштабом выбирается часть линии между двумя точками, обязательно отделимыми друг от друга. Такую часть линии ещё называют отрезком линии. Этому отрезку приписано необходимое нам (и обеспечиваемое реальным миром) свойство “размер”, “длина”. **Этому свойству приписывается значение “единица” по определению**. Обычно это свойство называют “величина” (масштаба). Сравнение отрезка с самим собой даёт в качестве отношения единицу. Один отрезок. Точки отрезка не являются равноправными. Одна полагается первой, “началом отрезка”, другая второй, “концом отрезка”, концом масштаба. Таким образом определяется второе свойство масштаба — “направление”. В случае отрезка на прямой это направление записывается с помощью знака — плюс или минус. *Величина масштаба, его размер, длина, по определению полагаются положительным числом, положительной единицей*. **Если для определения расстояния до начала отсчёта (координаты) масштаб откладывается так, что порядок, установленный между его концами, соответствует порядку до измеряемой точки (начало отсчёта всегда полагается первой точкой измеряемого отрезка, ведь именно до этой точки мы измеряем расстояние), направление измеряемого отрезка и направление, приписанное измеряющему отрезку совпадают, то координата считается положительным числом. Если же измеряемый отрезок на прямой имеет порядок начала и конца противоположный порядку начала и конца масштаба, то координата будет отрицательным числом.**

Масштаб, определённый таким образом, получает какое-то название — “метр”, “сантиметр”, “дюйм”, “сажень” и т.д. *Это название для математики остаётся неявным*. А вот **физика**, как не простое собрание идей, а совокупность идей, описывающих реальный мир, **это название игнорировать не может**. Ведь разные эталоны дают разные образы мира. В физике название эталона обязательно присутствует как **размерность** того или иного числа. Ниже мы обязательно будем обсуждать это там, где на этом необходимо останавливать внимание.

Одна точка (с нулевым размером) масштабом быть не может. Масштаб полагается имеющимся, существующим в каждой точ-

ке. Здесь уже заложено определённое противоречие — с одной стороны, масштаб это расстояние между **двумя разными точками**, с другой стороны, **он сосредоточен в единственной точке**.

Оставим полноценное решение этого противоречия в виде формулирования подходящей идеи на потом. Начнём собирать необходимые свойства, те черты процедуры измерений, которые помогут нам в дальнейшем сформулировать нужную идею.

Как мы на практике решаем это противоречие? Когда бы и как бы мы не делали измерения, **наши масштабы всегда чужды измеряемым сущностям**. Они внешние для тех частей мира, которые мы измеряем. Как так — мы ведь для прямой линии определили масштаб как направленное расстояние между двумя концами её отрезка. Разве не так?

Так, да не так. Мы забыли, что измеряем-то мы в реальности линейкой, чуждой самой прямой. То, что отрезок на прямой совпадает с отрезком на линейке это уже **результат сравнения двух разных частей мира**. Почему мы так вынуждены делать? А потому, что **масштаб нам нужен везде на прямой, для любой её точки**. А тот отрезок, который на ней изначально определили как единицу, остаётся там же, где и был. Он не смещается сам по себе, как бы мы этого не хотели. Наш масштаб, по необходимости, должен быть внешним для прямой, дополнительным инструментом, **определённым в каждой её точке**.

Линейка, которой мы что-то измеряем всегда отделена от того, что мы измеряем. Такое свойство масштаба можно (и нужно!) рассматривать как аксиому, определение масштаба, для той идеи, которую мы формулируем в математике. *В физике это будет не совсем так. Там нам потребуется иметь двойственное определение для масштабов — и реальное, с помощью частей мира, и его идеализацию, чтобы применять наработанные в математике идеи.*

Что это означает для понятия “система координат”? То, что к каждой точке, описываемой координатами, мы обязаны приписать **дополнительно** некий объект, имеющий размер и направление, размер вполне конкретный, “единица”, и являющийся неотъемлемым свойством точки, при её описании с помощью координат. Образ использованного для построения координат масштаба. То, что мы **переносили** одну и ту же линейку от точки к точке, здесь **вторично**.¹² Было бы достаточно **иметь** в каждой точке такую линейку, с величиной масштаба, по определению, всюду равной единице. Именно наличие масштаба в каждой точке мы и декларируем здесь, а не перенос. Это важно! Наши переносы связаны с понятием времени, а понятия этого у нас

¹²Вторично-то, вторично, но именно с понятием “переноса” масштаба, т.е. с использованием для разных точек, в некотором смысле, **одного и того же инструмента**, будет связано дальнейшее развитие геометрии. Об этом при описании идеи аффинной связности.

пока и в помине нет. Как и понятия переноса.

Заметим, что **это свойство точки ей навязано нашим способом её описания, не является ей внутренне присущим.**

Но зададимся вопросом, один ли единственный объект, образ масштаба, должен быть приписан каждой точке прямой? Ответ очевиден. Нет и нет. Ведь конкретный масштаб, единица измерения, определяется нашим выбором. И метр, и сантиметр и пр., короче, направленный отрезок любой длины ¹³ должен быть приписан к точке. Не один объект, их множество. Назовём такие объекты **векторами**, а их общее множество **векторным пространством.**

Для пространства одного измерения, прямой (что не существенно) непрерывной (что существенно) линии, это множество совпадает с множеством действительных чисел. Так нужно ли вводить новое название?

Да, нужно. Отличие нового понятия от простого числа становится заметным тогда, когда мы перейдём к чуть более сложно описываемому непрерывному множеству — к описанию пространства двух измерений. Например, к описанию плоскости.

Я не буду в данный момент останавливаться детально на способах введения второй координаты. Это могло бы нас увести далеко в сторону от обсуждаемой идеи вектора. Хотя позже я непременно к этому вернусь. А сейчас просто перейду к обсуждению ситуации на плоскости.

Итак, точка теперь характеризуется двумя числами, двумя координатами. Обозначать координаты можно по-разному. Например, $\{x, y\}$. Или $\{x^1, x^2\}$. Имея в виду, что увеличение числа измерений рассматриваемого пространства до двух только начало, и мы собираемся развить эту идею в сторону увеличения возможного количества измерений, вторую форму записи полезно превратить в общую индексную форму: $\{x^i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, где n обозначает количество измерений пространства. В литературе можно встретить запись индекса как вверху, так и внизу справа от коренной буквы, обозначающей индексируемый объект, в данном случае координату. Понятно, что способ записи является не более, чем соглашением. Очень удобным соглашением является уточнение смысла индекса в соответствии с его местом в записи. Мы такие соглашения будем далее использовать очень интенсивно. Поэтому обращаю ваше внимание, что индекс координаты я буду помещать **всегда** справа вверху.

Как же мы можем теперь записать наши масштабы, которых теперь два? Довольно просто, тоже как пары чисел — первый масштаб, назовём его e_1 , по определению имеет единицу, соответ-

¹³Вообще говоря, кроме нулевой длины, т.е. не точка. Но для понятия вектора, которое мы здесь вводим, и такой объект (нулевой длины) допустим. Это просто будет означать, что не всякий вектор может быть выбран в качестве масштаба.

ствующую первой координате и равен нулю для второй, а второй, e_2 , наоборот, нуль для первой координаты и единица для второй. Оба вектора объединяют по паре чисел: $e_1 = \{1, 0\}$, $e_2 = \{0, 1\}$. Эти компоненты векторов часто тоже называют их координатами. Но я предпочту всё-таки использовать слова “компонента” или “составляющая” для их обозначения (не только векторов, но и других многокомпонентных объектов, которые будут введены позже). *Координаты останутся только для описания положения точек относительно введённой системы координат.*

Идея вектора общего вида легко вводится разрешением обоим компонентам произвольного вектора возможности быть любым действительным числом, а не только единицей или нулём. Возникает вопрос, как расположить индекс компоненты, если мы хотим для обозначения вектора использовать индексную форму, также как и для координат. Ответ получить легко, если вспомнить о размерности как координат, так и составляющих самих масштабов. Вполне очевидно, что если первый масштаб называется, скажем, метр, а второй сантиметр, то и первая координата, и первая компонента обоих масштабов являются числом метров (равных x^1 и 1 или 0 для вектора масштаба). А вторая координата и вторая компонента масштабов будут означать количество сантиметров (равных x^2 и 0 или 1 для вектора масштаба). Поэтому будет правильно писать индекс для компонент векторов также, как и для координат — при сделанном нами выборе справа сверху: v^i ; v может быть произвольной буквой, принятой для обозначения того или иного вектора. Или несколькими знаками. Например, для произвольного числа измерений, векторы масштабов удобно обозначать в форме с двумя индексами — e_k^i , где оба индекса меняются в одних и тех же пределах, от 1 до n , но смысл их существенно разный. Верхний индекс указывает номер компоненты масштаба, как и раньше. А вот нижний будет номером вектора среди используемых для измерения масштабов. По сути дела, в данном случае нижний индекс входит в название масштаба. Это могло бы быть проблемой, но при должной аккуратности недостатки такой записи с лихвой компенсируются достоинствами. Нам ведь потребуется в дальнейшем неоднократно использовать масштабы в качестве объектов в некоторых важнейших формулировках нужных нам идей. Формулы будут выглядеть существенно проще с такими обозначениями. Для избежания разночтений, я буду всегда указывать те случаи, когда индекс используется как часть названия вектора или другого объекта (которых у нас появится ещё много разных).

Векторы это новые объекты математики. Их можно рассматривать и в отрыве от того способа, которым мы их определили. Как новую ветвь, новый диалект языка математики.

Как и все иные объекты, которые мы ввели, по самому своему определению, векторы подвержены некоторым операциям, действиям с ними. Вот очевидные операции, результатом которых

снова остаётся вектор:

- Умножение вектора на число. Каждая компонента умножается на одно и то же число.
- Сложение двух и более векторов. Естественно, складываются одноимённые компоненты.
- Сложение вектора с числом. К каждой компоненте прибавляется одно и то же число. Эту операцию лучше не выделять специально, а определить как сложение с умноженными на заданное число всеми векторами набора (“**репера или базиса**”) масштабов. Тогда не будет возникать проблем, если размерности компонент разные.

Легко видеть, что создаваемые такими действиями соотношения между векторами являются **линейными**, в том же смысле как мы применяли этот термин для функций или отношений между масштабами. В математике имеются названия для множеств, объединяющих объекты, которые мы называли векторами, вместе с операциями такого вида. Их называют линейными векторными пространствами, работу с ними называют линейной алгеброй.

Линейная алгебра покрывает также ещё один тип объектов, который естественным образом появляется в нашем описании векторов. Речь пойдёт о **матрицах**.

Нетрудно заметить, что введённые нами векторы, прототипом которых является представление о масштабах, являются совокупностями вполне конкретного количества чисел, равного количеству необходимых для описания данного континуума единиц измерения (которые и сами определяются как специальные, имеющие конкретные значения компонент, векторы). Числа эти, компоненты вектора, равны отношениям вектора к соответствующим масштабам, единицам измерения. Для континуума одного измерения вектор имеет единственную компоненту, для двумерного — две компоненты, для трёхмерного — три, и т.д.

Для каждой размерности с вектором связана соответствующая таблица чисел, которые можно располагать для удобства описания в виде столбцов или строк, составленных из компонент, упорядоченных по номеру масштаба. Мы будем рассматривать компоненты векторов, аналогичных масштабам, именно в виде столбцов. Их компоненты и индекс, который как и у координат пишем вверху справа, будем называть **контравариантными** — v^i . Смысл этого названия я поясню позже. Пока скажу только, что оно появилось как некоторое соглашение, базирующееся на определённом дополнительном свойстве векторных пространств и исторически сложившемся способе введения понятия вектора. Само это свойство (**скалярное произведение векторов**) не является присущим понятию вектора изначально. Что такое

скалярное произведение мы обсудим в соответствующем месте, не сейчас. Название “контравариантный”, как мы увидим далее, оказывается не соответствующим нашему способу описания вектора. Но менять исторически сложившиеся названия не самый лучший выбор. Проще сохранить слово, тем более, что оно латинское и мало кто знает его буквальный перевод (“противопреобразующийся”). Поэтому мы будем его использовать. Только смысл будем вкладывать тот, который соответствует существу дела, а не латинскому значению.

Изображение на бумаге вектора в виде столбца из компонент является нашим свободным выбором, и обусловлено только соображениями удобства. То, что это действительно удобно, можно видеть в соотношениях (2.1—2.8), которые приведены ниже.

При записи всевозможных систем уравнений для координат, компонент векторов, производных одних координат по другим, компоненты векторов и координаты выстраиваются в столбец, там где они оказываются слева (являются определяемыми величинами) в уравнениях. Контравариантный индекс при этом соответствует номеру уравнения (строки) в системе уравнений (естественно, если система упорядочена по номеру сверху вниз, от меньшего номера к большему).

Необходимость добавлять к понятию вектора дополнительное указание “контравариантный” связана с тем, что нам будет также нужно определить аналогичное, но двойственное этому, понятие для другого типа векторов, которые будут называться **ковариантными**. Причём определение это мы будем базировать на естественном свойстве двойственности всех доступных нам операций, которое присуще векторам изначально и не требует выполнения дополнительных условий, не требует возможности сформировать скалярное произведение. Достаточно лишь уже описанных выше линейных операций с векторами.

Связана эта необходимость с понятием о преобразовании векторов при переходе от одной системы координат к другой, от одной процедуры измерения к другой.

Для начала рассмотрим только линейные преобразования координат, уже описанные ранее. В простейшем случае двумерного пространства. Расширение на иное число измерений и иную функциональную зависимость становится явным автоматически, как только мы запишем все соотношения в общей индексной форме.

Пусть новые координаты $\{x^1, x^2\}$ каждой точки, записанные как линейные функции старых координат $\{x^1, x^2\}$ этой же точки, выглядят так:

$$\begin{aligned} x^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + b^1 \\ x^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + b^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Смысл принятых обозначений индексов будет ясен чуть позже, после детального обсуждения, к которому мы и приступим.

Уясним, что же было сделано с процедурами измерений.

1. Начало отсчёта новой системы координат (отмеченной штрихами у индексов) смещено относительно начала отсчёта старой на величины, которые можно записать в виде столбца (этот столбец, вообще говоря, не является вектором, но, при желании, в специальных случаях, может рассматриваться и как вектор; в этом случае его называют вектором смещения начала координат).

$$\begin{pmatrix} b^{1'} \\ b^{2'} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Особых дополнительных пояснений пока не требуется.

2. Измерения новых координат были произведены с помощью двух новых масштабов, $e_1^{i'}$ и $e_2^{i'}$, $i' = 1, 2$, которые, естественно, в новой системе координат всё также имеют своими компонентами единицы и нули в нужных местах ($e_1^{1'} = 1$, $e_1^{2'} = 0$ и $e_2^{1'} = 0$, $e_2^{2'} = 1$). Старые же масштабы, измеренные новой процедурой измерений, имеют теперь совсем другие значения компонент, которые тоже можно выразить как линейные комбинации компонент каждого из старых масштабов e_1^i и e_2^i , $i = 1, 2$, по отдельности, с помощью **тех же самых линейных уравнений**, только без коэффициентов $b^{i'}$:

$$\begin{aligned} e_1^{1'} &= a_1^{1'} e_1^1 + a_2^{1'} e_1^2 = a_1^{1'} \\ e_1^{2'} &= a_1^{2'} e_1^1 + a_2^{2'} e_1^2 = a_1^{2'} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} e_2^{1'} &= a_1^{1'} e_2^1 + a_2^{1'} e_2^2 = a_2^{1'} \\ e_2^{2'} &= a_1^{2'} e_2^1 + a_2^{2'} e_2^2 = a_2^{2'} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вместо старых координат точки в уравнения (2.1) поставлены соответствующие компоненты векторов масштабов. Приведение новых компонент обоих векторов (старых масштабов, которые теперь в качестве компонент имеют вовсе не единицы и нули) к столбцу новых значений сделано с учётом значений компонент старых масштабов в старой системе координат. То, что это векторы старых масштабов указывают нижние, не штрихованные индексы. Я уже писал ранее, что иногда такие индексы буду использовать как часть названия вектора.

Все эти соотношения можно записать гораздо более компактно, приняв определённые соглашения. Я сначала запишу их в новой форме, а потом поясню все эти новые обозначения.

Преобразование координат запишем в общем функциональном виде: $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$. Имея ввиду, что эти функции линейные, выраженные соотношениями (2.1), введём обозначения для

частных производных новых координат по старым $\partial_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = a_i^{i'}$. Частные производные вычисляются также, как и обычные, только по каждой независимой переменной в отдельности. Остальные переменные рассматриваются при этом как постоянные коэффициенты.

Частные производные, все вместе, собраны в специальную таблицу, которую называют **квадратной матрицей**.

$$\partial_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{1'} & a_2^{1'} \\ a_1^{2'} & a_2^{2'} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Слева в записи (2.5) стоит то обозначение для матрицы частных производных, которое является наиболее компактным. Мы его будем далее использовать чаще всего. Такое обозначение является наиболее удобным для геометрии. Потом идёт обычно используемое в различных разделах математики обозначение. Нам такую форму записи применять тоже будет иногда полезно, т.к. в ней смысл этой матрицы виден легче. Следующая затем таблица расписывает в явном виде эти сокращённые обозначения, указывая какие функции по каким переменным дифференцируются, чтобы получить значение для соответствующего места в таблице. В последней матрице (таблице) на соответствующих местах размещены значения частных производных, уже вычисленные в соответствии с (2.1), с тем преобразованием координат, которое мы рассматриваем в этом примере.

В общем случае, количество строк и столбцов в этой квадратной матрице, матрице преобразования координат, равно числу измерений, т.е. числу масштабов, необходимых для описания рассматриваемого континуума. В нашем примере — два измерения, два масштаба, два столбца и две строки.

Обращаю ваше внимание на то, что верхний индекс в используемых мной обозначениях в матрице соответствует номеру строки, а нижний — номеру столбца. Такое соответствие находится в полном согласии с представлением компонент контравариантного вектора как столбца. А так же с привычным для математики способом записи **систем уравнений**. Так в математике принято называть соотношения вида (2.1, 2.3, 2.4) и им подобные. И в дальнейшем будет очень удобным для записи множества соотношений в геометрическом описании мира.

В геометрии очень важно обращать внимание на место индекса в краткой, индексной записи. В частности, в дальнейшем мы будем рассматривать объекты, имеющие, например, два верхних и два нижних индекса. Их тоже можно рассматривать как матрицы, но при этом будет потеряно соответствие между положением индекса и строками-столбцами. В таких случаях нужно специально оговаривать, какой индекс ассоциируется со строкой, а какой со столбцом. Это крайне важно потому, что операции с

матрицами могут, в принципе, прийти в противоречие с допустимыми операциями с этими объектами, как геометрическими понятиями.

Работа с матрицами в математике тоже рассматривается как самостоятельный раздел. Чаще всего, включённый в линейную алгебру. Число строк и столбцов в матрицах общего вида не обязательно должно быть одинаковым. Поэтому и отдельный столбец, и отдельная строка тоже являются матрицами. Когда их число одинаково, то говорят о квадратной матрице. **Элементы матрицы организованы именно как столбцы и строки, для большинства операций, которые определены для матриц, как единых объектов. При этом мы оперируем именно со строками и столбцами, тоже как единичными объектами.** Обратите на это внимание. В квантовой физике эти свойства строк и столбцов матриц быть единичными целыми себя проявят.

Те квадратные матрицы, которые мы ввели, записывающие частные производные новых координат по старым, позволяют легко понять, почему так происходит в их случае. Ведь **в строке собраны все производные одной и той же функции**, одной и той же новой координаты как функции всех старых. А **в столбце — производные всех новых координат по одной и той же старой.**

С матрицами можно производить простейшую линейную операцию — умножение на число (всех элементов матрицы). Матрицы можно складывать, но только одинакового строения. Можно их и умножать, если первый сомножитель имеет ровно столько же столбцов, сколько второй имеет строк. Необходимо это потому, что базой матричного умножения является именно умножение каждого элемента строки первого сомножителя на соответствующий элемент столбца второго, с последующим сложением всех сумм. Получаемый результат занимает в новой матрице место с номерами взятых строки и столбца. Существует жаргонное выражение для правила умножения матриц: “строка на столбец”. Обращаю ваше внимание на то, что **результат умножения матриц зависит от того, какой сомножитель первый, а какой второй.** Даже если матрицы квадратные и одинакового строения.

В качестве примера возьмём две матрицы A_j^i , $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$ и B_l^k , $k = 1, 2$; $l = 1, 2$. Сложить эти матрицы нельзя. А вот умножить A на B можно.

$$C = C_l^i = A \cdot B = A_j^i B_l^j = \sum_{j=1,2} A_j^i B_l^j = \quad (2.6)$$

$$= \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \\ A_1^3 & A_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 \\ B_1^2 & B_2^2 \end{pmatrix} = \quad (2.7)$$

$$= \begin{pmatrix} A_1^1 B_1^1 + A_2^1 B_2^1 & A_1^1 B_2^1 + A_2^1 B_2^2 \\ A_1^2 B_1^1 + A_2^2 B_2^1 & A_1^2 B_2^1 + A_2^2 B_2^2 \\ A_1^3 B_1^1 + A_2^3 B_2^1 & A_1^3 B_2^1 + A_2^3 B_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \\ C_1^3 & C_2^3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Результат умножения матрицы A на матрицу B , матрица C , имеет столько же строк, сколько первый сомножитель, и столько же столбцов, сколько имеет второй сомножитель. В соотношениях (2.6–2.8) первая, вторая и начало третьей строки содержат несколько определений различной формы записи одного и того же. Важной для нас является краткая форма записи суммирования $A_j^i B_l^j = \sum_{j=1,2} A_j^i B_l^j$, которую мы в дальнейшем будем интенсивно использовать. Такая форма записи суммирования часто называется **свёрткой**. Свёртка в геометрических объектах всегда производится только по двум **одинаковым** индексам, **один из которых стоит сверху (контравариантный), а другой — внизу (ковариантный)**.

Нас в дальнейшем будут интересовать не произвольные матрицы, а только такие, которые имеют отношение к измерениям и получающемуся в результате измерений геометрическому описанию мира. Это будут квадратные матрицы, описывающие, в первую очередь, преобразования координат, используемых масштабов (и остальных векторов) и прочих геометрических объектов. Сами векторы, как столбцы (и строки тоже, для ковариантных векторов, которые мы обсудим позже).

Используя принятые обозначения мы можем переписать соотношения (2.3–2.4), связывающие значения компонент векторов масштабов в новой и старой системах координат, гораздо компактнее:

$$e_1^{i'} = \partial_i^{i'} e_1^i, \quad e_2^{i'} = \partial_i^{i'} e_2^i$$

или, для произвольного **контравариантного** вектора v^i :

$$v^{i'} = \partial_i^{i'} v^i. \quad (2.9)$$

Эти соотношения записывают, **как преобразуются контравариантные векторы при преобразованиях координат**. Поскольку они записаны в компактной индексной форме, то соотношения эти справедливы для пространств любого числа измерений.

2.9 Тензоры

Мы увидели что, при описании непрерывного множества (континуума) аналитическими методами, самым естественным образом с каждой точкой континуума оказываются связанными довольно много наборов чисел. Это, в первую очередь, сами координаты. А также производящие их масштабы, описание которых оформляется в понятие контравариантного вектора. Причём описание подразумевает не единственный выбор масштабов, а некоторую свободу в этом выборе. Соответственно, с каждой точкой мы связываем не единственный набор векторов масштабов, а линейное векторное пространство, множество всех возможных векторов одинаковой структуры (с одинаковым количеством компонент). И даже больше. Для того чтобы это пространство было замкнуто относительно базовых линейных операций (сложения и умножения на число), мы добавили в него нулевой вектор со всеми нулевыми компонентами, аналог пустого множества для теории множеств и аналог нуля для теории чисел. Масштабами могут служить те векторы из этого пространства, которые удовлетворяют определённым требованиям на каждый из векторов и на общую их совокупность, необходимую для приписывания **всем точкам разных наборов координат**. Эту совокупность называют **базисом, набором базисных векторов, набором масштабов или эталонов процедуры измерения**. Ещё употребительно название “репер”.

Условия на векторы базиса могут быть как совершенно необходимыми, связанными со свойствами описываемого континуума (непрерывного множества) — таким условием является, например, количество масштабов в наборе, число измерений n . Могут быть и произвольно нами сформулированные условия, например, из всех возможных базисов мы можем ограничивать наше описание только некоторыми, нам удобными базисами. Совокупность, множество систем координат, удовлетворяющих поставленным условиям, называют “группой” **допустимых систем координат**, соответствующее им множество процедур измерений мы тоже назовём “группой” **допустимых процедур измерений**, а преобразования между допустимыми системами координат — **группой допустимых преобразований**.¹⁴

¹⁴Заметьте, что здесь слово группа я иногда ставлю в кавычки, а в одном случае употребляю его без кавычек. Причина в том, что в математике имеется понятие, получившее название **группа**. Его определению в точности соответствует только применение этого слова к преобразованиям координат. Применение этого слова к самим множествам систем координат и процедур измерений является жаргоном. Но жаргоном для меня удобным, слово группа здесь полностью соответствует нашему бытовому языку. Поэтому, в дальнейшем я иногда не буду ставить кавычек в аналогичных случаях. Здесь можно было бы употреблять также математическое понятие “представление группы” преобразований координат, но с ним, по сути дела, та же самая история — не совсем точное соответствие общепринятому в математике определению. Хотя смысл вполне соответствует. Причина моего

Таким образом, с точками континуума оказываются связаны и разные системы координат, и ещё множества (пространства) квадратных $n \times n$ матриц, значений частных производных одних координат как функций других. Эти матрицы называют еще коэффициентами преобразований координат.

Между системами координат и векторами из ассоциированного пространства контравариантных векторов устанавливается соответствие с помощью соотношений (2.9). Говорят, что эти **векторы преобразуются** при заменах (преобразованиях) координат, причём (2.9) и записывает способ (закон) преобразования.

Именно способ преобразования, то каким образом по набору компонент, известному в одной системе координат определяются значения компонент в любой другой допустимой координатной системе, и является главным в определении того или иного геометрического объекта.

Самым простым с этой точки зрения геометрическим объектом является такой, который вообще **не зависит** от выбора координатной системы, от выбора масштабов для измерения координат.

Возможность существования таких объектов вполне очевидна. Если с точкой ассоциированы какие-либо числа, полученные в результате сравнения (измерения) с эталонами, **не входящими в базис для формирования координат**, и эти эталоны остаются теми же самыми при любом выборе базиса, то их независимость от выбора базиса, от выбора системы координат очевидна. Например, в случае одномерного пространства, числовой прямой, на ней могут быть каким-либо образом выделены определённые точки. Скажем, прямая является образом нитки с узлами, на которой мы какой-то узел выбрали за начало отсчёта, а координаты приписываем с помощью измерения расстояния до него, выбирая разные единицы длины. Узлам можно приписать номер вправо или влево (отрицательный) от начального узла. Процедура нумерации независима от процедуры приписывания координат. Номер данного узла остаётся для всех систем координат одним и тем же. Как мы увидим ниже, этот пример весьма важен для нашего описания мира.

А сейчас я лишь дам название для таких геометрических объектов.

Объекты (числа), одинаковые для всех систем координат, не преобразующиеся при преобразованиях координат, называют **скалярами** или **инвариантами**. Ещё их иногда называют **тензорами нулевого ранга**.

Приведу ещё один, очень важный для математики и для нашего описания мира, пример, показывающий каким образом в геометрии появляются скаляры и скалярные функции. Пусть мы

такого “небрежения” заявленным стремлением к точности слов в том, что первичными для описания мира являются всё же наборы масштабов, потом координаты, и только потом преобразования между координатами.

описываем континуум n измерений. И в этом континууме имеется непрерывная линия (прямая, или не очень), т.е. выделенное подпространство **одного** измерения. Мы можем описывать это выделенное подпространство отдельно от вмещающего, с помощью собственного набора возможных масштабов. При описании вмещающего пространства используются свои базисы, свои наборы масштабов. Те, которые используются для описания линии могут даже быть частью общего набора базисов. Но! При совместном рассмотрении линии, как части пространства n измерений, при преобразованиях координат во вмещающем пространстве, **координата, введённая на линии не преобразуется**. Она полагается внутренней, полученной измерением своим, фиксированным масштабом. Для общих преобразований координат эта переменная на линии остаётся неизменной, инвариантной, скалярной функцией точки на линии, а значит, и во вмещающем пространстве. Такая, внутренняя координата называется **скалярным параметром**. Скалярный параметр может быть разным, но для всей совокупности общих координат он всегда фиксирован. Скалярные параметры широко используются в геометрии. Ясно, что при необходимости параметризовать таким образом можно не только подпространство одного измерения, но и нескольких. Лишь бы их число было меньше числа измерений вмещающего пространства n .

Рассмотрим теперь **бесконечно малое смещение** вдоль таким образом параметризованной линии. В терминах скалярного параметра s это будет во всех точках линий бесконечно малое изменение параметра ds . В терминах общих координат на линии появится набор бесконечно малых изменений в функциях координат $x^i(s)$: $dx^i(s)$. Легко видеть, что такой набор бесконечно малых изменений в координатах, рассматриваемых как функции параметра s с точки зрения преобразований общих координат является контравариантным вектором: $dx^{i'} = \partial_i^{i'} dx^i$.

Контравариантным вектором является и набор производных координат по скалярному параметру dx^i/ds :

$$\frac{dx^{i'}}{ds} = \partial_i^{i'} \frac{dx^i}{ds}$$

Этот контравариантный вектор играет значительную роль при описании линий в геометрии. У него имеется специальное название — **касательный вектор**. Значение этого вектора трудно переоценить, мы в дальнейшем увидим, что фактически все величины и соотношения, используемые в геометрии как характерные для классификации различных пространств, так или иначе завязаны на описание поведения этого вектора в малой окрестности выбранной точки. Причину этого довольно легко понять, заметив, что в тех случаях, когда рассматриваемая линия совпадает с **координатной** (т.е. такой, вдоль которой изменяется

только одна из координат), касательный вектор при согласовании внутреннего и внешнего масштабов на этой линии пропорционален самому масштабу. А значит, его поведение это поведение масштаба.

Ещё один вектор, жёстко связанный с касательным, и тоже играющий значительную роль в геометрии, а ещё большую в физике, возникает сразу, как только мы вспомним, что можно рассматривать и вторую сторону введения скалярного параметра — скалярный параметр можно (и нужно!) рассматривать как функцию координат — $s(x^i)$. Соответственно, имеется набор частных производных скалярного параметра по координатам, $\partial_j s(x^i) = \partial s(x^i)/\partial x^j$. Такой объект называют **градиентом** скалярной функции.

Заметьте, что индекс, указывающий, по какой координате берётся частная производная, поставлен справа внизу. Это сделано вовсе не случайно, а для того, чтобы описать существенное отличие такого геометрического объекта, который тоже называют вектором, но только **ковариантным**, от введённых ранее контравариантных векторов. Сходство между этими двумя объектами состоит в том, что преобразуются они похоже, в обоих случаях умножаются на матрицу частных производных одних координат по другим. А различие в том, что контравариантные векторы умножаются на матрицу производных новых координат по старым, а ковариантные — наоборот, старых координат по новым:

$$\partial_{i'} s = \partial_{i'}^i \partial_i s = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \partial_i s \quad (2.10)$$

Обратите внимание на то, что в индексной форме записи геометрических объектов нам безразлично положение сомножителей, какой из них первый, какой второй, правильное произведение определяется положением индексов. Но если мы захотим записать эту формулу в матричной форме, то должны будем поместить **строку** компонент ковариантного вектора слева, первым сомножителем, а матрицу преобразования координат справа, вторым сомножителем. Этот момент полезно запомнить на будущее.

Между градиентом скалярного параметра на линии и касательным к этой линии вектором (по тому же скалярному параметру) существует очевидное инвариантное (справедливое для любой системы координат) соотношение:

$$\partial_{i'} s \frac{dx^i}{ds} = \partial_{i'} s \frac{dx^{i'}}{ds} = \frac{ds}{ds} = 1 \quad (2.11)$$

Это соотношение позволяет ясно понять, почему я говорил о том, что идея ковариантного вектора необходимо появится как

идея **двойственная** к идее контравариантного вектора, который в свою очередь введён как идеализация масштаба, эталона измерения. Скаляр представляет собой такое свойство мира, которое мы введённым масштабом на прямую не измеряем. Это свойство измеряется иным, своим эталоном. Однако, определённое сравнение двух (или больше) по разному измеряемых свойств сделать можно и нужно, так как это могут быть разные свойства одной и той же части мира. Для этого следует отслеживать параллельно изменения в обоих свойствах. Тогда введённый нами касательный вектор есть не что иное как величина, говорящая нам, **сколько наших масштабов приходится на изменение скаляра s , на изменение выделенного нами в особое рассмотрение свойства части мира.** Соответственно, **градиент, ковариантный вектор, это величина, дающая нам количество этого самого свойства, приходящееся на каждый из наших масштабов.** Т.е. ковариантный вектор это величина **удельная**, обратная прямой величине. Об этом и говорит недвусмысленно соотношение (2.11).

Приведу пример, далёкий от, собственно, математики как науки, но зато привычный нам в быту. Деньги это ведь тоже некая часть нашего мира. У них есть разные эталоны — рубль, евро, доллар и т.д. У всяческих предметов есть цена, выраженная в одном или всех этих эталонах. Возьмём рулон ткани. Его мы измеряем в единицах длины — метрах, сантиметрах. Но и цену ткань имеет тоже. Пусть для нас именно цена затмила всё, как это происходит в нашем современном мире. Это для нас главное мерило, наша система координат — что сколько стоит. Тогда длина куска ткани будет в таких координатах скалярным параметром. Соответственно, контравариантным вектором, определённым на куске ткани будет цена, скажем, погонного метра. Вполне ясно, надеюсь? А вот на вопрос, сколько же ткани некто может купить на имеющиеся у него деньги, поможет ответить ковариантный вектор, позволяющий знать, сколько метров (или сантиметров) приходится на его рубль (евро, доллар).

Естественно, все ковариантные и все контравариантные векторы, рассматриваемые как самостоятельные, максимально расширенные пространства объектов такого типа, это уже наше дальнейшее расширение такой базовой идеи.

Вернёмся к геометрии. Между двумя матрицами частных производных одних координат по другим имеется аналогичное условию (2.11) соотношение:

$$\partial_k^{i'} \partial_{i'}^i = \delta_k^i, \quad \partial_i^{i'} \partial_{k'}^i = \delta_{k'}^{i'} \quad (2.12)$$

Естественно, здесь по обоим повторяющимся сверху и внизу индексам по нашему соглашению подразумевается суммирование.

Такие матрицы называют взаимно обратными. Если имеется матрица A , то обратную ей часто обозначают A^{-1} , так как

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Здесь квадратная матрица E имеет на главной диагонали все единицы, а остальные нули ($A_1^1 = A_2^2 = \dots = A_n^n = 1$, $A_j^i = 0, i \neq j$). Введённая чуть выше матрица $\delta_k^i = E = \delta_{k'}^{i'}$ в **любой** системе координат.

Заметьте, что не все произвольные квадратные матрицы имеют обратные им, т.е., как говорят, могут быть обращены. Возможность такого обращения связана с отличием от нуля **определителя матрицы**, специальным образом сформированного из элементов матрицы объекта. Эта возможность напрямую связана с **отсутствием вырождения пространства n измерений в пространство меньшего числа измерений**, а также с **существованием решения системы n линейных уравнений с n неизвестными** и с **понятием линейной независимости векторов**. Обо всём этом мы будем говорить в следующем параграфе.

Ранее, когда мы вводили в рассмотрение какую-либо идею, используя конкретные примеры её реализации, мы часто сразу же расширяли её, добавляя дополнительные возможности, аналогичные описанным, но напрямую не накрытые базовым примером. Так и сейчас, имеются возможности для расширения идеи ковариантного вектора.

- Во первых, зачем ограничиваться только градиентами скалярных параметров? Ведь градиенты, т.е. наборы частных производных **произвольных скалярных функций координат** ничем не хуже. И преобразуются также.
- Во вторых, акцентируем внимание не на происхождении ковариантного вектора, а на связи компонент этого объекта в разных системах координат, т.е. на законе(способе) преобразования векторов. Все наборы величин p_i , которые связаны законом преобразования $p_{i'} = \partial_{i'}^i p_i$, будем называть ковариантными векторами.
- Ну и, для полноты, допускаем возможность обращения всех компонент ковариантного вектора в нуль.

При таком понимании ковариантного вектора вполне разумно будет поставить следующий вопрос: всегда ли, и если нет, то при каких условиях данный вектор f_j является градиентом некоторой скалярной функции? Т.е. существует ли некоторая функция $f(x^i)$, такая, что $\partial_j f(x^i) = f_j$, или, иными словами, является ли ковариантный вектор f_j интегрируемым, таким, что существует $f(x^i) = \int^{x^i} f_j(z^i) dz^j$?

Такой вопрос будет важным в нашем физическом описании мира, и мы будем в соответствующих местах обсуждать его подробно.

Сейчас мы объединим наше понятие о двух типах векторов в единое понятие **тензора** первого ранга.

Это такой набор величин, такой геометрический объект, компоненты которого в разных системах координат связаны с помощью умножения на единственную матрицу частных производных одних координат по другим. Не важно, старых по новым, или наоборот. Важно только то, что такая матрица одна. Это обозначают слова “**первого ранга**” в нашем определении. Слово тензор я поясню чуть позже. Мы оставляем также за такими объектами и общее наименование “вектор”.

Понятно, что у тензора первого ранга рабочим является только один индекс, контравариантный или ковариантный. Однако, нужно подчеркнуть, что именно закон преобразования здесь важен, а не только число индексов. Существуют геометрические объекты, выглядящие при записи точно также, как и векторы, но векторами (и тензорами вообще) не являющиеся. Один из таких примеров вы уже знаете — это сами координаты точки x^i .

Хотя при определённых ограничениях на допустимые системы координат (допустимые преобразования) и с координатами можно обращаться как с контравариантными векторами. *Это будет иметь место при ограничении преобразований координат только линейными функциями старых координат.* Обычно пространствам, которые удовлетворяют такого рода ограничениям, естественным или искусственным, в геометрии даются специальные названия. При ограничении только линейными преобразованиями пространство называют **линейным** или **аффинным**. Вспомните линейное векторное пространство, упоминавшееся выше.

Коль скоро мы ввели понятие тензор, да ещё с уточнением ранга, для уже определённого нами понятия “вектор”, значит для этого имеются причины. Они действительно имеются. В геометрии естественным образом возникают геометрические объекты с **несколькими** индексами, располагающимися, в соответствии с их смыслом, либо справа вверху, либо справа внизу. И преобразующиеся при преобразованиях координат умножением **только** на те же самые матрицы частных производных, прямую и обратную. Речь идёт об объектах, преобразующихся, например, вот таким способом:

$$\text{Тензор } T_k^{ij} : T_k^{i'j'} = \partial_i^{i'} \partial_j^{j'} \partial_k^k T_k^{ij} \quad (2.13)$$

По количеству индексов их и называют тензоры первого, второго, третьего и т.д. ранга. Тензор T_k^{ij} в (2.13), очевидно, является тензором третьего ранга. Помимо ранга уточняют число тех или иных индексов — в этом случае дважды контравариантный и один раз ковариантный.

Как и все вводимые нами числа, компоненты тензоров имеют свои размерности. Их легко определить: каждому контравариантному (верхнему) индексу соответствует размерность такая же, как у соответствующей координаты, а каждому ковари-

антному (нижнему) — размерность координаты в минус первой степени. Например, если первая координата выражена в сантиметрах, то значение 1 для каждого контравариантного индекса даёт в общую размерность компоненты множитель $[cm]$. А каждый ковариантный индекс, равный единице, вносит множитель $[1/cm]$.

Легко проверить, что при преобразованиях координат размерности компонент тензора общего вида переопределяются надлежащим образом.

Что общего во всех тензорах, такого, что они получили единое название — тензор? Общим является именно закон преобразования, его ограничение матрицами производных только первого порядка. В определённом смысле все тензоры являются линейными результатами измерений какого-то свойства мира порождающими данную систему координат масштабами. Собственно, именно это и является причиной нашего внимания к этой идее.

Тензоры каждого определённого строения можно рассматривать как принадлежащие к ассоциированному с каждой данной точкой пространству, которое при определённом подходе можно также трактовать как дополнительное линейное векторное пространство большего (зависящего от строения тензора) числа измерений. В дальнейшем, в нужных нам случаях, мы будем тоже пользоваться такими методами. Соответственно, тензоры **одного и того же строения** можно складывать и умножать на скаляр. Это справедливо только для компонент, определённых в одной и той же системе координат. Имеют смысл выражения вида $T_i + P_i$ и не имеют смысла выражения вида $T^i + P_i$. Соотношения вида $T_i + P_{i'}$ тоже не имеют смысла, так как индексы принадлежат к разным системам координат.

Легко видеть, что введённые в (2.12) символы δ_k^i тоже обозначают тензоры. Это тензоры особенные, существующие для любой системы координат и в любой точке континуума. Их компоненты всегда, в любой системе координат одни и те же — все нули, кроме единиц на главной диагонали. В самом деле, $\partial_i' \partial_{k'}^k \delta_k^i = \partial_i' \partial_{k'}^i = \delta_{k'}^i$, в соответствии с определением (2.12). Тензор этот, очень часто используемый в геометрии, носит специальное название — **тензор Кронекера**. А матрица E , которая при необходимости может быть записана не только с парой верхний и нижний индексы, но и с парой верхних, или с парой нижних, носит название **символ Кронекера**, поскольку в этом случае она уже не будет соответствовать тензору, одинаковому во всех системах координат. Какой-либо тензор с такими парами индексов может принимать значения, равные символу Кронекера, только в одной системе (или в их ограниченном подмножестве, при специальных условиях на координаты).

Тензоры разного строения можно умножать, так что получается снова тензор, но уже другого строения, учитывающего строение сомножителей: $T_{ik}^j = P_i V^j U_k$. При умножении, и про-

сто в тензоре, можно также осуществлять **свёртку** по парным индексам, как мы это делаем при записи закона преобразования:

$$T_{ik}^k = T_i; \quad T_i = P_i V^k U_k$$

Результат всегда является тензором на два ранга (на два индекса) меньшим. То, что все эти соотношения не зависят от выбора системы координат, легко проверить прямым вычислением, с учётом законов преобразования вовлечённых в эти соотношения тензоров.

В этой связи посмотрите на левую часть соотношения (2.11). Это как раз запись такой свёртки. А результатом является скаляр единица. Этот пример предлагает расширить понятие тензора, включив в него и скаляры, чтобы результат свёртки оставался всегда тензором. Что мы уже и сделали в начале этого параграфа, дав скаляру (инварианту) дополнительное название тензора нулевого ранга, т.е. не имеющего индексов, а значит не преобразующегося совсем.

Полезно сказать несколько слов о размерности скаляров. Размерностью скаляров могут служить названия самых разных масштабов, самое главное, чтобы они не были включены в набор процедур измерения, производящих системы координат для данного континуума. Если даже масштаб скаляра и совпадает с каким-то из используемых координатных масштабов, то это должно быть оговорено специально. С точки зрения преобразования системы координат скаляры — безразмерные числа.

Имеется и особый случай, когда мы будем использовать некоторые скаляры (и не только скаляры!) именно как полноценно безразмерные числа. Т.е. будем рассматривать числа точно так, как это делают при классическом подходе к математике. Это, например, как раз справедливо для правой части соотношения (2.11). Единица здесь констатирует тот факт, что ей равно отношение **любого** объекта к самому себе. Размерность в этом случае тоже есть, но она формулируется именно как “любой”, “не важно что”. Такие числа действительно можно складывать не заботясь об их конкретном происхождении. Вот в таких случаях мы и будем говорить о совершенно безразмерных числах. И не только отдельных числах, но и о числовых функциях. Мы будем использовать некоторые специальные функции как такие, стандартизованные математические объекты. Они могут полагаться как безразмерными (т.е. любой размерности), так и имеющими некоторую, строго определённую размерность там, где это требуется по смыслу.

Заметьте, что и компоненты тензора Кронекера с этой точки зрения являются полноценно безразмерными числами. Это ведь набор всех отношений для каждого вектора базиса к самому себе, собранных в единый геометрический объект. В некотором смысле, это безразмерная единица для базиса в целом.

Хочу также обратить ваше внимание, что коэффициенты преобразования $\partial_i^{i'}$ тензорами не являются. Это “промежуточные” между системами координат объекты. Однако, они вполне могут рассматриваться как векторы и тензоры в специальном пространстве квадратных матриц, описывающих возможные преобразования общего вида, если там вводятся свои координаты. Так мы тоже будем делать. Все компоненты в этих матрицах тоже имеют размерности, но не отношений к масштабам какой-то одной системы координат, а соотношений между масштабами из разных базисов, например, метр/сантиметр, дюйм/сажень и им подобные.

2.10 Координаты регулярные и сингулярные. Мера

В §2.8 мы подробно рассмотрели процедуру измерения на одномерном континууме, способ приписать координаты непрерывной прямой линии при наличии в наших руках инструмента, масштаба, внешнего для этой линии, независимого от неё. Твёрдой линейки, которую мы можем переносить вдоль линии и прикладывать к ней в любом месте, чтобы произвести сравнение отрезков на линейке и на линии.

Метки на такой линейке расположены, по определению, на одинаковых расстояниях друг от друга. А если мы воспользуемся линейкой с неравномерной шкалой, например логарифмической? Можно ли это делать? Наверное можно, раз мы это делаем. Я думаю, вам не раз приходилось видеть такого рода графики, такого рода представление данных. Если нет, то найти что-нибудь на эту тему сегодня в интернете не проблема. Вот только что за координаты мы получим в этом случае? Вроде бы вполне приемлемые. Да, приемлемые, вот только не для всех точек прямой. В чём проблема?

Обратимся к простейшему случаю преобразований координат на прямой линии. Мы можем сместить начало отсчёта направо или налево от выбранной ранее в качестве нуля точки. Новые координаты будут также хороши, как и раньше. Мы можем увеличить или уменьшить в **любое** число раз наш масштаб, отрезок, которому приписано значение единица. Т.е. умножить координаты на произвольное действительное число. И снова координаты будут “хорошими”, “регулярными”, т.е. будут находиться с точками нашего континуума во взаимно однозначном соответствии.

Действительно ли **произвольное действительное число** годится как отношение одного масштаба к другому? Нет. **Число ноль превратит наш отрезок в точку**, обнуляя его меру, его длину. Континуум одного измерения выродится в точку, множество измерения ноль.

На преобразования координат в одномерном случае имеется

ограничение. Новая координата может быть непрерывной функцией старой, с непрерывно меняющимся от точки к точке масштабом. Но ни в одной точке масштаб не должен обращаться в нуль. В одномерном случае вектор масштаба имеет всего одну компоненту, которая при преобразовании координаты умножается на производную новой координаты по старой. Именно эта производная нигде не должна обращаться в нуль, если мы хотим оставаться в наборе, “группе” **регулярных** координат. Таких, где **каждой точке сопоставлена единственная координата**.

Заметим, что и производная старой координаты по новой тоже не будет в этом случае нигде нулём. Т.е. **преобразование координаты будет обратимым в любой точке прямой**. А вот при обращении производной где-то в нуль преобразование координаты будет в этой точке уже необратимым. Легко понять, что это значит. Отрезок в нуль, в принципе, мы можем “стянуть”. А вот точку “растянуть” в **тот же отрезок** уже нет. Полностью потеряна информация об исходном отрезке.

Посмотрим теперь, что происходит, если вместо линейного преобразования координаты мы возьмём логарифмическую функцию имеющейся координаты (по любому основанию). Начало новой системы координат окажется в том месте, где в старой была единица. Все точки со старыми координатами, большими единицы, будут иметь положительные координаты и никаких особых проблем с их описанием не возникнет. А вот интервал точек с координатами меньше единицы, но больше нуля, растянется в ничем неограниченную отрицательную половину числовой прямой. При стремлении старой координаты к нулю новая координата устремляется в отрицательную бесконечность. Получается, что половина континуума, описываемая прежней системой координат полностью выпадает из рассмотрения. Отрицательной полупрямой старой числовой оси не находится места на новой.

Какие выводы мы можем сделать из анализа этого примера?

- Нуль в определённом смысле двойственен бесконечности. В принципе, возможно расширить операцию деления для действительных чисел, сделав допустимым деление на нуль, понимая под результатом предел последовательностей деления единицы (или любого конечного числа) на числа, неограниченно приближающиеся к нулю (уменьшающиеся). Если со стороны положительных чисел, то результат определяется как положительная бесконечность. Если со стороны отрицательных — то как отрицательная. В обоих случаях, если процесс полагается незавершённым, то речь идёт о потенциальных бесконечностях. Если завершённым — то об актуальных. Соответственно, с точки зрения преобразований координат, обращение производной в данной точке и в нуль, и в бесконечность (для обратного преоб-

разования это был бы нуль) является, вообще говоря, не допустимым.

- По умолчанию, когда мы производим измерения, мы предполагаем, что внешний масштаб при переносе от точки к точке вдоль непрерывной линии равен самому себе. Это верно для любой данной системы координат, уже введённой на непрерывном множестве. В обеих рассмотренных нами системах единственная координата меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Из этого следует вывод, что внутренний взгляд на координату не позволяет с достаточным основанием утверждать, что именно эта система координат является для непрерывного множества регулярной, полноценно его описывающей.
- Имеется две возможности выхода из данной ситуации:

1. Полагать всегда, что внутренняя точка зрения (равенство масштаба самому себе везде) не является истинной в последней инстанции. Поэтому **допускать по определению, что масштабы могут изменяться от точки к точке**, и нужно принимать во внимание не единственную систему координат, а всевозможные. Здесь возникает необходимость расширить наше описание не просто введением координат, а указанием, как же мы описываем изменение масштабов. В нашей нынешней конструкции пока об этом ничего не сказано. Соответственно, все геометрические объекты (кроме координат) нельзя сравнивать между собой даже для бесконечно близких точек.
2. Описывать континуум не одной координатной системой, а несколькими. Так, чтобы их области действия перекрывались, и в области перекрытия преобразования были гарантированно регулярными.

- В математике делают разграничение в геометрических понятиях на этом этапе. Если введены координаты и только, то такой геометрический образ континуума называют **многообразием**. Если добавлено описание изменений в масштабах, то геометрический образ называют **пространством со связностью**.

Ещё одна проблема возникает в том случае, если мы попытаемся ввести таким образом систему координат на замкнутой непрерывной линии. Например, на окружности. Достаточно естественно отметить какую-либо точку как начало отсчёта, а потом измерять расстояния вдоль окружности, приняв за единицу какой-нибудь кусочек дуги. Где будет проблема? Отображение на числовую прямую будет многократным накрытием нашего континуума. **Одни и те же точки получают бесконечное число разных координат**. Какой будет вывод?

Отнюдь не для всех континуумов регулярные описания являются отображениями на полноценную числовую прямую. Это тоже нужно будет учитывать в дальнейшем, так что к обсуждению этой проблемы мы вернёмся позже.

Теперь отступим немного назад, к описанию того качества, которое и отличает непрерывное множество от дискретного. То качество, которое мы используем как основу измерения непрерывных множеств. В случае прямой (или просто линии) мы называли это качество, свойство линии длиной, размером. Координата это удобный способ говорить о длинах на линии. Основа этого понятия — конечная длина отрезка. Для прямых и абсолютно жёстких линеек, чуждых измеряемой линии и используемых в качестве эталона для измерения отрезков на прямой, этого достаточно. Но мы уже расширили наше представление об измерении на одномерных континуумах гораздо дальше, чем позволяют делать без проблем исходные наши послышки. Акцент сместился на общее, подходящее для любых непрерывных линий (одномерных континуумов). Измерение стало локальным, привязанным к каждой точке, а связи между точками ещё нуждаются в описании. Соответственно, требуется уточнить, что в таком общем случае произошло с нашей мерой на одномерном континууме. Масштабы, исходная сторона измерения, декларируются внешними, чуждыми, изображаются контравариантными векторами. А что на самой линии? Ведь у неё-то остаётся то самое качество, свойство, которое описывается “мерностью”.

В случае единственной “мерности” всё очень просто. С одной стороны, сама координата описывает мерность. Казалось бы — разность координат даёт длину отрезка. Слишком просто. Не учитывается возможное изменение масштаба от точки к точке. Что для одномерного континуума на самом деле не существенно. Логика последующих рассуждений нам нужна для понимания ситуации при большем числе измерений.

Обратим внимание на то, что мы уже имеем локализованный, привязанный к каждой точке размер, местную меру на самой линии. Это не что иное как вектор бесконечно малого смещения по нашей координате dx . Это и есть **локализованная мера** для одномерного многообразия. Дифференциал. Конечную меру для любого отрезка на линии (от x^0 до x^1) мы тогда определяем действием, обратным дифференцированию — интегрированием:

$$x^1 - x^0 = \int_{x^0}^{x^1} dx$$

. Для одномерного пространства результатом так и будет разница в координатах. Но даже для одномерного пространства может потребоваться определить содержание какого-нибудь скаляра, распределённого вдоль линии, на заданном отрезке, от x^0 до x^1 . Например, скалярного параметра s . Причём зависимость

этого скаляра от точки нелинейна. Вот здесь введённая нами локальная мера и становится совершенно необходимой. Ответ на такой вопрос даёт всё тот же интеграл по локальной мере, от точки до другой точки. Только интегрируется не “чистая” мера, а “нагруженная”. Мера умножается на производную скаляра по координате. По нашему определению интеграла это как раз то, что нам и нужно:

$$s(x^1) - s(x^0) = \int_{x^0}^{x^1} ds/dx \cdot dx = \int_{x^0}^{x^1} ds$$

И по смыслу это действие должно быть легко понято. Производная скаляра по координате это ковариантный вектор, удельная (приходящаяся на меру) величина. Её мы интегрируем, восстанавливая саму величину, скалярный параметр. Заметьте на будущее — мы *интегрируем по мере удельную, отнесённую к мере, величину*. Это означает, что при интегрировании мы складываем скаляры, инварианты с точки зрения разных систем координат. Этим нейтрализуется возможное изменение единицы измерения, производящей систему координат.

Нужно напомнить одно свойство меры, на которое в случае одномерного пространства внимание обращают обычно мало. Мера, и конечная, и локальная имеют ориентацию. Для одномерного пространства ориентация сводится к изменению знака результирующего расстояния, если в записывающем его интеграле начальную и конечную точку интегрирования поменять местами. Этот знак меняется также и при замене системы координат таким образом $x \rightarrow -x$. Это свойство меры, менять знак при определённых преобразованиях координат и даёт основания называть такие меры ориентированными. В ряде случаев в математике рассматриваются и меры, не имеющие ориентации, т.е. не меняющие знак ни при каких допустимых заменах координат. Хочу ещё напомнить, что локализация меры ни в какой форме не отменяет существование в каждой точке описываемого одномерного континуума и конечной меры, равной по определению единице длины. Конечная и локализованные меры сосуществуют.

Сейчас мы перейдём к различным способам введения координат для двумерного пространства. Случай одномерного не позволяет затронуть все необходимые стороны описания. А вот увеличение числа измерений до двух позволяет это сделать. Дальнейшее увеличение числа измерений вводит количественные различия в описании координат, но не качественные.

В качестве исходного, более простого для изложения случая всё делаем на плоскости, и полагаем евклидову геометрию справедливой и нам уже известной. Последнее не является необходимым, но служит для облегчения понимания логики каждого этапа введения координат для двумерного пространства.

Начнём с уже опробованной процедуры измерения вдоль одной, произвольно выбранной прямой. Имеем начало координат, помеченное на этой прямой значением $x^1 = 0$ и для всех точек этой прямой то или иное значение координаты x^1 . Масштаб, которым мы измеряли расстояния, приписывая точкам прямой координату, изображается вектором e_1^i , $i = 1, 2$; $e_1^1 = 1, e_1^2 = 0$. Это образ линейки, которая полагается внешней для плоскости. Вторая координата, процедуру измерения которой мы пока ещё не ввели, для всех точек уже рассмотренной прямой, по определению, полагается равной нулю. Эта прямая, с координатами $\{x^1, x^2 = 0\}$, носит название первой координатной оси, оси x^1 . Или координатной линии, определяемой условием $x^2 = 0$.

Вторая координатная ось, ось x^2 , тоже прямая, с координатами $\{x^1 = 0, x^2\}$, где вторая координата будет результатом измерения масштабом e_2^i , $i = 1, 2$; $e_2^1 = 0, e_2^2 = 1$, должна тоже проходить через начало отсчёта. Нам нужно выбрать второй масштаб и направление второй оси, для того, чтобы можно было начать определение координаты на второй оси.

Линейку свою мы можем приколоть одним концом (там, где на линейке нуль) в начале координат и поворачивать её влево от оси $\{x^1, x^2 = 0\}$. Она ведь внешняя для плоскости (но движение её полагается именно в плоскости). Вторым концом линейки, имеющий метку единица, опишет при этом кривую линию, которую замкнёт на оси x^1 , в том же месте, откуда и ушёл — в точке $\{x^1 = 1, x^2 = 0\}$. Все точки этой кривой, называемой окружностью, находятся на одном и том же расстоянии от начала координат, равном длине нашего масштаба, т.е. единице. Гарантируется это тем, что линейка является внешней для плоскости, и при повороте её длина не изменяется. Изменяется только **направление** масштаба.

- Главная особенность этой линии как целого — её замкнутость. В этом её принципиальное отличие от числовой прямой.
- Вторая особенность это то, что расстояние всех точек линии от начала координат на плоскости одинаково. Свойство это для самой линии является внешним, а потому средствами, имеющимися только на ней самой, не может быть проверено. Поэтому оно менее существенно.

Отношение длины окружности к её диаметру для окружности любого диаметра (радиуса) одно и то же, и равно известному иррациональному числу π . Число это и было изначально определено как такое отношение. Обращаю ваше внимание — для любого радиуса. У нас окружность имеет радиус единица, значит длина её равна 2π . Но единица чего? Метров, сантиметров, дюймов? Радиус равен одному масштабу, а масштаб мы можем выбрать любой, какой нравится. А *длина построенной нами*

окружности будет одной и той же для всех систем координат, 2π . Это инвариант, скаляр. Причём скаляр размерности “любой длины”. Так мы вводим ещё одно безразмерное (для геометрии) число π . Ну и получающиеся из него числа с дополнительным множителем.

Далее, заметим, что наша исходная ось x^1 делит эту окружность на две равные части, каждая длиной π . Начало отсчёта, в свою очередь, делит отрезок на оси внутри окружности тоже пополам, слева единица (отрицательная в координатах) и справа единица (положительная в координатах). Для того, чтобы продолжить построение системы координат, полностью описывающих нашу плоскость, нам необходимо выбрать направление второй оси. **Удобно** выбрать это направление так, чтобы все четыре куска окружности, получающихся в результате пересечения с ней обеих осей были равны друг другу. **Удобно** также, чтобы и те части на оси x^2 , которые отсекаются окружностью и началом координат тоже были равны единице. Этим мы фиксируем масштаб e_2^i полностью. Проводим измерения вдоль прямой $\{x^1 = 0, x^2\}$. Ось x^2 определена полностью. Далее процедуру измерений для двумерного пространства, необходимую для ассоциации с каждой его точкой разных координат, можно описать, например, так:

- Смещаемся по оси x^1 на **бесконечно малую величину** dx^1 ($x^2 = 0$).
- Смещаем вектор масштаба e_1^i (нулевой отсчёт нашей линейки) в эту точку.
- Строим окружность поворотом линейки.
- Проводим измерения вдоль прямой $\{x^1 = dx^1, x^2\}$. И так далее

С помощью этой процедуры можно приписать разные координаты всем точкам плоскости. Да, для этого нужно бесконечно много измерений. Но мы ведь формулируем идею, и понятие потенциальной бесконечности уже есть среди наших идей как одна из рабочих. Так что и эта идея вполне рабочая. Не сможем довести до нужной полноты на практике? Ну что ж, далее я обязательно приму все подобные проблемы во внимание, при обсуждении основ физики. А для математики годится.

Построенная нами (в идеале) система координат удовлетворяет всем предъявляемым к ней требованиям — каждой точке двумерного континуума поставлены в соответствие **разные** пары чисел, координаты $\{x^1, x^2\}$. И наоборот тоже. Каждой различающейся паре чисел соответствует своя точка непрерывного множества. Континуум описан полностью, значит координаты правильные, **регулярные**. Ещё довольно часто такие координаты называют Декартовыми.

Эта система координат позволяет нам ввести ряд идей весьма полезных для описания как самого континуума, так и для описания наших возможностей в выборе систем координат.

Начнём с понятия угла между линиями и меры для него. Угол между пересекающимися и не совпадающими прямыми, для начала, между осями координат x^1 и x^2 , мы определим как **длину куска окружности, построенной вращением единичной линейки налево, как мы это делали при построении координат, и отсекаемой этими прямыми**. Между осями есть четыре куска, все они по построению равны, соответственно, равны они $\pi/2$. Такой угол называют “прямой”, а о положении прямых относительно друг друга говорят, что они **ортогональны** (или “перпендикулярны”).

Ещё для измерения углов употребляется деление всей окружности на 360 частей, которые называют градусами. Но для физики больше подходит использование числа 2π в качестве меры полного (описываемого полным поворотом, с возвращением на начальную прямую) угла. Вы уже видели, что это особый, безразмерный скаляр в геометрии, причём для неё естественный. Поэтому я буду использовать только такие единицы для измерения углов.

Хочу сделать одно важное замечание. Хотя единица измерения угла и опирается напрямую на измерение длины, но с точки зрения системы координат, она оказывается оторванной от координатного расстояния. Мера угла у нас базируется на скаляре, причём безразмерном скаляре. Измерение углов определено как внешнее, дополнительное к основной процедуре измерения. Для превращения угла в настоящую длину (координатную) необходимо знать ещё и длину “радиус-вектора”, ведущего из начала координат к той части окружности, длину которой требуется определить по опирающемуся на неё углу.

Для обозначения углов обычно используются маленькие греческие буквы — α, β, ϕ . Иногда и другие, или одна из таких букв с индексами.

Мы вращали линейку влево от оси x^1 , определив таким образом начало отсчёта для измерения углов и положительное направление для их величин. Соответственно, отрицательными углами будут углы, полученные вращением направо. Ну и нулевое значение угла соответствует отсутствию вращения вообще, т.е. совпадению двух прямых.

Понятно, что ничто не мешает нам продолжать вращать линейку, что влево, что вправо, и после повторного совпадения с осью x^1 . Условимся к таким углам добавлять 2π , умноженное на сделанное количество поворотов. Один поворот — $0 \pm 2\pi$, два поворота — $0 \pm 4\pi$, и т.д. Таким **соглашением** мы позволяем углам пробегать всю числовую ось, принимать любые действительные значения. При таком соглашении должно быть понятно, что точки на прямой значений угла, отстоящие от нуля на

расстояние (число), кратное (т.е. с целым коэффициентом) 2π , совершенно одинаковы с точки зрения смысла угла. Они **периодически** повторяются. Более того, периодически повторяются даже не точки, а отрезки $\{0, 2\pi\}$. Эта периодичность на прямой значений угла искусственная, обязанная своим наличием нашему определению этой прямой. Дополнительное свойство прямой, описывающей угловую меру.

Эта периодичность значений угла, как функции обычной числовой прямой, не единственная. Рассмотрим поведение двух координат точки на конце единичной линейки, которую мы поворачиваем. Ведь теперь у нас есть система координат и мы можем проследить за этими изменениями. Пусть угол поворота обозначен как α . Тогда координаты конца линейки, \bar{x}^1 и \bar{x}^2 , будут некоторыми периодическими функциями переменной α .

Это весьма важные для геометрии функции и они получили специальные названия — синус и косинус: $\bar{x}^1(\alpha) = \sin \alpha$, $\bar{x}^2(\alpha) = \cos \alpha$. Они находят своё применение в самых разных разделах математики (и физики тоже), так что важность этих функций для нашего описания мира переоценить трудно. Эти две функции не являются независимыми друг от друга. Вспомним, что в построенной нами системе, координаты \bar{x}^1 и \bar{x}^2 можно сравнивать и даже складывать, т.к. длина второго масштаба та же самая, что и первого (одна линейка, хотя и повёрнутая). Правда, что получится при простом сложении не очень понятно. Но вот одно соотношение, теорема Пифагора, смысл в этом случае имеет. Гипотенуза у нас это сама единичная линейка. А координаты это катеты прямоугольного треугольника. Поэтому, в такой системе координат, соотношение $(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2 = 1^2 = 1$ имеет смысл.

Мы не требуем от всех других систем координат, чтобы это соотношение выполнялось для координат какой-либо точки. Но вот на введённые функции, \sin и \cos , это условие наложим. Мы сделаем его частью определения этих функций: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ для всех углов **по определению**. (Если эти функции зависят от единственной переменной, то скобки вокруг неё обычно опускают.) По сути дела, это и есть определяющее эти функции совместно условие.

Помимо этих двух функций вводятся и используются ещё две, с ними связанные: $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ и обратная функция, $\cot \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$. Та часть математики, которая изучает поведение этих функций, называется тригонометрией. Отмечу также, что тригонометрические функции для нас будут как раз примером тех стандартных, специальных функций, которые при необходимости могут рассматриваться как безразмерные числовые функции, хотя могут быть и размерными. Также как и их аргумент, угол, который мы чаще всего и будем рассматривать как скалярный (безразмерный для системы координат) параметр. При рассмотрении зависимостей от размерных чисел это приведёт к необходимости приведения аргумента к скалярному

виду с помощью умножения размерной переменной на подходящий удельный множитель. Также как и при интегрировании по локализованной мере.

Для одномерного пространства мы ввели локальную меру, dx , как расширение идеи меры конечной, понятия длины, которое и отличает одномерный континуум от дискретного множества. В евклидовой геометрии на плоскости вводится своя мера, отличающая плоскость от прямой. Эта мера называется “площадь”. Она не совсем независима от длины, поскольку вводится как произведение двух длин, двух сторон прямоугольника. Это конечная мера. Размерность её будет равна произведению названий масштабов. Если масштабы полагаются одинаковыми, как в нашем построении, то это будет квадрат единицы длины. Например, cm^2 . А сама площадь произвольного прямоугольника, как число, будет отношением к единичной мере площади. Конечной и ассоциированной с каждой точкой двумерного пространства. Единица площади должна поэтому представлять собой некоторое произведение двух масштабов, e_1^i и e_2^j . Это произведение должно давать нам **единственную** величину, равную единице площади по определению, возможно снабжённую знаком, отражающим наличие у общего понятия меры такого свойства, как ориентация. Более подробно на способе введения меры как произведения векторов я остановлюсь в следующем параграфе.

Локализовать конечную меру можно, следуя той же идее, что мы использовали для линии. Заменяем длины конечные на бесконечно малые смещения, получаем локализованную меру для прямоугольника, образованного в данной точке этими двумя смещениями: $dS = dx^1 \cdot dx^2$.

Так же как и для одномерного случая, конечная мера получается интегрированием локальной:

$$S = \int_{x_0^1}^{x_1^1} \int_{x_0^2}^{x_1^2} dx^1 dx^2 = (x_1^1 - x_0^1)(x_1^2 - x_0^2).$$

Здесь каждый интеграл берётся по единственной переменной, как будто бы второй нет (рассматривается при этом как постоянный параметр). Индексы у координат внизу отмечают разные точки (точку 0 и точку 1). Заметьте, что эта мера также является ориентированной. При замене точек начало \leftrightarrow конец интегрирования для **одной** из координат она меняет знак. А вот если сделать это для обеих координат одновременно, то знак не меняется. Такое поведение новое, связанное с тем что число измерений теперь увеличилось. Ещё хочу обратить внимание на то, что для двух измерений и больше становится важным отслеживать порядок координатных индексов. Вспомним, что мы начали с первой оси, а вторую определили с помощью поворота влево. При этом мы приписали положительный знак соответствующим

углам поворота. Т.е. порядок следования координатных индексов 1,2 соответствует положительной ориентации системы координат. И наоборот. Если мы перейдём в систему координат, в которой просто переобозначим координаты, $x^{1'} = x^2$, $x^{2'} = x^1$, то таким образом мы изменим их порядок следования и знак угла. То же произойдёт, если мы заменим для любой из координат знаки плюс на минус. Координаты различают “лево” и “право” от начала отсчёта, а также “лево” и “право” для поворотов, углов. Это различие и называется ориентацией. Ориентация меняется при любом единственном изменении либо направления отсчёта координаты вдоль оси, либо порядка следования осей. Соответственно, если (при числе необходимых для описания координат большем или равном двум) такое преобразование делается для чётного числа координат, то ориентация не меняется.

Важно понимать также, что положительное значение меры, положительное значение ориентации системы координат мы ей приписываем сами, своим произвольным выбором. Выбор этот мы уже сделали — положительная ориентация, положительный порядок индексов мы связали с левыми поворотами. И минусовые значения координат мы помещаем слева от точки отсчёта. Это соглашение, которому мы следуем всегда. Но всё равно это только соглашение. Однако, один раз принятое, это соглашение и определяет, какие системы координат будут иметь положительную (совпадающую с принятой), а какие — отрицательную ориентацию. Это замечание стоит запомнить, поскольку оно напрямую связано с различием “левого” и “правого” в нашем описании мира, в физике.

Расширим идею локальной меры на пространство n измерений. По определению, такая локальная мера (которую часто называют объёмом не только для трёх измерений) записывается как $dV = dx^1 dx^2 \dots dx^n$. В индексной форме это будет специальное произведение векторов бесконечно малого смещения dx^i , в котором порядок индексов играет роль. Об этом подробнее в следующем параграфе. Для такого континуума n -кратный определённый интеграл, вычисляемый так же как и в двумерном случае, полагается объёмом области, ограниченной выделенными точками (одно измерение), прямыми (два измерения), плоскостями (три измерения) и т.д., в любой данной системе координат. Локальная мера, или бесконечно малый объём n -мерного пространства (конечный объём тоже) также имеют, как и все числа в нашем описании мира, свои размерности. Естественно, зависящие от числа измерений континуума. Эти размерности равны, согласно определению, произведению размерностей (названий) **всех** единиц измерения, всех масштабов. В частном случае одинаковых по величине масштабов, например, сантиметров (но с разными направлениями), размерностью объёма пространства n измерений будет $[cm]^n$.

Внимание! Для разных систем координат эти объёмы

(и локализованные, бесконечно малые, тоже), в общем случае, могут отличаться. Как конкретно это отличие проявляется мы обсудим позже.

Заметьте также, что мера, как свойство континуума, различающее количество его измерений, явно определяется с помощью **независимых связей между $n + 1$ точками** континуума n измерений.

Посмотрим теперь, что в нашей процедуре построения системы координат обязательно, а что обязано своим существованием только нашим предпочтениям, нашему выбору, произвольному, или обусловленному соображениями удобства.

- Точка, в которую мы поместили начало отсчёта. Выбрана произвольно. Если система координат уже построена, то в этой системе координат можно к каждой из координат всех точек прибавить произвольные числа (в общем случае разные) и получить **новую систему координат, начало отсчёта которой будет находиться в другой точке континуума**. Сдвиг, смещение начала координат (отсчёта) записывается как преобразование координат вида: $x^{i'} = x^i + x_0^i$, где x_0^i те самые числа, которые прибавляются. *Обратите внимание, что реально, ни сам континуум, ни что-нибудь в нём имеющееся, никуда не сдвигаются. Изменяются координаты, числа, приписанные его точкам. Это важно! Вспомните, что мы уже ввели вектор бесконечно малого смещения. Вот при его прибавлении к координатам точки меняются не её координаты, а выбирается новая точка, с другими координатами.*
- Величина первого масштаба. Выбрана произвольно. Можно выбрать другую. Новые координаты x^1 могут быть получены из старых умножением на отношение величины старого масштаба к новому. Нужно помнить, что для **своей** системы координат величина масштаба всегда единица. Соответственно, увеличили масштаб — координаты как числа стали меньше. И старый масштаб (измеренный новым) тоже стал меньше. И наоборот. Эти преобразования записываются так:

$$x^{1'} = \partial_1^{1'} x^1, \quad x^{2'} = x^2; \quad e_1^{1'} = \partial_1^{1'} e_1^1, \quad e_1^{2'} = e_1^2 = 0.$$

Вектор $e_1^{i'}$ уже **не является масштабом** в новой системе координат! Для него желательно ввести другое обозначение.

- Величина второго масштаба. Выбрана произвольно. Всё как для первого.

$$x^{2'} = \partial_2^{2'} x^2, \quad x^{1'} = x^1; \quad e_2^{2'} = \partial_2^{2'} e_2^2, \quad e_1^{1'} = e_1^2 = 0.$$

Вектор $e_2^{i'}$ тоже **не является масштабом** в новой системе координат.

Остановимся подробнее на описанных выше преобразованиях масштабов и соответствующих им преобразованиях координат. Запишем их в общем виде именно для векторов:

$$v^{i'} = \partial_i^{i'} v^i, \quad p_{i'} = \partial_i^i p_i$$

. И добавим сюда ещё один переход, к третьей системе координат (индексы с двумя штрихами):

$$\begin{aligned} v^{i''} &= \partial_i^{i''} v^{i'} = \partial_i^{i''} \partial_i^{i'} v^i = \partial_i^{i''} v^i \\ p_{i''} &= \partial_i^{i''} p_{i'} = \partial_i^{i''} \partial_i^i p_i = \partial_i^{i''} p_i. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Запишем преобразования координат в (2.14) в виде матриц, введя обозначения $m_i^{i'} = \partial_i^{i'}$. Преобразования масштабов такого вида называют часто масштабированиями.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m_1^{1'} & 0 \\ 0 & m_2^{2'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1^{1'} & 0 \\ 0 & m_2^{2'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m_1^{1''} & 0 \\ 0 & m_2^{2''} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_1^{1''} & 0 \\ 0 & m_2^{2''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1^{1'} & 0 \\ 0 & m_2^{2'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m_1^{1''} & 0 \\ 0 & m_2^{2''} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Глядя на эти соотношения мы можем сделать несколько полезных выводов и сформулировать ещё одну важную для нас (и для математики с физикой) идею.

1. Последовательные преобразования координат для тензоров, как от старых к новым, так и наоборот, можно записать в виде произведения матриц промежуточных преобразований координат. *И это верно не только для масштабированиями.* Для масштабированиями это будут матрицы одинакового строения, имеющие не нулевые компоненты только на главной диагонали и различающиеся их значениями.
2. Одна из таких матриц совпадает с единичной матрицей E ($= \delta_i^{i'}$ или $\delta_{i'}^i$)
3. Ни один из коэффициентов m в нуль обращаться не должен. Иначе мы уменьшаем число измерений континуума. Этим гарантируется также наличие как прямых, так и обратных матриц преобразований.

Множество матриц, которые при умножении дают снова матрицы того же типа, что и сомножители, включающее единичную матрицу, и поэтому включающее также и обратные матрицы, называют **группой** матриц по операции “умножение”.

Как легко понять, эта новая идея, идея группы, добавляющая некоторые специфические требования к идее множества, уточняющая её определённым образом, может быть применена не только к множествам матриц, не только к операции “умножение”, а к любым множествам и любым операциям (если конечно их совокупность, “множество+операция”, этими свойствами обладает).

Здесь у нас она применима как раз к двум, связанным, но не совпадающим понятиям — определена для матриц масштабирований, но матрицы здесь представляют преобразования координат, записанные как таблицы их частных производных одних по другим. Мы практически всегда, когда говорим о преобразованиях координат будем иметь ввиду матрицы их частных производных. Но нужно понимать, что это лишь вследствие предельно локализованного (привязанного к точке) способа изложения. При более синтетическом описании речь должна идти о функциях, определённых на некоторых непрерывных множествах переменных.

Преобразования координат как цельная идея не тождественны её матричному представлению. Здесь появляется ещё одна важная для математики идея — **представление группы**. Т.е. одна и та же группа может иметь реализацию разными множествами. Группы матриц при этом оказались столь удобными для описания групповых свойств, что самым обычным способом для изучения свойств некоторой конкретной группы общего вида является изучение свойств её матричного представления. И, как правило, такое представление можно найти практически для любой группы. По крайней мере, для всех нам интересных.

Для нас преобразования координат будут в дальнейшем играть важнейшую роль. Но ведь нам они нужны не сами по себе, а для описания многих других важных для нас объектов — таких как тензоры, например. Группы преобразований индуцируют в множествах тензоров **одного и того же строения** нечто очень похожее на сами группы преобразований. Результаты преобразований это тоже всегда тензоры того же самого строения. Отличие в том, что операцией является не обычная операция (сложение, умножение), а более сложная, опирающаяся притом на дополнительные внешние для самих тензоров элементы, матрицы преобразований координат. Но смысл фактически тот же самый — имеется некоторое множество, “группа” элементов, имеется группа операций над этими элементами, которая связывает всё множество в единое целое. Отдельные представители этой “группы” дают взгляд на одно и то же целое с некоторой специфической точки зрения. В определённой системе координат, описание с помощью определённой процедуры измерений. Но принадлежащих к некоторой выделенной, “допустимой”, совокупности, множеству, “группе” систем координат (процедур измерений). Вот в этом смысле я часто буду использовать слова “группа систем координат”, “группа процедур измерений”, “группа тензо-

ров”. Строго в математическом смысле слова это не группы, даже не представления группы.

Но для нашего описания именно этот объединяющий все эти “группы” смысл важен для групп преобразований и их матричных представлений. Именно он проходит через всё описание мира красной нитью. Разные точки зрения на одно и то же. Классификация точек зрения посредством классификации переходов между ними. Математическое понятие группы — это доведённая до идеала идея такой классификации, и именно для переходов, преобразований. Я только чуть-чуть расширяю даже не способ её применения, а терминологию.

Заметьте, речь не идёт о всех тензорах одного и того же строения, а только о тех, которые связаны заданной группой преобразований. Такие тензоры я буду называть соответствующей группой, или представлением заданной группы (и часто без кавычек). И не только тензоры. Другие геометрические объекты, объединённые в совокупность аналогичным образом, буду также называть “группой” или представлением группы.

Что в контексте идеи группы позволяет нам сказать пример (2.15)? Среди допустимых преобразований координат (процедур измерений) может быть выделена группа масштабирований, описывающих изменения в величинах масштабов, каждого по отдельности. Это одна из простейших для понимания групп преобразований. Легко определить обратные преобразования. Если, например, первый масштаб изменяется в m_1 раз, то обратное преобразование, как это и следовало ожидать, соответствует изменению того же (по номеру) масштаба в $1/m_1$ раз. И прямые, и обратные преобразования входят в ту же самую группу.

Группу масштабирований можно, при желании, ещё ограничить. Потребуем, чтобы все масштабы изменялись одинаково, т.е. в одинаковое число раз. Это тоже будет группа, но более узкая, являющаяся **подгруппой** (подмножеством) первой.

Очевидно, что группа масштабирований является сама подгруппой более общих допустимых (оставляющих системы координат регулярными, полностью описывающими наш континуум) преобразований координат. Кроме того, эта группа принадлежит к линейным преобразованиям координат. Но линейность легко сделать не существенным моментом, если заметить, что все рассуждения верны для каждой точки, а сами коэффициенты преобразования можно полагать зависящими от неё, меняющимися при переходе от точки к точке. Это замечание **позволяет нам ограничиться рассмотрением только линейных преобразований координат с их последующей локализацией.**

Какие же возможности имеются ещё? Вернёмся к обсуждению нашей процедуры построения системы координат (описания плоскости с помощью процедуры измерения). С выбором начала отсчёта мы пока закончили. Выбор величин масштабов тоже разобрали. Теперь направления масштабов.

- Направление прямой, проходящей через начало отсчёта, которую мы ассоциировали с координатной линией $\{x^1, 0\}$ выбрано нами произвольно. Оно ничем не выделено, ни свойствами этой прямой на плоскости, ни нашим удобством.

Следовательно, мы можем рассматривать как эквивалентные уже построенной и такие системы координат, которые будут отличаться от неё только направлением этой координатной прямой. А вся остальная процедура измерения останется без изменений. Для описания всех таких возможных систем координат у нас уже есть всё необходимое. Рассмотрим такую систему координат, ось $\{x^{1'}, 0\}$ которой повернута на угол ϕ влево относительно оси $\{x^1, 0\}$ в старой системе координат. Зависимость новых координат от старых, записанная как функция **скалярного параметра** ϕ , изменяющегося от 0 до 2π , может быть выписана напрямую, если мы воспользуемся введёнными нами функциями \sin и \cos этого угла:

$$x^{1'} = x^1 \cos \phi + x^2 \sin \phi \quad x^{2'} = -x^1 \sin \phi + x^2 \cos \phi \quad (2.16)$$

При этом мы предполагаем (принимаем), что величины обоих масштабов одинаковы. Это предположение нам позволяет делать наша специфическая исходная процедура измерений, в которой мы поворачиваем одну и ту же линейку для определения единиц обоих масштабов.

Матрицы производных таких преобразований являются функциями параметра ϕ :

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Матрицы такого вида образуют группу, непрерывно зависящую от определяющего их параметра. Эта группа носит название группы **ортогональных поворотов**. Любое произведение таких поворотов на разные углы (последовательный переход к новой системе координат) само является поворотом на угол, равный сумме этих двух разных углов. Обратное преобразование выглядит точно также, как и прямое, только угол берётся с обратным знаком. Последнее соответствует тому, что обратная матрица получается транспонированием прямой, т.е. строки становятся столбцами и наоборот. Для произвольной матрицы A соответствующая ей транспонированная матрица обозначается как A^T .¹⁵ Мы не обязаны записывать элементы ортогональной матрицы как тригонометрические функции. Это могут быть просто коэффициенты A_j^i , B_{ij} , C^{ij} . Но на эти коэффициенты, чтобы составленные из них матрицы назывались ортогональными, накладываются следующие ограничения: $(A_1^1)^2 + (A_2^1)^2 = 1$,

¹⁵Как легко догадаться, идея транспонирования как операции без проблем расширяется на все матрицы без исключения.

$\det A = A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2 = 1$ и $A^{-1} = A^T$, т.е. $AA^T = E$. Заметьте, что рассматриваемая группа преобразований тоже принадлежит к линейным заменам координат. Да, \sin и \cos функции сугубо нелинейные. Но это функции угла в данной точке, а не точки (т.е. не координат). *Угол характеризует представителя группы ортогональных поворотов, а не зависимость от координат.* Эта зависимость может быть внесена дополнительно, т.е. и эта группа может быть локализована, также как и группа масштабирований.

Напоминаю, что все остальные элементы процедуры измерений (начало отсчёта, единицы измерений (их величины), и направление второй оси, отличающееся от направления первой на угол $\pi/2$) в каждой из полученных таким образом систем координат остаются неизменными. Соответственно, коэффициенты ортогональных матриц в этом случае можно полагать безразмерными.

Последним элементом процедуры измерений, который нами выбран произвольно, является угол между второй и первой осями системы координат.

- Этот угол мы выбрали равным четверти полного угла, $\pi/2$. Выбор этот **почти произволен**. Ограничение имеется — оси не должны совпадать, т.е. исключены значения $0, \pi$ и 2π . Однако конкретное его значение, прямой угол — это **удобное** для нас значение.

Две подгруппы общей линейной группы преобразований координат в точке, группа масштабирований и группа ортогональных поворотов, представляют для нас значительный интерес, т.к. будут интенсивно использоваться в дальнейшем. Поэтому мы им уделили специальное внимание. Оставшиеся же возможности изменения координат сами по себе особого интереса не представляют. Достаточно знать, что такие возможности имеются, и они шире, чем уже рассмотренные. Поэтому дальше я предпочитаю рассмотреть линейные преобразования в самом общем виде, чтобы ясно показать, что кроме масштабирований и поворотов **обеих осей по отдельности**, никакой другой классификации к ним применять не требуется. Все возможности полностью ими накрываются. Для этого достаточно представить любое линейное (допустимое) преобразование как произведение масштабирований и поворотов:

$$A_i^{j'} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos \beta}{\cos(\beta-\alpha)} & \frac{\sin \beta}{\cos(\beta-\alpha)} \\ \frac{-\sin \alpha}{\cos(\beta-\alpha)} & \frac{\cos \alpha}{\cos(\beta-\alpha)} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

где значения m_1, m_2 и углы α и β (не инвариантные!) вычисляются в старой системе координат по формулам

$$m_1 = \frac{\det A}{\sqrt{(A_1^{2'})^2 + (A_2^{2'})^2}} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{\det A}{\sqrt{(A_1^{1'})^2 + (A_2^{1'})^2}}, \quad (2.19)$$

$$\tan \alpha = -\frac{A_1^{2'}}{A_2^{2'}}, \quad \tan \beta = \frac{A_2^{1'}}{A_1^{1'}}. \quad (2.20)$$

Таким образом, любое линейное преобразование в точке можно формально рассматривать как суперпозицию двух преобразований:

1. Одновременный поворот новой оси $x^{1'}$ на угол α относительно старой оси x^1 и оси $x^{2'}$ на угол β относительно оси x^2 . При этом *величины* масштабов по всем осям считаются *одинаковыми*. Такие преобразования не образуют группу. Однако, если $\alpha = \beta$, то реализуется их совокупность, которая уже является группой *ортогональных поворотов*.
2. Последующее изменение величин масштабов (масштабирование). Такие преобразования образуют подгруппу общей линейной группы допустимых преобразований в точке.

Если для описания континуума нужно больше чем два измерения, то никакой дополнительной свободы в выборе масштабов не возникает. Это можно показать следующим образом: Пусть n — число измерений (масштабов). Попробуем представить произвольную (но допустимую, т.е. имеющую не нулевой определитель) $n \times n$ матрицу A_j^i как произведение $n(n-1)/2$ клеточных матриц вида:

$$\begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ B_1^2 & B_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C_1^1 & 0 & C_3^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1^3 & 0 & C_3^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

и т.д.

$$A_j^i = B_k^i C_l^k \dots D_j^r. \quad (2.22)$$

Каждая такая матрица является двумерным преобразованием в соответствующей координатной поверхности и может быть представлена как суперпозиция поворота (в общем случае не ортогонального) и масштабирования. Если рассматривать (2.22) как уравнение относительно неизвестных клеточных матриц, то требуется найти $4n(n-1)/2$ неизвестных коэффициентов. Разрешимость этой задачи определяется значением разности N между числом неизвестных и числом уравнений и дополнительных условий вида $\det B \neq 0$, $\det C \neq 0$ и т.д.

$$N = 4 \frac{n(n-1)}{2} - n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}. \quad (2.23)$$

$N > 0$ для всех $n > 3$, т.е. задача разрешима бесконечным числом способов. Для $n = 3$ она решается однозначно.

В этих рассуждениях я неоднократно упоминал условие на определитель матрицы преобразования (\det). При этом само понятие определителя осталось не сформулированным. Оно прямым образом связано с такими важными вопросами, как необходимое число измерений для континуума, линейной независимостью векторов, преобразованием меры континуума при переходах между системами координат и возможностью найти решение для системы линейных уравнений. К подробному обсуждению этих идей я перейду в следующем параграфе. Здесь же только несколько дополнительных слов. Уже упоминалось, что для одномерного континуума есть одно ограничение в выборе величины масштаба. Его нельзя умножать на нуль. Для двумерного и выше это условие и превращается в условие на определитель матрицы преобразования в точке. Если он обращается в нуль, то это приводит к тому, что континуум пытаются описать меньшим, чем необходимо числом масштабов. А значит такое преобразование ведёт в недопустимую, не описывающую континуум надлежащим образом систему координат.

Однако в реальности математика использует не только регулярные системы координат, возможности выбора которых мы здесь пытались описать. Вспомните пример с логарифмической шкалой. В некоторых случаях такой выбор очень удобен. Ещё большее значение имеют так называемые полярные (для плоскости) координаты. Для трёхмерного пространства очень часто используются два варианта таких координат — сферические и цилиндрические.

Остановимся пока на описании полярных координат на плоскости. Вернёмся к процедуре измерения, с помощью которой мы ассоциировали координаты с точками плоскости. Выбрали линейку. Выбрали первую ось координат. Вдоль этой оси изменится одна координата. Назовём её теперь радиусом. Дальше мы поворачиваем линейку. Это мы можем делать, т.к. линейка является внешним к плоскости объектом. Поэтому повёрнутую линейку мы считаем не изменившейся. Ввели угол поворота. Этот вопрос мы уже обсудили. А вот теперь, вместо того, чтобы выбрать прямую, которая будет служить второй осью, второй координатной линией (той, на которой мы по определению полагаем первую координату равной нулю и неизменной), будем измерять расстояние (радиус r) вдоль каждой прямой, исходящей из начала координат вдоль нашей линейки. И таких прямых будет столько же, сколько углов поворота. Т.е. непрерывное одномерное множество. И второй координатой будем считать угол

поворота. Координат тоже будет две. Вот только такая система координат, помимо определённых практических достоинств, будет обладать существенными недостатками.

Сначала о достоинствах.

Такая система координат может быть удобной для описания ситуации, когда на плоскости выделена по каким-то причинам некоторая точка и нужно описывать явления или плоские фигуры, зависящие только от расстояния до этой точки.

К недостаткам относятся следующие свойства полярной системы координат:

- Есть точка (начало отсчёта, называемая ещё полюсом), одна из координат которой, угол, не определена однозначно. Просто нет способа приписать этой точке какой-либо угол. Для самой плоскости в этой точке нет ничего особенного. Это дефект именно способа описания плоскости.
- Полярные координаты не описывают двумерный континуум взаимно однозначно. Изменение значений угла должно быть либо ограничено интервалом от 0 до 2π , причём или нуль, или 2π необходимо исключить, либо мы получаем бесконечное количество изображений одного и того же континуума.

Системы координат, имеющие подобные проблемы, не являются регулярными и их помощью следует пользоваться очень осторожно. Их называют особенными, но чаще сингулярными (что тоже самое).

Запишем ещё как выглядит переход от полярных координат к нашим базовым регулярным (декартовым) и наоборот:

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \phi, & x^2 &= r \sin \phi \\ r &= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, & \tan \phi &= \frac{x^2}{x^1}, \quad x^1 \neq 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Заметьте, что эти преобразования являются *нелинейными*.

Возможности введения регулярных координат на плоскости мы описали достаточно полно в случае группы линейных преобразований координат. Более того, если учесть, что главным индикатором их регулярности служит не обращение в нуль определителя матрицы частных производных $\det \partial_i^{j'}$ в любой точке описываемого континуума, то мы можем распространить наши выводы и на нелинейные преобразования, лишь бы это условие всегда выполнялось.

Имеется также очевидный путь описания любых континуумов с помощью регулярных координат, если мы позволим себе не ограничиваться единственной такой системой, единственной процедурой измерений годной для всего континуума. Ведь можно создавать описание кусочками, разных частей континуума разными процедурами измерений. Нужно только обеспечивать два условия:

1. Соседние части континуума должны частично перекрываться, иметь общую часть, описываемую разными процедурами измерений, так, чтобы для неё имелось, по крайней мере, две системы координат. Правда, две сразу означает что таких координат на самом деле всегда бесконечно много, связанных группой локально линейных преобразований.
2. Переходы между этими системами координат должны описываться обратимыми матрицами $\partial_i^{j'}$. Т.е. определители преобразований координат в общей области их определения в нуль обращаться не должны.

Примером реализации такого подхода может служить обычный географический атлас, набор карт, описывающих разные участки поверхности Земли. Именно этот пример и дал названия для математических понятий. *Карты для локальных описаний континуума, и атлас как собрание всех нужных карт.* Причём, для одной и той же части континуума набор возможных карт ограничивается только требованием их регулярности.

Ясно также, что сингулярных координат можно ввести гораздо больше. Но в этом мало смысла, если нет никакой **специфической** нужды. Диктуемой либо ограничениями на наши возможности, либо какими-то свойствами самого континуума. Так что от их использования мы, в принципе, не отказываемся. Но каждый случай должен быть описан отдельно, вместе с причинами, диктующими такой выбор описания.

2.11 Линейная независимость. Плотности

Мы уже довольно далеко ушли по пути формулирования идей, которые нам потребуются для описания свойств реального мира. Есть некоторая опасность потерять связь этих идей с нашей целью. В математике так очень часто происходит. Вот ввели мы идею матрицы на нужном нам примере, потом расширили её и начали заниматься уже её свойствами. Появляются понятия строк, столбцов, определитель какой-то... Я уже употреблял это понятие, а что это такое не объяснял толком. Иногда надо и назад оглядываться, чтобы увидеть естественность, необходимость новых понятий.

Вот сейчас я и хочу проследить ту последовательность наших шагов, которая приводит нас к понятию определителя матрицы. И не только. Ещё и к правильному формулированию определения меры, объёма для континуума n измерений.

У точки самой по себе нет никаких свойств, отличающих её от других точек. В её понятие вложено только нечто самое общее для любых выделенных частей мира, “существование”. Линии, прямые и не очень в нашем мире имеются. Приблизённо, но есть. Один подход — совершенно самостоятельная идея линии — ведёт к синтетической геометрии. Нам он не нравится.

Есть другой подход, более того, он очевиден, т.к. сама синтетическая геометрия приводит к идее точки, как части линии. Но мы выбрали путь не по нисходящей, а по восходящей — от простой идеи к более сложной. Так, линии для нас становятся особыми, непрерывными множествами точек. С линиями, как непрерывными множествами мы связали длину их кусочков и возможность измерить одни кусочки другими. *Заметьте, любой кусочек имеет два конца.* Две особых, но связанных точки. Связи между точками создают идею линии и её меры, длины.

Появилась идея измеримости, мерности, **одномерности**. Одна мера, для всей линии. Все отрезки на линии измеримы друг другом. Все они могут быть взяты за масштаб, единицу измерения. И в этом смысле все они пропорциональны друг другу, любой можно получить из другого умножением на число (которое по факту и есть результат их сравнения, соизмерения). *Любое действительное число, кроме нуля.* Нуль, как образ пустого, не существующего множества уничтожает саму идею меры для линии. Возвращает идею назад, к точке.

Перешли к поверхности, плоской или не очень. Не линия, не точка. Поверхность. Примеров множество. Поверхность стола, лист бумаги.

Что новое, дополнительное нужно нам добавить к идее линии? Мы ведь хотим идти именно по линии усложнения идей, добавления им новых свойств. От точки к линии переход был болезненным, через введение актуальной бесконечности. А от линии к поверхности? Вроде тоже, поверхность как бесконечное множество всевозможных линий. Но боли уже нет, бесконечность эта не новая, а уже опробованная при объединении точек в линию. Там *бесконечность фактически спряталась за введением меры, длины, связи между двумя не совпадающими точками.* Сейчас одной длины нам мало. Но ведь можем использовать больше линий и связи уже между ними. И, соответственно, больше особых, опорных точек, больше их связей.

Что при этом важно? **Не совпадение** дополнительных, введённых для описания поверхности линий (или точек) **с уже используемыми**. Нужен дополнительный масштаб, **не совпадающий** с первым, взятым для линии. Для того, чтобы описать не совпадение нам нужно сначала определить, а что значит “совпадение”. Тогда отрицание, отсутствие совпадения гарантирует правильность нашего выбора.

Вспомним, что у нас появилась и новая, дополнительная идея, связанная происхождением с непрерывными множествами, но уже оторванная от родителя, линии. Идея совокупности масштабов, пространства масштабов, которые нам требуются для каждого, сколь угодно малого кусочка линии. Мы сделали серьёзный шаг, из одного ряда с теми, когда мы вводили бесконечности. Мы привязали всё множество возможных масштабов (векторов) к каждой точке линии (а потом и поверхности, и т.д.)

как отдельное, само по себе существующее пространство объектов. Линейное пространство контравариантных векторов. И даже дополнили его кое чем, что масштабом и быть не может — нулём, вектором, имеющим все компоненты нулевыми. Это была заготовка для описания континуумов другой мерности, большей чем единица.

И мы пошли ещё дальше, мы ввели двойственное линейное пространство ковариантных векторов, сопряжённое пространству контравариантных векторов по свёртке. Первое пространство удельных величин.

Так что для поверхностей и далее нам теперь нужно одновременно (параллельно) отслеживать нововведения и для самих континуумов, и для привязанных к ним, служащих для упрощения их описания линейных векторных пространств.

Сформулируем сначала идею “совпадения”, не полного, а именно как принадлежность к множеству одного типа. Эта идея получила в математике название **линейная зависимость**. Векторов, строк или столбцов в матрице, уравнений. Суть одна и та же. Опишем её для векторов.

- Векторы считаются линейно зависимыми, если один можно получить из другого умножением на число, не равное нулю.

Эту идею можно (и нужно) немного расширить, приняв во внимание, что для линейного векторного пространства определена не только операция умножения на число. Имеется ещё и операция сложения векторов одинакового строения. По компонентно. Соответственно, имеется и возможность в каком-то смысле обратная сложению — представление любого вектора в виде суммы других векторов. С учётом этой возможности мы сформулируем идею линейной зависимости в таком виде:

- Вектор является линейно зависимым от комбинации (суммы) нескольких других векторов, если эти векторы входят в сумму с не нулевыми коэффициентами. Перефразируем. Если имеются такие не нулевые числа, что данный вектор можно представить в виде суммы других векторов, умноженных на эти числа.

Вот теперь можно и сформулировать идею линейной независимости:

- Вектор является линейно независимым от совокупности других векторов, если не существует таких не нулевых чисел, что данный вектор можно представить в виде суммы других векторов, умноженных на эти числа.

Говорят, что *данный вектор можно разложить по выбранному базису векторов (линейно зависимый), или нельзя (линейно независимый)*. Соответственно, **базисом называют именно**

совокупность линейно независимых (друг от друга) векторов.

Очевидно, что в одномерном случае мы имеем единственный вектор для формирования базиса. Если он выбран, то все остальные от него линейно зависят.

Двумерный случай, случай поверхности, означает, что у нас есть два вектора, два масштаба, с двумя компонентами каждый, которые мы полагаем линейно независимыми **по определению**. Так мы формулируем отличие поверхности от линии.

Но после того, как мы ввели хотя бы один базис из линейно независимых векторов мы получаем возможность полноценно описать все такие континуумы. Мы получаем новое, расширенное линейное пространство векторов для описания всех возможных вариаций в выборе базиса (мы ведь хотим учесть все возможные описания данного континуума!). Мы получаем пространство 2×2 матриц, описывающее переходы между допустимыми базисами (допустимыми наборами масштабов). Мы получаем системы уравнений, которые записывают возможную линейную зависимость между векторами. Попытка их решения, поиски ответа на вопрос, можно ли решить конкретные системы линейных уравнений, чтобы установить, являются ли данные векторы линейно зависимыми, снова возвращает нас в пространство матриц, составленных из коэффициентов уравнений. Теперь уже более общего вида, не обязательно квадратных. Но при формулировании ответа на этот вопрос сразу же становится выделенным подпространство только квадратных 2×2 матриц (для произвольного числа измерений n , $n \times n$ матриц). А рядом, немного на особицу, стоит вопрос формулирования, описания, построения меры для двумерного пространства. А лучше, сразу для n -мерного. Как обобщение, годное для всех случаев, которые могут нам понадобиться.

Если нам встречается континуум, который мы не можем полноценно описать с помощью данного набора линейно независимых векторов (с заданным количеством векторов в наборе), с помощью данного набора масштабов, с помощью данной процедуры измерения, то что нам нужно сделать? Нужно расширить процедуру измерения, по крайней мере в части числа используемых масштабов. Нужно увеличить число компонент у вектора, описывающего масштаб. Нужно увеличить число линейно независимых векторов в базисе. И т.д. ¹⁶

¹⁶Заметьте, здесь имеется определённая доля нашего произвола. Сплошь и рядом мы вводим в нашей практике избыточные эталоны, единицы измерения, не замечая, что уже имеющихся может быть вполне достаточно для правильного описания мира. В физике, по крайней мере, дела обстоят именно так. Уже давно известно, что для всех физических величин достаточно наличия только четырёх единиц, трёх единиц для расстояния и единицы времени. Более того, после формулировки специальной теории относительности, оказалось возможным установить определённые соотношения и между этими единицами, сводя их все к единственной. А мы до сих пор исполь-

Теперь вопрос. А есть ли предел на этом пути, пути увеличения мерности континуума? Ответ простой. Как у идеи — такого предела нет. Вплоть до актуальной бесконечности. В математике понятие бесконечно мерного пространства вводится и используется. Да и в физике тоже. Но это отступление от темы. На будущее.

Возвращаемся к простейшему для нас двумерному случаю. К началу пути (ну ладно, к третьему шагу на этом пути).

Нам нужен ответ на вопрос, как выбирать линейно независимые пары векторов для нового базиса, начиная с уже введённого, принятого за набор линейно независимых по определению. Не в процедуре измерения, там мы руководствуемся опытом, а в векторном пространстве, призванном описывать уже все возможные наборы масштабов из разных возможных процедур измерения. Дающих регулярное описание континуума, регулярную систему координат. Ясно, что мы рассматриваем расширенное векторное пространство, позволяющее выбрать из него и “плохие” наборы, ведущие к неполноценному в той или иной степени описанию континуума, к введению сингулярных координат.

Начнём потихоньку. Имеем два вектора, два образа масштабов. По определению, их координаты такие:

$$e_1^i = \{1, 0\}, \quad e_2^i = \{0, 1\}$$

Простейшая замена базиса, которую мы уже описали и назвали масштабированием будет такой:

$$\begin{aligned} e_1^{i'} &= \{1, 0\} \leftarrow v^i = A_1^1 e_1^i = \{A_1^1, 0\}, \\ e_2^{i'} &= \{0, 1\} \leftarrow w^i = A_2^2 e_2^i = \{0, A_2^2\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Я не случайно ввёл столь сложные обозначения для, в общем то, простейшего случая двух масштабирований. На простейших случаях легче понять общее, правильно расставив акценты.

Поясню. Переобозначу, $A_1^1 = m_1$. Т.е. в качестве нового первого масштаба я выбираю такой, величина которого в m_1 раз, скажем, больше исходного. Соответственно, исходный будет в m_1 меньше при измерении новым масштабом. Будет иметь величину, равную $1/m_1$. Также, как и новая координата $x^{1'}$. Т.е. коэффициент преобразования новой первой координаты в старую первую, коэффициент, описывающий зависимость старой координаты от новой, $\partial_1^1 = A_1^1 = m_1$. Также и для второго масштаба. Вот поэтому, коэффициенты A записывают значения новых масштабов в старой системе координат. **В новой они единицы по определению. А в старой какие-то векторы, отличные от единичных. Соответственно, численно их выражения через единичные векторы старой системы совпадают с коэффициентами преобразований**

зую ещё и самостоятельные единицы массы. Этот вопрос я буду подробно обсуждать в следующей главе.

от новой к старой, а не наоборот. Поэтому такие вот, казалось бы странные сложные обозначения.¹⁷

Посмотрим теперь на матрицу преобразований от новых координат к старым с точки зрения изменения полной меры двумерного континуума.

$$A_{i'}^i = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Коэффициенты m_1 и m_2 дают отношения мер масштабов, новых к старым, по отдельности. А их произведение $m_1 \cdot m_2$, соответственно, даёт отношение площадей. Хочу обратить ваше особое внимание на следующий момент. **В обеих системах координат (во всех допустимых, а не только каких-то двух!), и старой и новой, все меры в соответствующих данной системе единицах имеют величины равные именно единицам.** Несмотря на то, что их отношения, коэффициенты перехода, могут быть отличны от единиц. Потому, что эти единицы имеют разные размерности, разные названия. Вас ведь не удивляет, что имеется 1 метр и 1 сантиметр, которые относятся один к другому (будучи измерены один другим) как 100 к 1 (метр к сантиметру), или 1 к 100 (сантиметр к метру)? И площади, выраженные в метрах и сантиметрах — 1 м^2 в 10000 раз больше, чем 1 см^2 . Просто единицы эти разные. И сейчас я рассматриваю случай ещё более общий, когда и для разных направлений в каждой из процедур измерения, а не только для разных процедур измерения, единицы (масштабы) могут быть выбраны разными. Скажете нереально? А дорогу, например, как вы будете описывать? Чаще всего, расстояние вдоль дороги будет описываться в километрах, её ширина в метрах, толщина покрытия в сантиметрах. И такого рода примеров вы вокруг себя можете подобрать очень много.

А теперь рассмотрим такое же масштабирование, но ещё и изменим порядок, нумерацию наших координат (и масштабов, а значит и векторов базиса). Т.е. изменим ориентацию базиса,

¹⁷Вот на это соотношение можно отнести ту несогласованность с предлагаемым мной описанием названий для векторов, контравариантный (противопреобразующийся) и ковариантный (со-преобразующийся). При введении этих названий акцент делался на выражении новых масштабов через старые. А я делаю акцент на преобразовании координат. Ведь контравариантные векторы, а именно они дают образ масштабов, преобразуются также, как и координаты. А другие векторы, используемые как новые масштабы, это **именно другие векторы, а не преобразованные старые.** То, что на это не обращают очень часто внимание при стандартном изложении соответствующего раздела математики, связано с тем, что базируются в таких случаях на понятии **скалярного произведения векторов.** А его у нас пока нет и в помине. А вот векторы уже есть. Базировать описание, определение понятие “вектор” на отнюдь не общем понятии, более того, таком, которое нельзя сформулировать, пока нет самого понятия “вектор”, на мой взгляд, в корне неправильно.

а значит и системы координат. Матрица преобразования будет выглядеть так:

$$A_{i'}^i = \begin{pmatrix} 0 & m_3 \\ m_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Что изменилось? Столбцы поменялись местами. Или строки. Ещё мы ввели другие обозначения для масштабирований. Меры каждого из измерений по отдельности изменились также, как и раньше, может быть только в других соотношениях. А вот отношение площадей теперь нужно записывать как произведение других элементов матрицы, стоящих на второй, “косой” диагонали, $m_4 \cdot m_3$.

Вот только нам необходимо также в отношении площадей учесть изменение ориентации, то что меры площади в разных системах координат ориентированы теперь по-разному. И учитываем мы это тем, что произведению элементов на косой диагонали мы приписываем, по определению, знак минус: $-m_4 \cdot m_3$. Именно произведению.

А теперь рассмотрим линейное преобразование координат общего вида

$$A_{i'}^i = \begin{pmatrix} m_1 & m_3 \\ m_4 & m_2 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

и введём определитель этой матрицы по формуле

$$\Delta^{-1} = \det \partial_{i'}^i = \det A = m_1 m_2 - m_3 m_4 = A_{1'}^1 A_{2'}^2 - A_{2'}^1 A_{1'}^2$$

. Обозначение Δ^{-1} связано с тем, что в дальнейшем мы будем использовать обозначение $\Delta = \det \partial_i^{i'}$ для определителя матриц перехода от старых координат к новым. А определитель матрицы перехода от новых координат к старым является ему обратным.

Из уже проведённого выше рассмотрения можно заключить, что определители эти не что иное, как отношение полных мер (в данном случае площадей), приписываемых континууму разными системами координат, разными процедурами измерений. С учётом ориентации систем координат. Они имеют размерности (для двумерного случая):

$$[\Delta] = \frac{[x^1][x^2]}{[x^1][x^2]}, \quad [\Delta^{-1}] = \frac{[x^1][x^2]}{[x^1][x^2]}. \quad (2.29)$$

Как легко видеть, определители эти можно также рассматривать как разницу между вкладками двух разных ориентаций, которые вносятся в новую систему преобразованием координат, новым выбором базисных векторов, масштабов. Если $\Delta > 0$, то ориентация не изменяется. Если определитель отрицательный, то преобладает противоположная ориентация, и новая система

координат имеет другую ориентацию. А вот что происходит, если определитель равен нулю?

$$m_1 m_2 - m_3 m_4 = 0$$

и все отдельные масштабирования не нулевые. Положим $m_2 = a m_3$, $m_4 = b m_1$. Тогда

$$m_1 m_2 - m_3 m_4 = a m_1 m_3 - b m_1 m_3 = m_1 m_3 (a - b) = 0 \rightarrow a = b$$

. Здесь a и b числа. Возвратимся к выражению (2.25) для векторов, выбранных в качестве нового базиса через векторы старого базиса в обозначениях m_1 , m_2 , m_3 , m_4

$$\begin{aligned} e^{i'} &= \{1, 0\} \leftarrow v^i &= m_1 e_1^i + m_3 e_2^i \\ e_2^{i'} &= \{0, 1\} \leftarrow w^i &= m_4 e_1^i + m_2 e_2^i = \\ & &= a m_1 e_1^i + a m_3 e_2^i = a v^i. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Эти соотношения означают, что в качестве нового базиса выбраны **линейно зависимые векторы**, один из них линейно выражается через другой. А это не допустимо, т.к. означает, что число измерений континуума уменьшено на единицу искусственно, плохим выбором базиса, плохим выбором процедуры измерений.

Т.е. определитель матрицы преобразований координат выполняет сразу несколько очень полезных для нас функций. Его величина описывает преобразование объёмов. Запрет на обращение в нуль гарантирует как наличие обратного преобразования, так и не вырождение нашего описания континуума, линейную независимость между всеми масштабами (векторами базисов) во всех допустимых координатах, если они получены из какой-то одной, гарантированно описывающей многомерную непрерывность полноценным образом. А ещё его знак отслеживает изменение ориентации систем координат.

Обратите внимание, что если определитель производных одних координат по другим является действительным числом, то все допустимые системы координат распадаются на две группы — право ориентированных и лево ориентированных. Правая или левая ориентация определяется выбором одной какой-то системы координат в качестве представителя, для которого установлен заданный по возрастанию порядок нумерации масштабов и направление отсчёта координат от их начала. Все другие, отличающиеся нечётным числом перестановок в нумерации, или нечётным числом смен знаков координат (направлений осей по той же прямой), будут иметь противоположную ориентацию.

Преобразования внутри каждой из этих двух групп координат характеризуются положительным определителем. А вот отрицательность определителя означает переход к группе координат с противоположной ориентацией. И как легко видеть, именно преобразования распадаются на две независимых подгруппы.

Просто потому, что можно показать, что для квадратных матриц (неважно, какое n) значение определителя можно рассматривать как непрерывно меняющийся параметр, характеризующий группу матриц. При непрерывном изменении этого параметра попасть из его положительных значений в отрицательные можно только через нуль, что запрещено.

Способ определения (вычисления) определителя может показаться несколько искусственным, но я специально так подробно остановился на обсуждении разных масштабирований, чтобы проследить истоки этого способа.

Умножение элементов матрицы на одной диагонали, знак положительный для главной диагонали матрицы, отвечающий сохранению ориентации, и знак отрицательный на кривой диагонали, отвечающий изменению ориентации. Соответствие нечётного числа перестановок строк или столбцов (что означает изменение порядка нумерации в системе масштабов) изменению знака вклада на отрицательный.

Определение определителя для матриц 2×2 можно принять за начало алгоритма (способа) вычисления определителя любой $n \times n$ матрицы. Для этого нужно пройти по всем элементам любого столбца, например первого (или также для строк). Первый элемент столбца (строки) нужно умножить на определитель матрицы, которая получается вычёркиванием первого столбца и первой строки, т.е. матрицы размерности на единицу меньше, $n - 1$. Эта матрица полагается стоящей на главной диагонали, и вклад этого произведения берётся со знаком плюс (т.е. знак произведения таков, какой получится). Если $n - 1 > 2$, то для вычисления определителя такой матрицы поступаем также, как выше. Пока не дойдём до $n - k = 2$. А для двумерных матриц определитель мы уже вычислять умеем. Перейдём ко второму элементу в первом столбце. Его тоже умножаем на определитель той матрицы, которая получится вычёркиванием первого столбца и второй строки. А вот вклад этот мы прибавляем к ранее полученному значению уже со знаком минус, обратным знаку самого произведения. Одна перестановка означает изменение ориентации. И так далее. Для чётного числа перестановок плюс, для нечётного — минус.¹⁸

Формулу для вычисления определителя любой $n \times n$ матрицы A можно записать в следующем виде:

$$\det A = \sum_{i_1, \dots, i_n} \delta_{i_1, i_2, \dots, i_n} A_{i_1 1} A_{i_2 2} \dots A_{i_n n}, \quad (2.31)$$

¹⁸На самом деле, этот алгоритм начинается не с $n = 2$, а с $n = 1$, когда матрица вырождена просто в единственное число, его значение и является определителем такой матрицы. Других возможностей просто нет. Только здесь нет и перестановок. Есть только замена знака, направления на единственной оси. Поэтому общий случай, с учётом возможности изменения нумерации масштабов, сопровождающейся изменением ориентации, можно обсудить только начиная с $n = 2$, что я и сделал.

где $\delta_{i_1, i_2, \dots, i_n} = 0$, если среди значений индексов есть одинаковые; $= +1$, если перестановка индексов от $1, 2, \dots, n$ чётная; и $= -1$ для нечётной перестановки. Важно, что вторые индексы в матрице A в этой формуле взяты в натуральном порядке.

Подобная операция, перемена мест индексов (одного типа, контравариантных или ковариантных) для тензоров и последующее сложение со знаком, зависящим от чётности или нечётности перестановки, с весом, равным количеству таких перестановок, применяется в геометрии довольно часто, и называется **альтернированием**. Причём результат этой операции не зависит от выбора системы координат, в которой он проводится. Это легко видеть на простейшем примере альтернирования произвольного тензора T^{ij} :

$$\begin{aligned} F^{ij} &= \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji}) \\ F^{i'j'} &= \partial_i^{i'} \partial_j^{j'} F^{ij} = \partial_i^{i'} \partial_j^{j'} \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji}) = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_i^{i'} \partial_j^{j'} T^{ij} - \partial_i^{i'} \partial_j^{j'} T^{ji}) = \\ &= \frac{1}{2}(T^{i'j'} - T^{j'i'}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Не трудно заметить, что выкладки, приведённые выше, будут справедливы для тензоров с любым числом индексов.

Тензоры, получающиеся в результате альтернирования, ещё называют **антисимметричными** по своим индексам. А операцию альтернирования иногда называют операцией антисимметризации. Полезно отметить также, что операцию альтернирования достаточно произвести всего один раз. Повторное альтернирование совершенно не изменяет тензор, уже антисимметричный по всему набору индексов.

Эта операция, операция альтернирования, поможет нам ввести определение для меры (объёма) пространства любого заданного числа измерений n . Но прежде чем это сделать в общем случае, хочу обратить ваше внимание на то, что в разных системах координат и единицы меры, “единичные объёмы”, тоже являются разными геометрическими объектами. Как и базисные векторы, масштабы. Единичный объём не является независимым от “линейных” единиц измерения, масштабов. Он создаётся как определённая комбинация из их компонент. А именно, для **регулярных**¹⁹ координат, как произведение значимых, единичных компонент векторов базиса. Линейно независимых векторов. Причём, в разных координатах единичный объём строится из разных наборов векторов. А для любого другого набора линейно независимых векторов²⁰ ведь тоже можно сконструировать тем же способом соответствующие “объёмы”. И вот именно между этими объёмами, определёнными в разных координатах, но

¹⁹ Для сингулярных координат это не так.

²⁰ Даже меньшего по количеству, чем число измерений данного пространства. Но здесь я буду работать пока только с полным набором линейно независимых векторов.

для одного и того же набора векторов, устанавливается соответствие с помощью определителя преобразования координат. Это соответствие, закон преобразования объёма V , записывается следующим образом:

$$V' = \Delta \cdot V = \det \partial_i^{i'} \cdot V \quad (2.33)$$

Такого рода геометрические объекты в геометрии принято называть Δ -плотностями скаляра веса -1 . Если определитель входит в преобразование в виде множителя Δ^{-t} , то говорят что это Δ -плотность веса t . Таким образом, вес $+1$ соответствует делению на определитель, а вес -1 , умножению. Эти геометрические объекты также имеют вполне определённые размерности, а именно, размерность объёма вполне стандартная — она равна произведению размерностей всех базисных единиц измерения.

Локальная мера для *регулярных* координат вводится как произведение значимых компонент n бесконечно малых смещений вдоль каждой координатной линии, $dV = dx^1 dx^2 \cdot \dots \cdot dx^n$. Легко видеть, что эти n бесконечно малых векторов линейно независимы. С помощью этой меры (умножая на неё) можно интегрировать Δ -плотности скаляра веса $+1$. При этом, при переходе к интегрированию в других координатах (других переменных), следует учитывать закон преобразования локальной меры, совпадающий с законом преобразования объёмов. Т.е. под интегралом должен появиться дополнительный множитель Δ .²¹

Альтернированные произведения векторов играют в описании геометрических соотношений весьма важную роль.²² Первый пример такого рода — это локализованная мера в пространстве n измерений. Такого рода произведения ровно p , $p \leq n$ контравариантных векторов имеют специальное название — p -векторы (контравариантные). Компоненты таких векторов, у которых значения двух или больше индексов совпадают, равны нулю. Остальные равны значению компоненты $1, 2, \dots, p$ со знаком, определяющимся чётностью или нечётностью перестановки, ведущей от данной комбинации индексов к базовой, отвечающей ориентации системы координат. Легко проверить, что альтернированное произведение больше чем n векторов обращается в нуль. Поэтому любой n -вектор, как имеющий единственную значимую компоненту, пропорционален единичному объёму, т.е. может рассматриваться как объём параллелепипеда, построенного на его сомножителях. Если в альтернированное произведение

²¹Это стандартное правило при взятии кратных интегралов. Только в этом разделе математики Δ принято называть Якобианом.

²²Имеется ещё один раздел математики, который считается самостоятельным и посвящён работе именно с такими геометрическими объектами, как определённые нами меры и альтернированные произведения векторов. Его называют часто “внешняя алгебра” или алгебра Грассмана. Альтернированные произведения векторов, как операцию, называют внешним произведением, а как результат — внешними формами.

включён хотя бы один вектор, *линейно зависимый от остальных*, то такой p -вектор равен нулю тождественно.

Заметьте, n -вектор это **специальное название для тензора с n контравариантными индексами, подвергнутого альтернированию**. А операция эта инвариантна, то есть сделанная в одной из допустимых систем координат соответствует такой же операции во всех остальных (не важно, в какой конкретно из систем её проводят, результат от этого не зависит). Контравариантный n -вектор, построенный на базисных векторах в данной системе координат, являющийся образом единичного объёма (в данной системе координат!), обычно обозначают $E^{i_1 \dots i_n}$ (это тензор n -го ранга!). А скалярную Δ -плотность веса -1 , соответствующую объёму, равному в данной системе координат единице, обозначают как \mathcal{E} .

Вспомним, что помимо пространства контравариантных векторов мы в каждой точке нашего континуума имеем и ассоциированное с ней пространство ковариантных векторов. Удельных по отношению к линейным масштабам величин.²³

В этом пространстве можно точно также определить набор единичных (удельных единиц: единица скаляра на единицу масштаба) линейно независимых векторов. Эти наборы можно рассматривать как базисы в пространстве ковариантных векторов.

Альтернированное произведение самым естественным образом применяется не только к контравариантным векторам, но и к ковариантным векторам. Из произведения векторов ковариантного базиса мы получаем таким же образом, как и выше, две связанные величины. Одна это Δ -плотность веса $+1$ скаляра, являющаяся образом безразмерной единицы, делённой на единичный объём (в данной системе координат). Её обозначим \mathcal{E}^{-1} . И та же самая величина может быть определена как ковариантный n -вектор. В этом случае её обозначают $E_{i_1 \dots i_n}$.

Определим отношения двух разных выражений для объёма и обратного объёма как n -вектор Δ -плотности, контравариантную веса $+1$, и ковариантную, веса -1 . Легко проверить, что это будут два новых способа записи безразмерного скаляра, равного единице в любой системе координат. Но ровно с n индексами, ковариантными или контравариантными, по желанию. С единственной значимой компонентой, равной единице, при последовательности индексов $1, 2, \dots, n$ и нулями при наличии повторя-

²³ Для этих двух сопряжённых пространств векторов, помимо названий “контравариантные” и “ковариантные”, часто употребляются ещё названия “касательное пространство” и “кокасательное пространство”. Основанием для таких названий служит то, что вектор, касательный к произвольной кривой в данной точке, является контравариантным. И все векторы, которые могут быть определены как касательные ко всем возможным кривым в этой точке не только принадлежат пространству контравариантных векторов, но также и в определённом смысле исчерпывают его. Любой контравариантный вектор может быть получен как произведение числа на какой-то из касательных.

ющихся индексов. Остальные не нулевые компоненты (единицы) меняют знак при нечётной перестановке индексов по отношению к ориентации. Про такую величину говорят, что **она полностью антисимметрична по всем индексам**. Обозначим эти две специфические формы безразмерной единицы через $\mathcal{E}_{ij\dots k}$ и $\mathcal{E}^{ij\dots k}$. Они будут нам очень полезны в дальнейшем, как простой способ уменьшить число индексов, за которыми нужно следить во многих нужных нам соотношениях. В частности:

$$\mathcal{E}^{-1} = \mathcal{E}^{ij\dots k} E_{ij\dots k}$$

или

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ij\dots k} E^{ij\dots k}$$

Очевидно, что с помощью умножения тензора любого строения на какую-либо скалярную Δ -плотность можно определить Δ -плотность такого тензора. Что мы и использовали при введении новой формы безразмерной единицы.

Некоторые геометрические объекты при преобразованиях координат зависят не от определителя преобразования, а от его абсолютной величины, т.е. ориентация системы координат для них не существенна. В этом случае их называют просто плотностями.

Полезность новых определений в том, что скалярные Δ -плотности можно интегрировать по объёму, и результат не зависит от того, в какой конкретно системе координат это делается. Ведь суммируются при этом скаляры, инвариантные относительно преобразований координат величины. Кроме того, идея плотностей в дополнение к идее тензоров нам совершенно необходима для формулировки и решения задачи описания реального мира. Эта идея является расширением и уточнением представления об удельных величинах. Простейший вариант — градиент скаляра, зависящего от точки континуума. Это удельная величина по отношению к линейной мере, длине в локализованном виде. Следующая мера, площадь, точно также порождает сопряжённое понятие — представление о том, сколько скалярной величины приходится на единицу площади. Это уже именно плотность, удельная величина для двумерного пространства. С учётом ориентации площади — Δ -плотность. И далее, по нарастающей. Т.е. для пространства, скажем, четырёх измерений, имеется четыре типа удельных величин — отнесённые к линейной мере, отнесённые к площади, к трёхмерному объёму и, последний вид, отнесённые к полной мере пространства. Такие Δ -плотности можно интегрировать, умножая на соответствующую меру по выделенным тем или иным способом подпространствам меньшего числа измерений.

2.12 Аффинная связность

По самому своему определению каждая процедура измерения предполагает, что система масштабов, а значит и набор базисных вектор, как образ (идея) этих масштабов остаётся всегда эквивалентной самой себе всюду, где производятся измерения. Однако, мы вполне допускаем, что построенные таким образом координаты $\{x^{i'}\}$ при проведении измерений другим набором масштабов, ассоциирующим с точками континуума другие координаты, могут быть нелинейными функциями точки, т.е. координат в другой системе, $\{x^i\}$.

Именно по той причине, что такая возможность не может быть отброшена, все те понятия, которые мы начинали обсуждать, опираясь на линейные соотношения, в окончательном (на данный момент) виде формулировались как локализованные. Т.е. привязанные к малой (по рассматриваемой мере) окрестности каждой точки. Как понятия, получающиеся в результате предельного перехода при стремлении меры этой окрестности к нулю.

Допущение, что базисные векторы, масштабы могут меняться при смещении от точки к точке, сразу создаёт проблемы в описании отношений между этими точками с помощью всех тех идей (тензоров, тензорных плотностей), которые мы сформулировали для этих целей. Ведь если все эти величины в разных точках получены измерением разными масштабами, то как же их можно сравнивать и производить с ними операции, такие как сложение? Ведь результаты будут зависеть от выбора процедуры измерения, от выбора системы координат, причём, возможно и нелинейно. Что нам даст такое описание? Ну, кое-что оно уже обеспечивает. Но этого нам мало.

Всё это означает, что та конструкция геометрии, аналитического описания континуума, которую мы оформили как идею (общую, включающую все те идеи, что мы обсуждали выше) всё ещё не решает наших задач полностью. Выход прост — нужно её дополнить, развить дальше так, как нам нужно. А для того, чтобы отметить достигнутый уровень, математика дала название уже сформулированной нами идее — такое описание континуума получило название “**многообразие**”.

Займёмся теперь расширением этой идеи. *Наши наборы масштабов могут зависеть от точки.* Признаем этот факт и формулируем его описание.

Набор единиц измерений изображается n базисными контравариантными векторами e_{μ}^i , где греческий индекс указывает номер масштаба. Нам следует записать, как эти векторы меняются при переходе от точки к точке в описываемой ими непрерывности.

Прежде всего, нам нужно локальное описание. Значит мы должны принять, что каждый масштаб изменяется на Δe_{μ}^i ко-

гда имеет место бесконечно малое смещение dx^j из данной точки.

Мы не будем даже требовать, чтобы это изменение было бесконечно малым. Допустим только, что все возможные сингулярности линейны по смещению и все члены, пропорциональные степеням dx^j выше первой исчезают вместе со смещением, когда оно стремится к нулю. Полагаем, что $\lim \Delta e_\mu^i$, по крайней мере, конечен при $dx^j \rightarrow 0$.

Тогда для главной линейной по смещению части изменения масштаба можно написать

$$de_\mu^i = \{B_j^i\}_\mu dx^j. \quad (2.34)$$

Где $\{B_j^i\}_\mu$ просто обозначают коэффициенты пропорциональности, связывающие изменения в базисных векторах со смещением в произвольном направлении для каждого вектора μ и для каждой его компоненты i . По индексу j производится свёртка, в соответствии с принятыми соглашениями о записи суммирования совместно с умножением.

С другой стороны, масштабы в данной точке и в бесконечно близкой к ней можно связать соотношением

$$\begin{aligned} e_\mu^i(x^j + dx^j) &= A_k^i e_\mu^k(x^j) = e_\mu^i(x^j) + \Omega_k^i e_\mu^k(x^j) + \dots = \\ &= e_\mu^i(x^j) + de_\mu^i + \dots, \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь мы записали то, что каждый вектор базиса в смещённой точке можно рассматривать как результат некоторого отображения A_k^i значения вектора в не смещённой точке. Хотя эти векторы и принадлежат разным локальным экземплярам пространства контравариантных векторов, но сами эти экземпляры, рассматриваемые как целое, вполне идентичны. Так что речь может идти только о том, что образы масштабов в них изображаются разными векторами. Понимание этого сразу ведёт к пониманию того, что отображения A_k^i и Ω_k^i без какой-либо потери общности можно рассматривать как представителей группы всех допустимых преобразований координат.²⁴

Далее, мы отделили в этом отображении два первых члена. Сначала — тождественное отображение каждого вектора базиса. Его наличие соответствует нашему допущению, что, хотя изменение в масштабах и предполагается конечным, но всё-таки должно быть сравнительно малым добавком, не уничтожающим исходный масштаб полностью. Насколько малым — этот вопрос мы отложим как проблему для физики.

²⁴С учётом нашего допущения, что изменение в масштабах не обязано быть бесконечно малым, а только конечным, группа преобразований координат, включающая все возможные такие отображения должна быть шире всех допустимых. В неё могут входить и некоторые преобразования, ведущие в сингулярные системы координат. Обычно в математике такое расширение не делается. Но для целей физики оно необходимо. Причины этого я буду обсуждать в следующих томах книги.

Потом выписаны главные линейные (по dx^j , хотя в этой записи это никак не отмечено) изменения в векторах базиса, обозначенные нами выше как de_μ^i . Многоточия обозначают, что в полных приращениях векторов базиса могут иметься и величины, пропорциональные величине смещения из точки в степенях выше первой (зависимости векторов базиса полагаются нелинейными), но они нас не интересуют, так как при локализации (переходе к пределу $dx^j \rightarrow 0$) все они уходят из рассмотрения нашей идеи.

Через Ω_k^i мы обозначили ту часть отображения (преобразования), которая связывает главную линейную часть добавка к каждому вектору базиса с самим этим вектором. Ведь добавок это тоже контравариантный вектор, и тоже может быть получен с помощью некоторого преобразования из другого контравариантного вектора. В данном случае из базисного.

Вообще говоря, матрица A_k^i может быть разной для каждого масштаба в одном и том же направлении dx^j . Однако имеются серьёзные основания полагать, что мы можем ограничиться частным предположением, что эта матрица *одинакова* для разных масштабов и зависит только от смещения. Причины такой возможности обусловлены *неидеальностью* доступных нам процедур измерений. Какое именно свойство реальных процедур измерений учитывается при этом, мы обсудим в следующей главе.

Пока что, имея ввиду соотношения (2.34,2.35), примем, что

$$\{B_j^i\}_\mu = -\Gamma_{jk}^i e_\mu^k \quad \text{или} \quad de_\mu^i = -\Gamma_{jk}^i dx^j e_\mu^k. \quad (2.36)$$

Причина того, что мы поставили знак минус перед коэффициентами Γ , очень проста. Перепишем определение (2.36) в следующей форме:

$$De_\mu^i = de_\mu^i + \Gamma_{jk}^i dx^j e_\mu^k = 0. \quad (2.37)$$

В такой форме оно говорит, что с точки зрения идеального наблюдателя (процедуры измерений), *перемещающегося из данной точки в бесконечно ей близкую вместе со смещением*, единицы измерений остаются неизменными. Наше определение явно формулирует двойственный взгляд на систему масштабов, её неизменность с точки зрения того, кто её использует (данной, конкретной процедуры измерений) и *потенциальную* изменяемость с любой другой точки зрения.

Определение в форме (2.36) известно в математике как **условие параллельного аффинного переноса** или, в форме (2.37), как запись **абсолютного или ковариантного дифференциала**, который для системы единичных базисных векторов *равен нулю по определению*.

С введением этого соотношения между бесконечно близкими точками многообразия оно получает новое качество и название

— **пространство аффинной связности**. Величины Γ_{jk}^i называются **коэффициентами аффинной связности**, или просто **аффинная связность**. Ещё в ходу имеется название **объект аффинной связности**. Аффинная означает линейная. Я использую этот термин как давно принятый в математике. А почему линейная — должно быть ясно из всего нашего рассмотрения выше. Как и раньше, при локализации мы все соотношения в точке свели к линейным.

Обращаю ваше внимание, что $\{B_j^i\}_\mu$ в соотношении (2.34) тоже можно и нужно рассматривать как отображение, преобразование вектора dx^j в другой вектор, de_μ^i , и поэтому практически ничем не отличается с **внутренней точки зрения** от преобразования Ω_k^i . Всё отличие внешнее — на какой именно вектор каждое из преобразований действует. Соответственно, то, что оба эти преобразования сведены в единый геометрический объект с внутренней точки зрения вполне естественно. И вполне можно и нужно рассматривать геометрический объект, в котором индексы j и k меняются местами, как такую же связность.

Смысл коэффициентов аффинной связности можно уяснить из определения (2.36). Их можно рассматривать как скорости **относительных** изменений в единицах измерения при смещении из точки в точку. Размерность каждой компоненты такая же, как и у компонент тензора аналогичной структуры (с одним контравариантным и двумя ковариантными индексами). **Связность в разных системах координат описывает изменение разных единиц измерений, разных объектов мира**. Поэтому она не является тензором. Тензоры и их плотности характеризуют с разных точек зрения (с помощью разных процедур измерений) *один и тот же* объект мира. Как связность преобразуется при изменении системы координат я укажу ниже.

Интересно отметить, что вследствие того, что *по необходимости* мы работаем с *относительными изменениями* масштабов, *экспоненциальная функция* приобретает особое значение среди всевозможных функций. По сути дела, определение (2.36) записывает дифференциал экспоненциальной функции в некотором обобщённом виде. Рассмотрим самый простой случай — одномерный, один масштаб, e . Наше определение будет выглядеть так:

$$de = -\Gamma dx e \rightarrow e(x) = e_0 \exp\left[-\int^x \Gamma(y) dy\right]$$

Здесь я использовал известное в математике выражение для производной функции “экспонента”. Если величина Γ постоянна для всех точек линии, то функциональная часть зависимости может быть записана совсем просто: $\exp(-\Gamma x) = e^{-\Gamma x}$ (e здесь числовое основание экспоненты, в данном случае хорошо известное иррациональное число, 2.7182...). Обратите внимание, что размерность $[\Gamma] = [x]^{-1}$, так что функцию \exp в данном контексте

следует рассматривать как стандартизованную функцию безразмерного аргумента, имеющую также и безразмерные числовые значения. А размерность единственного масштаба задаётся размерностью начального его значения, $[e] = [e_0]$.

А если Γ ещё и равна нулю, то $e = e_0$, масштаб всюду один и тот же, всюду равная себе единица.

Аффинная связность является структурой первостепенной важности в описании континуумов (а значит и в наших попытках описания реального мира) и мы должны внимательно изучить её свойства.

Прежде всего, это не тензор. Закон преобразования Γ_{jk}^i следует из их определения:

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = \partial_i^{i'} \partial_{j'}^j \partial_{k'}^k \Gamma_{jk}^i + \partial_i^{i'} \partial_{j'k'}^{2i}. \quad (2.38)$$

Здесь через $\partial_i^{i'}$ как всегда обозначены $\partial x^{i'} / \partial x^i$ и через $\partial_{j'k'}^{2i}$ обозначены $\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}$. Такие обозначения делают формулы более компактными и мы будем их использовать ниже, также как и ∂_i для $\partial / \partial x^i$.

Как видно из закона преобразования, объект связности частично преобразуется по тензорному закону, но имеется и дополнительный, нелинейный член, содержащий вторые производные новых координат по старым.

Это означает, что коэффициенты аффинной связности *не могут быть измерены* непосредственно без некоторой степени произвола. Связано это с тем фактом, что изменчивость масштабов в каждой данной процедуре измерения всегда остаётся скрытой, потенциальной. Ведь она игнорируется в каждой системе координат по определению. Привлечение более чем одного наблюдателя, учёт всевозможных допустимых процедур измерения не помогает вследствие закона преобразования (2.38). Измерение одних масштабов другими, превращая потенциальную изменчивость первых в актуальную, вводит в них же потенциальную изменчивость новых масштабов. По сути дела, это означает, что связность как таковая является отдельной, дополнительной характеристикой как континуума, так и того поля векторов, выбранных для всех точек континуума, которое полагается связанным таким образом. **Её можно постулировать, как набор функций точки, но нельзя измерить сами этими масштабами.**

Можно указать единственный случай, когда неопределённость в связности может быть устранена. **Если бы нашлась такая процедура измерений, в которой поле объекта связности оказалось бы равным нулю всюду, для всех точек непрерывности, то это означало бы существование систем абсолютно неизменных (не зависящих от точки) масштабов для описания такого континуума.** Множество

всех систем координат, получаемых из данной (дающей нулевую связность) посредством *линейных* преобразований, было бы выделенным, а образ континуума носил бы название “**аффинное пространство**”. На том, каковы должны быть свойства такого континуума, я остановлюсь в соответствующем месте позже.

Займёмся теперь изучением свойств аффинной связности как геометрического объекта. Одно из таких важных свойств можно увидеть, записав её коэффициенты в виде суммы двух, сформированных с помощью перестановки нижних индексов, объектов. Легко видеть из (2.38), что записанное ниже представление Γ_{jk}^i инвариантно:

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= \bar{\Gamma}_{jk}^i + T_{jk}^i, \text{ где} \\ \bar{\Gamma}_{jk}^i &= \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kj}^i) \quad \text{и} \quad T_{jk}^i = \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i). \end{aligned} \quad (2.39)$$

По построению, $\bar{\Gamma}_{jk}^i = \bar{\Gamma}_{kj}^i$. Геометрические объекты, обладающие таким свойством, называют симметричными (в данном случае по нижней паре индексов). Способ, который мы употребили для выделения симметричной части в полной связности называют симметризацией. Он применим к любым геометрическим объектам, имеющим больше одного индекса сверху или снизу. Симметризацию можно применять только к индексам одного типа, не смешивая ковариантные с контравариантными. Можно осуществлять симметризацию и по более чем двум индексам. При этом нужно суммировать по всем их возможным перестановкам и разделить на число этих перестановок.²⁵ Симметричная часть $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ преобразуется также как и полный объект связности (2.38), т.к. вклад вторых производных полностью остаётся в ней в любой системе координат. Это **естественная ассоциированная** связность, существующая совместно с любой связностью общего вида на многообразии.

Вторая составляющая представления (2.39) обладает свойством $T_{jk}^i = -T_{kj}^i$. Такие геометрические объекты называют антисимметричными. В данном случае по нижней паре индексов. Процедура выделения антисимметричной части иногда называется антисимметризацией. Для неё верно всё то же самое, что и для симметризации, только при нечётной перестановке вклад берётся со знаком минус, а при чётной со знаком плюс. Мы уже знакомы с этой операцией, которую называют также альтернированием, когда обсуждали определители и p -векторы.

Антисимметричная часть T_{jk}^i представляет собой тензор. Он носит особое название, **тензор кручения** или, проще, кручение.

Вместе с полной аффинной связностью Γ_{jk}^i существуют две *свёрнутые* аффинные связности $\Gamma_j = \Gamma_{jk}^k$ и $\Gamma_j^* = \Gamma_{kj}^k$. Имеются

²⁵ Число перестановок из n индексов вычисляется с помощью функции $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, которая называется **факториал**.

также *свёрнутая* симметричная часть связности $\bar{\Gamma}_j = \bar{\Gamma}_{jk}^k$ и *вектор кручения* $T_j = T_{jk}^k$. Очевидно

$$\Gamma_j = \bar{\Gamma}_j + T_j \quad \text{и} \quad \Gamma_j^* = \bar{\Gamma}_j - T_j. \quad (2.40)$$

Обе свёрнутые связности (далее мы опускаем слово “аффинные” т.к. мы всегда ведём речь об аффинных связностях) не являются тензорами и преобразуются при преобразованиях координат согласно закону

$$\Gamma_{j'} = \partial_{j'}^j \Gamma_j - \partial_{j'} \ln \Delta. \quad (2.41)$$

А теперь посмотрим, для чего собственно нам нужна эта структура, связность. Что позволяет делать её наличие (определение) на многообразии?

Мы определили аффинную связность как структуру, учитывающую изменения в базисных векторах (масштабах) при смещении из данной точки в бесконечно близкую. Для базисных векторов такой, абсолютный дифференциал мы положили равным нулю по определению. А для других векторов, не совпадающих с базисными, абсолютный дифференциал вычислить можно?

Для контравариантных векторов вычисление абсолютного (ковариантного) дифференциала производится буквально по той же самой формуле (2.37), что и для базисных векторов:

$$Dv^i = dv^i + \Gamma_{jk}^i dx^j v^k. \quad (2.42)$$

Только обращаться в нуль для вектора, отличного от базисного, этот дифференциал не обязан.

Такое расширение нашей новой идеи вполне логично и обосновано. Что задаёт связность на континууме (уже описанном как многообразие) не в локальном, а более широком смысле? Задание связности, по сути дела, определяет, какие векторы из соседних локальных линейных векторных пространств связаны в единую непрерывную систему масштабов. Другой функциональный вид связности (приписанный к той же системе координат!) — другое поле векторов образует глобальную систему масштабов. Всякое иное поле векторов, существующее на многообразии глобально (или на всём континууме, или на его каком-то непрерывном подпространстве), вовсе не обязано быть связано точно таким же образом. Поэтому абсолютный дифференциал поля векторов общего, произвольного вида, в нуль обращаться не обязан.

Таким образом мы получаем возможность проводить дифференцирование, анализ (и, до определённой степени, интегрирование, синтез тоже) поведения контравариантных векторов на нашем пространстве аффинной связности.

А для ковариантных векторов? Достаточно вспомнить, что для поля скаляра на многообразии, скалярной функции координат, дифференцирование (анализ) и интегрирование (синтез) совпадает полностью с обычными дифференцированием и интегрированием. Ведь скаляры от используемых для описания континуума масштабов не зависят по определению. Им всё равно, как масштабы в разных точках увязаны между собой. Следовательно, абсолютный дифференциал скаляра совпадает с обычным. Применив это замечание к **свёртке произвольных ковариантного и контравариантного векторов (двух таких полей), которая является скалярной функцией координат**, получим определение ковариантного (абсолютного) дифференциала для всех ковариантных векторов. Я не буду загромождать текст выкладками, хотя они в этом случае достаточно просты, а сразу приведу конечный результат:

$$Dw_k = dw_k - \Gamma_{jk}^i dx^j w_i. \quad (2.43)$$

Пользуясь этим приёмом совсем не трудно расширить правило взятия абсолютного дифференциала на тензоры произвольного строения — для каждого верхнего индекса нужно в дифференциал добавлять член, аналогичный члену со связностью для контравариантного вектора, а для каждого нижнего индекса — для ковариантного вектора. Например, для тензора T_{jk}^i :

$$DT_{jk}^i = dT_{jk}^i + \Gamma_{nl}^i dx^n T_{jk}^l - \Gamma_{nj}^l dx^n T_{lk}^i - \Gamma_{nk}^l dx^n T_{jl}^i. \quad (2.44)$$

Абсолютное дифференцирование точно также расширяется и на тензорные Δ -плотности, только для них появляется дополнительный член, который можно получить, вычислив абсолютный дифференциал для ковариантного n -вектора (ведь это же тензор), отождествив его (n -вектор) после с некоторой Δ -плотностью \mathfrak{q} веса $+1$. Опуская снова все выкладки, запишу выражение ковариантного дифференциала для этой плотности:

$$D\mathfrak{q} = d\mathfrak{q} - \Gamma_{jk}^k dx^j \mathfrak{q} = d\mathfrak{q} - \Gamma_j dx^j \mathfrak{q}. \quad (2.45)$$

Если вес t Δ -плотности отличается от $+1$, то член со свёрткой связности необходимо умножить на этот вес t . Соответственно, для тензорных Δ -плотностей в выражения вида (2.44) добавляется член вида $-t\Gamma_n dx^n \mathfrak{T}_{jk}^i$.

Также как и для обычного дифференцирования, мы определяем и ковариантную производную для геометрических величин (тензоров и тензорных плотностей) любого строения Φ по правилу $D\Phi = dx^j \nabla_j \Phi$.

Можно легко установить (впрочем это должно быть достаточно очевидно), что для особенных безразмерных величин, определённых на любом многообразии, а именно δ_k^i , $\mathcal{E}_{ij\dots k}$ и $\mathcal{E}^{ij\dots k}$ ковариантные производные, как и обычные, тождественно равны нулю.

Ковариантное дифференцирование, тензорный анализ на пространствах аффинной связности позволяет изучить их свойства во всех деталях. Как говорит математика, *если известна аффинная связность как набор функций точки, то известна вся геометрия, все свойства такого континуума*. Но ведь с помощью измерений этот набор функций мы установить не можем. Т.е. с точки зрения описания континуума посредством измерений задача наша обречена на неудачу с самого начала. А другого способа у нас просто нет. Да, можно исследовать всевозможные виды связности, задавая их принудительно, и таким образом классифицировать возможные типы пространств аффинной связности. Хорошее поле деятельности для математиков.

Но мы то хотим описывать реальный мир, нам то что делать? А делать мы можем вот что. Мы можем определить тензорные (и плотности тоже) структуры, порождаемые объектом связности. Эти геометрические величины являются вполне себе измеримыми. Вот с их помощью мы и можем попытаться установить, какого типа континуум может быть поставлен в соответствие нашему реальному миру. Поставить в соответствие тем или иным структурам в геометрическом описании известные нам части реального мира и его явления. Установить доступную нам степень определённости нашего такого описания Мира. Ну и, соответствующую степень неопределённости, избежать которой мы не можем.

Таким образом, наше внимание должно сосредоточиться на геометрических величинах, тензорах и их плотностях, которые можно определить, используя только коэффициенты аффинной связности. Ну, может быть ещё скаляры (внешние для нашего описания, независимые от выбранных масштабов) и вектор бесконечно малого смещения.

Один из таких тензоров мы уже имеем. Это тензор кручения, вместе с его свёрткой, вектором кручения. Посмотрим, в каких случаях он появляется явно.

Одним из важнейших примеров ковариантного вектора является вектор градиента скаляра, заданного как некоторая функция координат. Градиент это набор частных производных такой скалярной функции. При обычном дифференцировании порядок взятия следующей частной производной значения не имеет: $\partial_j \partial_k s = \partial_k \partial_j s$.

А вот для абсолютного дифференцирования, при наличии не нулевой связности, это совсем не так:

$$\nabla_{[j}\nabla_{k]}s = \frac{1}{2!}(\nabla_j\nabla_k s - \nabla_k\nabla_j s) = T_{jk}^i\partial_i s. \quad (2.46)$$

Порядок не играет роли только при отсутствии кручения. Соответственно, соотношение (2.46) позволяет этот тензор определить, измеряя альтернированные вторые производные скалярных полей.

И ещё один такой тензор (кстати важнейший для классификации пространств аффинной связности и в абстрактной геометрии, т.е. геометрии, интересующейся только развитием идей, а не их применением к реальному миру) можно получить аналогичным путём, вычисляя альтернированную вторую ковариантную производную произвольного контравариантного вектора:

$$\nabla_{[j}\nabla_{k]}v^i = \frac{1}{2}R_{jkl}^i v^l - T_{jk}^m \nabla_m v^i. \quad (2.47)$$

Тензор R_{jkl}^i , который называют тензором кривизны, получается из коэффициентов связности с помощью формулы :

$$R_{jkl}^i = \partial_j \Gamma_{kl}^i - \partial_k \Gamma_{jl}^i + \Gamma_{jp}^i \Gamma_{kl}^p - \Gamma_{kp}^i \Gamma_{jl}^p. \quad (2.48)$$

Выражение это легко получить, если расписать приведённое выше соотношение (2.47) для альтернированных ковариантных производных. То, что это тензор, ясно из того соображения, что слева в (2.47) стоит тензор, второй член справа тоже тензор, а вектор v^i произволен.

Этот тензор очевидным образом антисимметричен по нижней паре индексов $\{j, k\}$. Его можно представить в виде суммы тензора \bar{R}_{jkl}^i , который является тензором кривизны симметричной части связности, и антисимметричной комбинации двух тензоров, возникающих из кручения, $T_{jp}^i T_{kl}^p$ и $\bar{\nabla}_j T_{kl}^i$:

$$R_{jkl}^i = \bar{R}_{jkl}^i + \bar{\nabla}_j T_{kl}^i - \bar{\nabla}_k T_{jl}^i + T_{jp}^i T_{kl}^p - T_{kp}^i T_{jl}^p. \quad (2.49)$$

Оператор $\bar{\nabla}_j$ означает, что ковариантная производная берётся относительно симметричной части связности $\bar{\Gamma}_{jk}^i$, а не относительно полной связности.

Имеются два свёрнутых тензора кривизны. Антисимметричный тензор

$$\begin{aligned} F_{jk} &= R_{jkp}^p = \partial_j \Gamma_k - \partial_k \Gamma_j = \bar{F}_{jk} + T_{jk}, \\ \bar{F}_{jk} &= \partial_j \bar{\Gamma}_k - \partial_k \bar{\Gamma}_j \quad \text{и} \quad T_{jk} = \partial_j T_k - \partial_k T_j, \end{aligned} \quad (2.50)$$

и тензор Риччи

$$\begin{aligned}
R_{kl} &= R^i_{ikl} = \partial_i \Gamma^i_{kl} - \partial_k \Gamma^i_{il} + \Gamma^i_{ip} \Gamma^p_{kl} - \Gamma^i_{kp} \Gamma^p_{il} \\
&= \bar{R}_{kl} + \bar{\nabla}_k T_l + \nabla_p T^p_{kl} - T^i_{kp} T^p_{il} \\
&= \bar{R}_{kl} + \bar{\nabla}_k T_l + \bar{\nabla}_p T^p_{kl} - T_p T^p_{kl} - T^i_{kp} T^p_{il}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Две последние строки в (2.51) дают инвариантное представление тензора Риччи суммой нескольких тензоров. Имеется также другое инвариантное представление в виде суммы симметричной r_{kl} и антисимметричной a_{kl} частей:

$$R_{kl} = r_{kl} + a_{kl}, \quad \text{где} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
r_{kl} &= \frac{1}{2}(R_{kl} + R_{lk}) = \bar{r}_{kl} + \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_k T_l + \bar{\nabla}_l T_k) - T^i_{kp} T^p_{il}, \\
\bar{r}_{kl} &= \frac{1}{2}(\bar{R}_{kl} + \bar{R}_{lk}) = \bar{R}_{kl} + \frac{1}{2}\bar{F}_{kl} \quad \text{и} \\
a_{kl} &= \frac{1}{2}(R_{kl} - R_{lk}) = -\frac{1}{2}\bar{F}_{kl} + \frac{1}{2}T_{kl} + \bar{\nabla}_p T^p_{kl} - T_p T^p_{kl} \\
&= \nabla_p T^p_{kl} - \frac{1}{2}F^*_{kl}, \\
F^*_{kl} &= \partial_k \Gamma^*_l - \partial_l \Gamma^*_k = \bar{F}_{kl} - T_{kl}.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Все эти тензоры я привожу здесь для того, чтобы показать, что тензорных величин, порождаемых коэффициентами аффинной связности в действительности довольно много. И это ещё отнюдь не все возможные, и полезные для нашей попытки описания реального мира геометрические величины. Новые такие величины я буду вводить в дальнейшем по мере надобности.

2.13 Метрика

К настоящему моменту мы описали значительное количество идей, которые могут в дальнейшем помочь нам в формулировании описания реального мира. Дальше всего мы продвинулись по этому пути в формулировке аналитического описания в геометрии. Но одна из идей, долгое время бывшая основной для геометрии, пока нами не была затронута. Это идея **метрики**. Метрика ставит в соответствие произведению двух любых контравариантных векторов некоторый скаляр. Поэтому определение метрики на пространстве означает также и определение новой операции с векторами — вводится идея **скалярного произведения** векторов одного типа, принадлежащих одному и тому же векторному пространству.

Ранее мы уже видели, что произведение двух векторов, результатом которого является скаляр, является вполне естественной операцией в нашем собрании идей. Вот только эта операция

является естественной исключительно для двух векторов разного типа. Собственно, именно естественность такой операции и заставила нас ввести идею пространства векторов, двойственных, сопряжённых нашим исходным образам масштабов. Пространство ковариантных векторов. При этом один вектор обязательно должен быть контравариантным, типа масштабов, а второй — ковариантным, удельного типа. Тогда результатом будет тензор второго ранга, но с индексами и контравариантным, и ковариантным, что позволяет его свернуть, произвести суммирование по всем индексам, и получить скаляр: $p^i \cdot q_i = w$. А вот произведение двух векторов одного и того же типа создаёт тензор следующего, второго ранга: $p^i \cdot q^j = w^{ij}$, $p_i \cdot q_j = w_{ij}$. И свернуть его, ставя в соответствие такому тензору скаляр, **получаемый только из его компонент**, нельзя. Очевидно, что существуют и произведения векторов самих на себя: $p^i \cdot p^j = p^{ij}$, $q_i \cdot q_j = q_{ij}$. И для них тоже нет такого скаляра.

Чтобы получить из такого тензора скаляр, инвариант, необходимо свернуть его по обоим индексам с каким-то другим тензором противоположного типа, но тоже второго ранга. Других возможностей нет. Поэтому, утверждение, что на данном пространстве определено скалярное произведение (векторов одного типа), полностью эквивалентно утверждению о том, что на пространстве существует некий специальный, особенный по каким-то причинам, тензор второго ранга. Обозначают такой тензор обычно g_{ij} и/или g^{ij} , и называют метрическим тензором или, иногда, просто метрикой. Однако, метрикой в более строгом смысле обычно называют результат свёртки метрического тензора с одним специальным, существующим для любого континуума, оснащённого введённой на нём системой координат, вектором. Вектором бесконечно малого смещения из данной точки в произвольном направлении, dx^i . Эту свёртку называют метрикой или квадратом интервала (между бесконечно близкими точками в этом направлении) и обозначают так:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.54)$$

При таком подходе метрический тензор определяется именно как дважды ковариантный тензор. Его контравариантная форма (там и тогда, где и когда существует) является вторичной.

Сейчас я постараюсь описать, что означает существование метрики на континууме, откуда у нас возникла потребность в такой идее, и, соответственно, с какими свойствами, какими частями реального мира можно связать происхождение и реализацию такой идеи.

Начну с понятия интервала между точками. Хотя через метрику определён не сам интервал, а его квадрат, из этого квадрата, этой скалярной величины извлекают квадратный корень и называют его интервалом. Я записал определение квадрата интервала сразу в локализованной форме. Годной для описания

произвольного континуума. Но для некоторых континуумов, с определёнными свойствами, таких как евклидовы пространства (континуумы, которые описываются геометрией Евклида), вектор бесконечно малого смещения можно заменить вектором конечного смещения. Вот с геометрии Евклида на плоскости и начнём. Она ведь нам со школы знакома, значит идею будет легче понять.

Почему с геометрии на плоскости, а не с геометрии на прямой? А потому, что понятие метрики появилось как обобщение понятия расстояния между двумя точками. Хотя ниже мы увидим, что, не смотря на своё происхождение, та структура, которая при этом получилась, полноценным расстоянием всё-таки считаться не может. Чтобы связать общее понятие метрики с расстоянием нам придётся пойти на значительные ухищрения и соглашения. Для прямой вводить понятие метрики как новый образ расстояния не требуется. Само понятие длины отрезка на прямой уже является тем самым, для чего понадобилась метрика на плоскости или на континууме ещё большего числа измерений. Суть в том, что когда число измерений превышает единицу, то у нас для описания каждой точки появляется больше чем одно расстояние, n расстояний до начала координат, до начала их отсчёта. А любые две точки могут быть связаны всего лишь одной ²⁶ линией (в евклидовом пространстве — прямой линией), с которой очевидным образом можно связать только одну “длину”, одно расстояние между этими точками. И нам нужно как-то увязать координатные расстояния, которых больше одного, с единственным расстоянием между двумя точками. Нам нужно определить это единственное расстояние через координаты этих точек. Если мы этого не сделаем, то потеряем связь между ними. ²⁷ В евклидовом пространстве, на плоскости мы решаем эту проблему с помощью теоремы Пифагора.

Пусть имеются две точки, начало координат, с координатами $\{0, 0\}$ и вторая, имеющая координаты $\{x^1, x^2\}$. А система координат как раз та, что мы строили для плоскости — координатные

²⁶ Может быть не единственной линией, а одной из многих. При этом длины, расстояния между точками могут быть разными. Не в этом суть, а в том, что с любыми двумя точкам таким способом всегда, при любом количестве нужных для описания континуума масштабов, можно связать всего *одно* расстояние, пусть и зависящее от пути, которым эти точки оказались связаны, а не несколько координатных.

²⁷ Обратите внимание — определение расстояния между точками через координаты эквивалентно введению в имеющуюся идею описания континуума системами координат путём простого перечисления его точек (т.е. в идею многообразия), ещё и описания связей между этими точками. Вроде бы мы уже решили эту проблему с помощью идеи связности (аффинной)? Да, решили. Введение метрики служит решению той же самой проблемы, но способом гораздо более ограниченным, чем тот, который мы описали ранее. Связность является структурой, идеей более общего вида, включающей и понятие метрики как частный случай. Но история развития математики проходит через этот частный случай.

линии прямые и пересекаются под прямым углом, углом равным четверти полного, $\pi/2$. Координаты второй точки служат катетами прямоугольного треугольника с вершинами в начале координат, нашей второй точки и конца отрезка на первой оси с координатами $\{x^1, 0\}$. А искомое расстояние — это длина гипотенузы этого треугольника, длина радиус-вектора, идущего из начала координат во вторую точку. Значит это расстояние, обозначим его l , можно определить по теореме Пифагора:

$$l^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2. \quad (2.55)$$

Я думаю, вам не составит труда изменить это соотношение так, чтобы оно работало для двух точек с произвольными координатами. Этот частный случай я выбрал специально, чтобы обратить ваше внимание на существенные моменты, позволяющие получить такое описание расстояния между точками, сделать их очевидными. А именно, система координат должна быть специальной, координатные линии (оси) обязаны пересекаться именно под заданным углом $\pi/2$. Такие системы координат принято называть ортогональными. А ещё, при локализации этого примера мы сразу перейдём от радиус-вектора к настоящему вектору.

Теорема Пифагора, наше определение расстояния между двумя точками и определение угла между осями как $\pi/2$ связаны, неразделимы. Метрика, идею которой я начинаю описывать, рождается именно как обобщение описания расстояния между двумя точками с помощью их координат. Оформленного так, чтобы оно было правильным и при любом выборе координат. Таково исходное *желание*.²⁸ Именно отсюда и возникает и само название этой структуры — измерение расстояния между любыми двумя точками континуума, метризация \rightarrow “метрика”.

Что поддерживает наше представление о том, что возможно построить ортогональную систему координат, и то, что теорема Пифагора справедлива? Вспомним, как мы описывали построение этой самой системы. На что мы опирались? На существование линеек, чуждых описываемой плоскости. На возможность переносить эти линейки без изменения вдоль описываемого континуума. На возможность сравнения разных линеек в любых точках континуума. И самого континуума с этими линейками. На возможность поворачивать отдельно взятую линейку в любой

²⁸ Далее мы увидим, что возможности реализации такого желания весьма ограничены. Отнюдь не для всех континуумов это возможно. Более того, в понятие метрики как расстояния, изначально заложено кое-что противоречащее нашему опыту. А именно — желание считать расстояние между двумя точками вообще независимым от способа их описания, от выбора координат, делает это расстояние инвариантным, не изменяющимся при замене координат. А значит не изменяющимся при замене и единиц измерения этих самых расстояний. Заметили противоречие? Как может расстояние не изменяться, если его измеряют другими масштабами? Только если оставить выбор масштабов вне описания, вне геометрии. И этим сделать координаты безразмерными числами, оторванными полностью от реального мира.

точке описываемого континуума так, чтобы расстояние между её концами оставалось (считалось) неизменным. Т.е. линейки, как образы длины, при таких требованиях сами по себе обладают свойством неизменяемости при любых наших действиях с ними. Каждая из них инвариантна относительно изменений в описании континуума. Мы убеждены,²⁹ что в нашем распоряжении всегда есть такие линейки. На обычном языке это означает, что линейки наши **абсолютно** твёрдые, не подверженные никакому влиянию, ни при каких условиях. Более того, в случае ортогональных систем координат, мы опираемся не только на наличие таких линеек. Ещё мы опираемся на наличие в нашем распоряжении абсолютно твёрдых треугольников. Вспомните угол $\pi/2$. Ведь и для него нужен эталон. Нет прямого угла — нет и теоремы Пифагора. Нет треугольника — не построишь перпендикуляр (ортогональную проекцию) на ось координат.

Это означает, что геометрия Евклида, как полноценная идея, является обобщением существования именно абсолютно твёрдых тел, описывает их поведение и свойства. И если имеющиеся в нашем распоряжении твёрдые тела на поверку окажутся не очень твёрдыми, то такая идея становится плохо применимой для описания реального мира, работающей, в лучшем случае, только как некоторое приближение, уже не абсолютно годное для всех случаев.

Именно это мы учитывали, локализуя понятие масштаба, собирая возможные свойства масштабов в понятие векторного пространства, привязанного к каждой точке континуума.

Но ведь вся эта “абсолютная твёрдость” и независимость от направления относится как раз к нашим масштабам, дополнительным средствам, к пространствам векторов, привязанных к точкам континуума, а не к самим точкам континуума? Так и не так. Мы ведь **здесь** (для евклидова пространства) предполагаем и полное совпадение всех этих перечисленных свойств масштабов **для всех точек** описываемого нами континуума. А это уже ограничения именно на свойства этого континуума. Оставлю пока этот момент на потом. А сейчас перейду к обобщению соотношения (2.55) до определения (2.54).

- Первое, что можно и нужно сделать, это локализовать соотношение (2.55), сделав вторую точку бесконечно близкой к началу координат. Длину бесконечно малого смещения из начала координат в эту точку обозначим тоже как некоторый дифференциал:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2. \quad (2.56)$$

²⁹Убеждение это рассыпается при внимательном рассмотрении реальных свойств предметов, которые мы используем в качестве эталонов измерений. Однако, здесь, с точки зрения формулировки идеи, это не важно. Достаточно того, что имеется хотя бы приближённая её реализация. Рассматривать возможность её применения к описанию реального мира — уже дело физики.

- Далее, запишем это достаточно странное выражение в форме, которая нам должна быть уже хорошо знакомой, и вполне естественной для аналитической геометрии. В форме, буквально повторяющей (2.54), $dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, **определив** объект g_{ij} **в данной системе координат** (ортогональной, с одинаковыми единицами по обеим осям) как матрицу следующим образом:

$$g_{ij} = \delta_{ij} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Здесь это пока просто квадратная 2×2 матрица. Для числа измерений, отличного от двух, это должна быть аналогичная $n \times n$ матрица, со всеми нулями, кроме главной диагонали, где должны стоять единицы. На этом этапе компоненты матрицы являются безразмерными числами, т.к. должно выполняться и соотношение размерностей $[l] = [x^1] = [x^2]$.

- Теперь распространим это соотношение с начала координат на все точки континуума, просто полагая его выполняющимся по определению всюду.
- И, наконец, определим, что введённый нами геометрический объект g_{ij} является дважды ковариантным тензором. Т.е. при переходе к другим допустимым системам координат он преобразуется по закону:

$$g_{i'j'} = \partial_{i'}^i \partial_{j'}^j g_{ij}.$$

Это сразу создаёт нам проблему с размерностями получившегося результата, и, соответственно, с дальнейшей его интерпретацией как расстояния. Ведь, если g_{ij} становится полноценным тензором, то и его компоненты обязаны иметь правильные, согласованные с каждой системой координат, размерности. Т.к. математика до сих пор таким вопросом не озабочивается, то никто и не видит здесь проблемы. Но, если мы хотим использовать метрику позже для описания мира (а нам это потребуется по ряду причин, о которых позже), то как то из этой ситуации придётся выходить. Поэтому мы делаем две вещи:

1. Вместо dl^2 как квадрата бесконечно малого расстояния, вводим некий **скаляр**, ds^2 , которому даём другое название — квадрат бесконечно малого интервала.³⁰

³⁰Название это появилось при формулировке Специальной Теории Относительности для объединения в единый агрегат пространственных расстояний и времени. Там за интервалом сохранён смысл размерной величины. Но потом, при создании Общей Теории Относительности и обобщении возможного выражения для интервала, когда в теории и появилась метрика в явном виде, реальный смысл был на самом деле утерян. Здесь я предпочитаю не менять уже устоявшихся названий.

2. На будущее допускаем возможность временно отнимать размерности у координат, и приписывать их принудительно этому “интервалу” с помощью искусственного соотношения $dl = 1[l] \cdot ds$, где через $1[l]$ я обозначил единицу длины, одну и ту же для всех координат. Хотя, на самом деле, в физике потребуются записывать это соотношение в обратной форме: $ds = 1[l]^{-1} \cdot dl$. Коэффициентом может быть выбрана и другая размерная постоянная, не обязательно единица. Важна только размерность. К этой возможности мы будем обращаться при обсуждении тех ситуаций в физике, когда будет полезно использование метрики и в уже имеющихся физических теориях она понимается именно как образ квадрата длины масштаба. При этом возникнут ограничения на допустимые системы координат, на полноценную “тензорность” метрики. Безусловно, в таких случаях я буду останавливаться на всех этих деталях подробно.

А сейчас продолжим работать с введённым метрическим тензором как с полноценным, с компонентами, имеющими правильные размерности. По сути дела, формулирование идеи метрики нами закончено. Нужно только обсудить её свойства и для чего может быть использована эта структура в математике. В физике тоже.³¹

Метрика, определённая нами, как поле тензора, зависящее от точки континуума, на всём евклидовом пространстве является постоянной. Как на плоскости, так и в случае большего числа измерений. Во всех ортогональных координатах, которые можно получить из данной системы координат с помощью ортогональных поворотов (описанных нами ранее) матрица метрического тензора имеет “**нормальный**” вид (термин из теории матриц), тот, который записан в соотношении (2.57). В координатах, связанных с этими системами линейными, в общем случае неортогональными преобразованиями,³² матрица эта может принимать другие значения общего вида, но тоже одинаковые для всех точек евклидова пространства. Единственное ограничение на общий вид матрицы состоит в том, что с точки зрения нашего определения, имеет смысл рассматривать **только симметричные** матрицы. Метрический тензор по своему смыслу являет-

³¹Хочу обратить ваше внимание на то, что введение метрики впервые позволило расширить применение геометрии в надлежащей степени на континуумы, отличающиеся от стандартных евклидовых. Такие, например, как сфера и любые аналогичные пространства. Более того, следует знать, что это понятие предшествовало введению понятия связности. В частности, Общая Теория Относительности была сформулирована до того, как было разработано представление о связностях, и стала одним из стимулов для начала и интенсификации работ в этом направлении.

³²Такие системы координат принято называть аффинными.

ся симметричным: $g_{ij} = g_{ji}$, т.к. метрика, как скаляр (квадрат интервала), получается умножением метрического тензора на **симметричное произведение** координат одного и того же бесконечно малого смещения из точки.

Вот здесь важно отметить следующий факт. **Мы определили вместе и систему координат как ортогональную, и матрицу метрического тензора как матрицу нормального вида, т.е. равную $E = \delta_{ij}$.** В теории матриц показано, что **любую** квадратную матрицу можно привести к нормальному виду преобразованием координат (если её определитель не равен нулю, но об определителе метрики чуть позже). Разработано несколько методов, как этого достигнуть. Поэтому, если мы имеем многообразие, описанное с помощью некоей системы координат, неизвестно какой, то можно сделать две разных вещи, ведущих практически к одному и тому же результату:

1. Определить в ней поле метрики приведённым выше способом и декларировать, что этим мы
 - Сделали континуум евклидовым. Определили в нём связи по методу евклидова пространства.
 - По определению полагаем данную систему координат ортогональной.

2. Связать со всеми точками континуума непрерывное **постоянное** поле квадратной матрицы произвольного симметричного строения, с определителем, отличным всюду от нуля. Декларировать, что это поле метрического тензора.

Этим мы тоже можем сделать континуум евклидовым, внести в него евклидову структуру. Но данная система координат уже не будет ортогональной, а будет только аффинной. Ортогональными станут те системы координат, в которых поле метрики будет выглядеть как поле нормализованной матрицы, постоянной во всех точках. Сделать это для постоянной не вырожденной (с не нулевым определителем) симметричной квадратной матрице можно всегда.

Координаты, в которых матрица метрического тензора примет нормальный вид объявляются ортогональными, причём таких систем, связанных ортогональными поворотами, будет бесконечно много.

Из этих замечаний следует, что само по себе введение метрического тензора в определённой степени является произвольным действием, связанным с нашим выбором. Метрика не возникает из внутренних соотношений точек континуума априори. Причина лежит в чуждости наших масштабов, единиц измерения описываемому континууму.

Это верно и для связности. В многообразии мы можем внести любую связность, как функции точки. Только при выборе

масштабов на основе внутренних соотношений в некотором континууме можно ожидать появление ограничений на выбор связывающих его точки структур.

Если мы *снимем требование постоянства* метрического тензора для всех точек континуума, то получившееся пространство перестанет быть евклидовым. Однако, кое-что от свойств евклидова пространства остаётся. Метрику всё ещё можно сделать нормальной в бесконечно малой окрестности любой точки такого пространства. Т.е. пространство остаётся (при наличии метрики) евклидовым *локально*. Такие пространства называют метрическими неевклидовыми пространствами, или пространствами Римана.

Наличие евклидовой метрики в многообразии позволяет легко определять расстояния между любыми точками, если система координат ортогональная. А вот для других систем координат нужно учитывать отличие метрики от нормального вида. В первую очередь, это касается вычисления разного вида интегралов. Ведь, как мы видели, локализованный объём не является скаляром, величиной инвариантной.

Обратим внимание на то, что метрический тензор для пространств любой размерности может рассматриваться локально как некая матрица. И, как для любой матрицы, можно вычислить его определитель. Сделаем это в двух разных системах координат, связанных некоторым допустимым преобразованием:

$$\det \mathbf{g}_{i'j'} = \det(\partial_{i'}^i \partial_{j'}^j \mathbf{g}_{ij}) = \det \partial_{i'}^i \det \partial_{j'}^j \det \mathbf{g}_{ij} = \Delta^{-2} \det \mathbf{g}_{ij}. \quad (2.58)$$

Это соотношение опирается на правило вычисления определителей произведения произвольного числа матриц. Из него следует, что геометрический объект $\mathbf{g} = \sqrt{\det \mathbf{g}_{ij}}$ является Δ -плотностью веса +1. Очевидно, что это верно для любых метрических пространств.³³ Таким образом, на пространствах с метрикой (не только евклидовой) можно интегрировать по объёму любые скаляры, используя в качестве весовой функции квадратный корень из определителя метрики (положительный).

Метрический тензор мы ввели таким образом, что для любого контравариантного вектора (также как и для бесконечно малого смещения) можно определить некоторый **скаляр, который принято называть его нормой**. Нормой вектора называют **положительный корень квадратный из скаляра, равного следу вектора на метрике**: $p = +\sqrt{\mathbf{g}_{ij} p^i p^j}$.³⁴ Обратите

³³То, что определитель любого тензора второго ранга, дважды ковариантного, или дважды контравариантного можно и нужно рассматривать как Δ -плотность веса ± 2 , является универсальным фактом, верным для любого пространства с полем такого тензора, а не только для метрических пространств.

³⁴Следом вектора или любого другого тензора на метрике (или на другом тензоре) часто называют полную свёртку этого тензора с другим выбранным. Тогда след является скаляром.

внимание, что величина вектора и его норма, в общем случае, разные. Существуют и векторы, для которых величина и норма, как числа, совпадают. Но вот размерности точно разные. Размерность величины вектора та, какое название ему присвоено. Для контравариантных это, обычно, размерность длины, а для ковариантных — обратной длины.

А вот норма является либо полноценным безразмерным числом, либо имеет размерность внешнюю для систем координат, если в размерность вектора внесено что-то помимо длины, т.к. с точки зрения преобразований координат норма не изменяется.

Кроме того, наличие скалярного произведения векторов вносит как в само метрическое пространство, так и в два векторных пространства (касательное и кокасательное), ассоциированных с каждой точкой континуума, ещё и понятие об ортогональности векторов. Два вектора считаются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Факт этот для метрических пространств инвариантный. Легко проверить прямым вычислением, что попарные скалярные произведения векторов масштабов в любой ортогональной системе координат обращаются в нуль (по крайней мере, локально). Преобразования между ортогональными системами координат с помощью ортогональной группы поворотов снова дают ортогональные системы. А ортогональные преобразования между неортогональными системами — неортогональные системы координат.

В любой ортогональной системе (с нормальной метрикой) все векторы масштабов будут иметь норму, равную величине, т.е. единице, но безразмерную. Такие ортогональные базисы называют ещё ортонормированными, подразумевая, что имеются наборы из n ортогональных векторов, нормы которых отличаются от единицы. Поэтому понятие ортогональности обычно применяется ко всем системам с ортогональными базисами. А системы с ортонормированными базисами выделяют в подгруппу ортонормированных систем координат. Естественно, метрика в общих ортогональных координатах отличается от нормальной. А именно, она диагональна, но коэффициенты на главной диагонали не обязательно равны единицам.

Ранее я употреблял определение “ортогональная” система координат фактически в отношении ортонормированных систем, опираясь на ту, которую мы построили в §2.10. Делал я это потому, что само понятие нормы до настоящего момента ещё не было определено. Теперь можно исправить допущенную неточность в терминологии.

То, что ортогональность векторов является свойством инвариантным, означает также, что в метрических пространствах существует инвариантное понятие **угла** между векторами. Этот угол определяется через метрику и сами векторы:

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{g}_{ij} p^i q^j}{\sqrt{\mathbf{g}_{ij} p^i p^j} \sqrt{\mathbf{g}_{ij} q^i q^j}} = \frac{\mathbf{g}_{ij} p^i q^j}{p \cdot q}. \quad (2.59)$$

Введённый таким образом угол совпадает с тем, что мы определили при построении нами системы координат на плоскости, и который мы связали со стандартными тригонометрическими функциями. Этим мы понятие угла искусственно оторвали от геометрии, сделав специальным аргументом специальных функций. Наличие метрики позволяет рассматривать угол как именно геометрическое понятие.

Что ещё полезно отметить?

Как водится в математике, при введении какой-либо важной структуры её дальнейшее развитие происходит очень часто в нескольких направлениях. Так и скалярное произведение векторов, записываемое в виде $b(p^i, q^j) = \mathbf{g}_{ij} p^i q^j$, даёт начало представлению о билинейных формах с отдельной ветвью развития их теории. В определённом смысле эта теория позволяет обобщить и теорему Пифагора, и способы описания полиномов второго порядка и т.д. Кстати, можно кое-что сказать и о причинах выбора именно квадратичной формы для представления “инвариантного” расстояния через координаты. Линейное не годится по очевидной причине — сразу ясно, что оно не инвариантное. Следующая возможность — как раз билинейная форма для двух векторов, для единственного вектора превращающаяся в квадратичную. Да, я говорил, что по отношению к расстоянию это не более чем иллюзия. Но полезная иллюзия, обеспечившая решение многих проблем геометрии в девятнадцатом и начале двадцатого века. Тем более, что в евклидовых (и многих локально евклидовых пространствах), да ещё и при принимаемых обычно ограничениях на допустимые координаты и при привычном игнорировании математиками естественных размерностей всех чисел, идея инвариантной метрики как образа расстояния прекрасно работает.

Развитие идеи метрики можно вести ещё и в следующих направлениях. Мы уже сняли одно из требований на метрический тензор, когда позволили ему меняться от точки к точке. Пространство перестало быть евклидовым. Можно (и нам будет нужно) также ослабить и некоторые другие требования, которым мы подчинили наше определение метрического тензора. Это тоже приведёт к определённым изменениям в свойствах получаемых пространств. В математике имеется много разных направлений, порождаемых модификацией свойств метрического тензора. Здесь я их пока не буду описывать. Базовое понятие идеи метрики, надеюсь, получено. А те модификации этой идеи, которые нам потребуются в дальнейшем, при формулировании описания реального мира, я буду уточнять дальше по ходу дела.

2.14 Иерархия структур в математике

К настоящему моменту я описал практически все идеи математики, которые потребуются далее для формулирования основ физики, как описания реального мира. Это именно базовые идеи, которые при нужде будут уточняться дальше, когда мне это потребуется. В процессе изложения я пытался придерживаться линейного развития идей, насколько это было возможно. Однако идей уже набралось достаточно много, причём дающих разные линии развития. Поэтому мне кажется полезным собрать их здесь все вместе в кратком обзоре, чтобы подчеркнуть их место в получившейся иерархии, имеющиеся между ними различия и связи.

В основании иерархии лежит идея **множества**, опирающаяся на идею с минимальными свойствами, на **существование** тех или иных частей мира, *изъятых из него и рассматриваемых каждая как целое*. С выделенной частью мира при этом связывается понятие “**элемент множества**”, “**точка**”. Процедура формирования произвольного множества выбором некой части мира как базового элемента и **сравнения** остальных частей с выбранной в качестве **эталона** по простейшему принципу совпадает/не совпадает даёт нам начальную форму идеи **измерения**.

Сразу же появляется совокупность идей, хоть и вторичных, но столь же базовых: с множествами можно производить разные *действия, операции, отображения*. Появляются ещё и идеи *операторов и функций*. И уже идеи *множеств операций, действий, отображений, операторов и функций*. Появляются также идеи приписывания всем базисным идеям каких-либо дополнительных свойств и классификация новых идей по этим свойствам.

В частности, свойство множества (любого) описываться “**количеством элементов**” порождает идею **чисел**, сначала *натуральных*. Потом *целых положительных*, потом *отрицательных*, объединяемых далее с положительными в общее понятие просто *целых чисел*. Следом мы приходим к идее *рациональных чисел* и к способу описания всех дискретных множеств на базе свойств множества рациональных чисел.

Параллельно дополняются идеи операций, как с множествами, так теперь и с числами. Возникает и идея *потенциальной бесконечности*. Осознаваемая как принципиально не реализуемая в своей полноте, но в то же время вполне ясная как возможность нескончаемого процесса повторяемых без ограничения действий.

Понятие процедуры измерения в этом процессе формулирования идей уточняется, сравнение усложняется. **Результатом сравнения становятся числа**. И появляется понимание, что **все числа должны рассматриваться как имеющие размерности**, как отношения чего-то к выбранным эталонам. Название, наименование эталона получает своё обозначение — “раз-

мерность”.

По ходу дела сама идея формулирования идей определённым образом тоже уточняется. Для достижения наших целей способ описания новых структур с помощью дополнения старых понятий новыми свойствами и/или уточнения и расширения возможностей для уже описанных ранее свойств выглядит явно предпочтительнее, чем чисто аксиоматический подход. Ясно, что оба эти способа, набор аксиом и конструирование определений вполне эквивалентны. Но при последнем способе генетические связи между математическими понятиями, их происхождение и цель их введения, увидеть значительно легче.

Всего этого богатства идей оказывается не достаточно для того, чтобы описать все реалии мира. Мы обнаруживаем, что помимо дискретных множеств элементов, нам необходимо как-то описать и имеющиеся в мире части, которые мы называем **“непрерывными”**. Собственно, мы просто вынуждены признать наличие этого свойства и попытаться описать его имеющимися у нас средствами. Как соотношение между частями и неразрушимым (но разделяемым) целым.

Здесь появляется важнейшее для нас понятие о **геометрии**. Геометрия по природе своей напрямую связана с понятием измерения. И наше представление о процедурах измерения снова расширяется. С новым качеством для возможных эталонов, единиц измерения — появляется представление о **мере** непрерывного отрезка, отличной от простого понятия о количестве точек в том или ином множестве. Появляется понятие о **длине** отрезка, о его **направлении**. Понятие числа расширяется до понятия **вещественных (действительных)** чисел, включающих в себя новый вид чисел — **иррациональные числа**. Действительные числа жёстко ассоциируются с описанием непрерывных линий посредством простейших систем координат. Возникает представление о числовой прямой, как способе описания непрерывности.

Вместе с формализацией понятия о системе координат мы уточняем и идею годной для построения координат процедуры измерения. Годной для всех возможных на простейшем континууме (одного измерения) случаев. Так появляются понятия о непрерывных функциях, **рядах (последовательностях)** и их **суммах**. Важнейшее понятие о **пределе последовательности**. Далее мы вводим понятие **дифференцирования**, как основной метод анализа. И **интегрирования**, как основной метод синтеза. Делаем выбор в пользу *аналитического метода в геометрии в противовес её синтетическому описанию*.

Появляются идеи **вектора, преобразований координат, матриц частного вида**. Всё это даёт возможность развить эти идеи далее по их собственным направлениям, не теряя при этом связей между всеми этими понятиями. Появляется представление о *геометрических объектах разных видов*, среди которых мы уделяем особое внимание **тензорам и их плотностям** в силу

простейших связей этих объектов с процедурами измерения.

Возникает идея увеличения числа масштабов, необходимых для описания того или иного континуума. **Идея многомерности.** Эта идея снова приводит к пересмотру и уточнению свойств всех ранее введённых понятий, как геометрии, так и других ветвей математики.

Возможность (и необходимость) описывать один и тот же континуум разными способами приводит также к весьма важному для нас понятию **группы и её представлений**. Мы также вынуждены обратить внимание на то, что среди всех возможных способов описывать континуумы, среди всех возможных систем координат, нужно проводить различия по степени их соответствия поставленной задаче — полноценному, взаимно однозначному описанию континуума. Т.е. к *классификации систем координат на регулярные и сингулярные*.

Особое внимание мы посвятили и развитию представления о мере непрерывности при переходе к её описанию с помощью идеи пространств (пока многообразий) с числом измерений, большим единицы.

Мы также приходим к пониманию того, что одна из использованных нами идей, необходимых для последовательного описания ситуаций с меняющимися от точки к точке континуума (непрерывности) эталонами (а учёт возможности этого становится необходимым), **идея локализации** всех геометрических объектов, заставляет нас уточнить представление об описании континуума переходом от понятия **многообразия**, точки которого связаны пока весьма слабо, лишь введением общей для континуума (всего, или его части) системы координат, к понятию **пространства с аффинной связностью**. Новое геометрическое понятие описывается наличием в каждой точке многообразия определённого набора функций. Сами функции при этом мы никак не определяем. Но мы определяем нечто гораздо более важное — их смысл с точки зрения процедуры измерений. *Связность описывает самый общий вид того, как могли бы в принципе меняться эталоны, употребляемые для описания континуума при переходе от точки к точке*. Именно эта структура становится для нас важнейшей. Просто потому, что она увязывает наше локальное описание частей мира в единое целое. Её наличие может позволить нам перейти от анализа к синтезу.

Фактически, полученный к данному моменту набор идей уже должен позволить нам перейти к желаемым действиям — к их адаптации для собирания в единую систему конкретных фактов, известных нам о реальном мире. Для формулирования хотя бы основ физики, как описания мира. Описания его частей и, по возможности, Мира как целого.

Однако я посчитал весьма важным рассмотреть ещё одно математическое понятие, идею **метрики**. На первый взгляд, она стоит вроде бы на особицу от той линии развития идей, которая

была описана ранее. Но это совсем не так.

Легко показать, что идея метрики без проблем вписывается в эту линию как некоторый частный случай среди более широких возможностей, описываемых аффинной связностью. Достигается это рассмотрением дифференциала метрики при её локальном описании.

По самому нашему определению, метрический тензор, является постоянным во всей области действия ортогональной системы координат.³⁵ Той системы, которая предполагает одинаковость единиц измерения, векторов репера, всюду. Его обычные производные в таких системах равны всюду нулю. В криволинейных координатах, в которых предполагается наличие зависимости векторов репера от точки, равными нулю обычные производные не будут. Но абсолютный дифференциал метрического тензора (как и его абсолютные производные) будет обращаться в нуль всюду в евклидовом пространстве. Это требование позволяет найти соотношения между метрическим тензором и аффинной связностью, введённой нами ранее.

Здесь я приведу выражение для тех связностей, которые допускают существование метрики на описываемых ими пространствах. Допускают означает в этом случае несколько больше, чем просто возможность. Это означает, что как через введённую метрику можно получить соответствующую ей связность, так и наоборот, наличие некоторых свойств у связности позволяет определить через неё и метрический тензор. Возможно, с какой-то степенью свободы. Т.е., возможно, не единственную метрику, а некоторый их класс.

Выражение коэффициентов аффинной связности через метрический тензор и его производные в произвольной системе координат называют **символами Кристоффеля**:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}). \quad (2.60)$$

Тензор g^{il} является контравариантной формой метрического тензора. Получается как матрица, обратная метрической матрице, из соотношения $g^{il} g_{lj} = \delta_j^i$. Т.к. определитель метрического тензора всюду не равен нулю, то его контравариантная форма тоже существует всюду. Для нормальной матрицы, очевидно что обратная ей тоже является нормальной. Я не буду здесь останавливаться на способе получения коэффициентов аффинной связности из метрики и её производных. Отмечу только, что эта связность, согласованная с метрическим тензором, является симмет-

³⁵ На самом деле, не только в ортогональных, но и во всех, полученных из ортогональных глобальным линейным преобразованием. Естественно, с не нулевым определителем. Такие, более общие координаты, часто называют **аффинными**. В общих аффинных координатах метрический тензор является глобально постоянным, но матрица его может отличаться от нормальной. Ортогональные координаты являются “подгруппой” аффинных.

ричной и, как видно из её связи с метрикой, будет одной и той же для всех метрических тензоров, отличающихся друг от друга постоянным (всюду на континууме) множителем. И ещё, *эта связность обращается тождественно в нуль во всех аффинных системах координат.*

Вот это свойство — обращение в нуль всюду — можно убрать, чтобы расширить идею метрики, при сохранении связи с метрическим тензором соотношением (2.60). Такая метрика уже не может быть нормализована сразу везде на континууме. Но для каждой данной точки возможность нормализации метрики остаётся.

Пространства аффинной связности, для которых связность выражается через метрический тензор по приведённой выше формуле, называют **римановыми** пространствами (пространствами Римана). А связности таких пространств я буду далее называть **метрическими**. Очевидно, что в бесконечно малой окрестности каждой точки свойства римановых пространств совпадают со свойствами евклидова пространства, т.к. метрический тензор в ней может быть сделан евклидовым с помощью надлежащего выбора координат.

Таким образом, дерево понятий геометрии, вырастающее из понятия о множествах, дискретных и непрерывных, на данный момент выглядит вполне единым. И крона его выглядит как пространства аффинной связности. Связности всевозможных видов. И нам предстоит выяснить, какие ограничения на эти возможности накладывают наши знания о мире.

Однако, в дальнейшем мы перейдём к ещё более широкому описанию геометрии. К описанию континуумов с помощью понятия о **расслоенных пространствах**. С помощью пространств, в которых с точкой ассоциируются и другие, отдельно описанные пространства математических объектов какого-либо специального вида. Это будет совершенно необходимым для построения квантового описания мира.

Внимательный читатель мог бы заметить, что на самом деле мы это уже и так делаем. В самом деле, разве не являются пространства касательных и кокасательных векторов вполне самостоятельными понятиями? А пространства матриц преобразований? А пространства тензоров всевозможных видов, начиная со скаляров? А сама связность, что это как не дополнительная надстройка над самим континуумом?

Всё это так, но все эти надстройки пока напрямую объединены понятием процедуры измерения. Поэтому я не стал переходить к более общему понятию расслоенного пространства сейчас. Далее для описания мира нам потребуется добавить нечто более абстрактное, менее связанное с конкретикой измерения. Это будет локализованное **пространство состояний**. Состояний чего и для чего — обсуждение будет позже, при построении здания физики.

2.15 Симметрии

Прежде чем перейти к описанию основ физики, я остановлюсь ещё на одной группе понятий, которые можно определить как представление о симметриях.

Эта группа понятий, с одной стороны, уже включена в рассмотренные нами идеи как некоторые их свойства. Но, с другой стороны, эти понятия можно рассматривать и как нечто внешнее, формообразующее. В частности, в современной физике понятиям симметрии (в особенности “нарушенной” симметрии) придаётся некий глубинный, почти мистический смысл. А мне хотелось бы избежать всякой мистики, поскольку она никак не совместима с настоящей наукой.

Да и для лучшего понимания дальнейшего содержания книги весьма полезно составить себе представление о двух, почти противоположных понятиях, которые, тем не менее, можно считать проявлениями симметрии. Просто двух разных видов, двух разных подходов, что следует считать симметричным.

Что мы в обыденной жизни обычно называем симметричным? Например, симметричное лицо. Такое, что если отразить левую сторону лица на правую относительно прямой линии, проходящей вертикально через кончик носа и середину подбородка, то на лице всё совпадёт, лицо останется неизменным. Или возьмём окружность. Она для нас очень даже симметрична. Симметрия в переводе с греческого на русский язык означает пропорциональность, соразмерность. А в переводе на язык математики означает инвариантность в широком смысле чего-либо относительно тех или иных преобразований. Это первый, наиболее широко распространённый взгляд на понятие симметрии.

В математике, в самых разных её разделах можно встретить различные способы описания такого вида симметрии. Все они в той или иной форме связаны именно с констатацией неизменности какой-то структуры относительно определённой группы преобразований.

Например, функция одного аргумента может быть симметричной относительно замены знака у аргумента: $f(x) = f(-x)$. Или функция не изменяется при сдвиге аргумента: $\sin \phi = \sin(\phi + 2\pi k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Симметричность не обязательно связана с множеством значений аргументов. Преобразование может заключаться в изменении структуры какого-то объекта. Например, метрика симметрична относительно перемены мест индексов: $g_{ik} = g_{ki}$. Имеется много разных форм симметрии такого рода. Но всегда что-то остаётся неизменным. Инвариантом преобразований. Разных преобразований.

В математике к симметрии такого же типа можно также отнести и представление об антисимметрии, ситуации, когда структура, или объект при преобразовании меняет знак: $f(x) = -f(-x)$;

$T_{ik} = -T_{ki}$ и т.д. Здесь ведь тоже кое-что остаётся инвариантным, неизменным относительно преобразования. А именно, абсолютные значения (модули) рассматриваемых величин.

Примеров симметричных и антисимметричных структур, функций и прочих математических объектов, обладающих подобными свойствами относительно тех или иных групп преобразований, можно привести множество. Они, как правило, будут важными и в нашем описании реального мира.

Отметьте одно важнейшее свойство таких симметрий (я их буду называть **симметриями второго рода**³⁶). *Если мы имеем в начале некоторую достаточно широкую группу преобразований, которым подвержены рассматриваемые нами объекты, то при переходе к всё более и более узким её подгруппам, симметрий такого рода, дополнительных инвариантов, будет появляться всё больше и больше.* Грубо говоря, чем ограниченнее группа преобразований, тем большее число объектов не будет чувствовать эти преобразования.

Однако, я хочу обратить ваше особое внимание и на то, что происходит на противоположном пути, на пути расширения допустимых преобразований.

Ясно, что с одной стороны число симметрий второго, уже описанного нами рода, число инвариантов группы преобразований будет уменьшаться. Можно сказать, симметрии этого вида будут нарушаться.

Но будет происходить и обратный процесс, когда структуры, объекты, ранее выглядевшие совершенно независимыми друг от друга, становятся либо частями одной и той же структуры, либо становится ясным, что ранее мы имели дело с разными точками зрения на один и тот же объект. Поясню сказанное примерами.

Нарисуйте на листе бумаги окружность и поставьте его перпендикулярно вашему лучу зрения. Что вы увидите? Естественно, окружность. А теперь наклоняйте лист не сгибая постепенно от себя или на себя. Или вправо, или влево. Что вы будете наблюдать? Фигура на листе бумаги из окружности будет превращаться в разные виды эллипсов. Но ведь сама фигура на листе не изменяется. Аналогичный эффект возникнет, если вы отнесёте лист бумаги сначала к системе ортогональных координат с одинаковыми единицами по обеим осям, а потом примените масштабирования с разными коэффициентами для разных осей. Что можно сказать по этому поводу?

- Увеличение возможных точек зрения приводит к объединению ранее явно разных фигур в единственную. Точнее, фигуры, казавшиеся совершенно разными, при преобразованиях координат (или при изменении способа описания,

³⁶Ниже я рассматриваю другой взгляд на симметрию, и, поскольку он является гораздо более важным для формулирования полноценного описания мира, я предпочитаю именно симметрии того вида называть симметриями первого рода.



Рис. 2.1: Превращение окружности в разные эллипсы при вращении листа бумаги в разных направлениях.

измерения) превращаются друг в друга, оказываются разными образами одного и того же.

- Если у вас нет возможности сравнивать единицы измерения для разных координат, сравнивать разные векторы масштабов в репере, то утверждение, что данная кривая является, например, окружностью и ничем иным, не может быть сделано абсолютным. Оно будет верно только для вполне конкретной “группы” процедур измерений, связанных определённой группой преобразований. При расширении допустимых преобразований за пределы этой группы, кривая перестанет быть окружностью. Может выглядеть как эллипс, или даже как сложная замкнутая кривая (но без самопересечений).

Ещё один пример, являющийся для дальнейшего весьма важным. Всех нас со школы учили понятию вектора на примере скорости, которую для трёхмерного пространства обычно записывают в виде: $v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}$, $\alpha = 1, 2, 3$. Этот объект, рассматриваемый в рамках евклидовой геометрии трёхмерного пространства, действительно является полноценным вектором относительно **всех** преобразований в этом трёхмерном пространстве. С точки зрения геометрии это будет вектор, касательный к траектории движения некоторого тела, описанной в трёхмерном пространстве за какой-то промежуток времени. В физике с ним оказываются связаны два разных закона сохранения — закон сохранения импульса mv^α (количества движения), и закон сохранения кинетической энергии $mv^2/2$, $v^2 = \sum_{\alpha=1,2,3}(v^\alpha)^2$. Помимо скорости,

в эти законы вовлечена и масса тела m , величина чуждая геометрии.

А теперь взгляните на скорость и эти два закона сохранения с точки зрения четырёхмерного пространства-времени, включив в рассмотрение и время, как одну из координат геометрического описания мира.

Что при этом произойдёт? Скорость вообще перестаёт быть вектором, если преобразования координат включают в себя хоть какое-то изменение координаты “время”. Но на сцене появляется новый вектор $dx^i/d\tau$, тоже касательный к траектории. Вот только в четырёхмерном пространстве для его определения необходимо ввести на этой траектории ещё и скалярный параметр τ . Как? Ну, это может быть и некоторое “время” (его в физике часто называют **собственным временем**), базирующееся на **специальной** системе координат (специальной процедуре измерения), в которой траектория тела полностью совпадает с линией времени. Такую систему называют **системой покоя тела**. Этот способ измерения далее рассматривается совершенно отдельно от всех остальных возможных. Он фиксируется. Т.е. те масштабы (тот репер), которые к нему приводят, полагаются доступными для всех остальных систем координат. И в любых координатах при определении касательного вектора в качестве параметра на траектории берётся именно это, одинаковое для всех координат значение “собственного” времени.

При этом в физике осознали ещё одно следствие такого расширенного геометрического описания мира. **Вместо двух разных законов сохранения появляется всего лишь один — закон сохранения (неизменности) касательного к траектории вектора (настоящего вектора, четырёхмерного) вдоль этой траектории.** Нет отдельного импульса, нет отдельной кинетической энергии у массивного тела. Есть энергия-импульс, четырёхмерный вектор. А импульс и кинетическая энергия всего лишь его разные компоненты. И масса из внешнего параметра становится характеристикой этого четырёхмерного вектора, энергии-импульса. А именно, в системе покоя тела это единственная не нулевая компонента вектора, касательного к траектории тела. Который, естественно, существует и в этой специальной системе и пропорционален вектору репера, служащему для описания координатной линии времени. Т.е. масштабу времени.

Задумайтесь. Простое расширение геометрического описания мира пространством большего чем ранее числа измерений, привело к объединению двух законов сохранения в единственный. И ещё привело к объединению двух разных понятий, скорости и массы в единый объект. А число инвариантов (законов сохранения) уменьшилось, да. Но описание мира стало более соразмерным, более “симметричным”, не так ли? И ведь это именно тот

результат, к которому мы стремимся — мы ведь хотим создать описание мира на едином языке, а не на разных диалектах.

Вот такую симметрию, состоящую в объединении разнородных величин в проявления одной и той же при расширении способов описания, я и буду называть далее **симметрией первого рода**.

Приведённый мной пример скорости, импульса и кинетической энергии не единственный из уже известных в настоящее время в физике. В своё время Максвелл объединил в общей структуре электрическое и магнитное поля. Сначала их единство можно было увидеть через их связи между собой, записанные с помощью уравнений Максвелла. Позднее это объединение стали записывать в форме единственного тензора Максвелла, так что единство этих полей стало очевидным. Также как и сами уравнения стали яснее, будучи сформулированными именно для тензора.

Эти два примера иллюстрируют два из известных сегодня важнейших шагов на пути единого описания мира на языке физики. Поэтому стоит продолжать намеченный ими путь, пытаясь сформулировать наиболее широкое, основывающееся на симметриях первого рода описание.

Глава 3

Основы физики как описания мира

3.1 Вселенная и её части

Выше я писал, что тех идей, которые мы уже рассмотрели, должно быть достаточно для создания нужного нам описания реального мира. По крайней мере, для формулирования основ такого описания. Конечно, их ещё нужно конкретизировать и уточнять, что в нашем Мире и в какой степени соотносится с введёнными нами идеями. Вот этим мы теперь и займёмся.

Для того, чтобы было ясно, к какому описанию Мира я буду стремиться, сформулирую вкратце некоторый итог двух предыдущих глав. Описание Мира это некоторая совокупность идей, высказанных на каком-то языке. Язык должен удовлетворять определённым требованиям, что можно определить как утверждение: языком описания должен быть язык науки. Наиболее развитым и удовлетворительным в этом смысле из языков науки является математика. По многим причинам, уже указанным ранее, в качестве наиболее предпочтительного языка для создаваемого описания Мира, я выбрал (и не только я, этот выбор диктуется историей развития науки) диалект математики, называемый геометрией. Причём геометрией в её аналитической форме. Вследствие того, что главным способом описания Мира для нас является **измерение**. Другие разделы математики тоже используются при этом, но основной идеей является описание Мира с помощью соотношений, которые называют геометрией. В этом смысле, *Миру и его частям, явлениям нами в нём наблюдаемым, мы будем стремиться поставить в соответствие чисто геометрические конструкции, без каких-либо дополнительных, внешних надстроек*. Если это удастся сделать, то поставленная цель будет достигнута.

Сначала о **Мире**, как целом, о **Вселенной**. Достаточно очевидно, что Вселенной мы должны поставить в соответствие нашу идею континуума, непрерывности. Вселенная нами рассмат-

ривается как некая *совокупность всевозможных связанных частей*. Если измыслить нечто, совершенно не связанное вообще с чем-либо другим, имеющимся во Вселенной, то каким образом “другое” сможет установить сам факт существования этого самого “нечто”? Нет ответа. Точнее он есть, только сугубо отрицательный — не существует такого способа. Для всего “другого” это “нечто” просто не существует. Так что дискретное множество частей мы можем рассматривать лишь как вложенное в некую непрерывность, континуум, объединяющий всё и вся, содержащий в себе все части и явления, известные нам из опыта. *Континуум, включающий в себя вообще всё, что имеется — в прошлом, настоящем и будущем (для нас) и следует называть Вселенной. И ничто другое. У такого описания Мира пока можно декларировать всего лишь одно свойство, вытекающее из нашего опыта. Вселенная существует. Существует в смысле “имеется”.* В одном экземпляре. Всё, что мы сможем добавить к этому, будет уже не о Море как целом, а о его частях, связях между ними — т.е. о локальных свойствах континуума.

Хорошо, для описания Вселенной мы можем применить идею континуума. Давайте посмотрим снова внимательно, какими же свойствами мы наделили наиболее развитую к настоящему моменту (из имеющихся в нашем распоряжении) и наиболее общую идею описания континуума — идею пространства аффинной связности.

Пространство аффинной связности при локализованном описании континуума с помощью системы координат требует конкретизации следующих своих свойств:

1. Нужно установить число масштабов n , **необходимых и достаточных** для полноценного локализованного описания континуума с помощью процедуры измерения. Т.е. описание и сам континуум в идеальном случае должны находиться во взаимно однозначном соответствии — каждой точке континуума (Мира) должна соответствовать одна и только одна точка в описании, в пространстве аффинной связности. И наоборот.
2. Нужно с каждой точкой континуума, с каждым его далее неделимым элементом, связать своё (касательное) пространство всевозможных векторов, которые, как идеи, возникают при локализации образов масштабов, единиц измерения. В самом общем случае, любой из этих векторов, кроме нулевого, может рассматриваться как образ одного из масштабов для какой-то одной или для множества систем координат.
3. Нужно для каждой точки континуума также определить её связи с соседними, бесконечно близкими точками. Делается это заданием коэффициентов аффинной связности как

поля функций на континууме.

А что же при этом должно считаться точкой в описываемом таким образом континууме? Ведь Мир континуумом при таком способе описания может делать только признание наличия у Мира следующего свойства:

- Должно быть возможно выделить в Мире такие части, которые соответствуют максимальной объявленной мерности Мира. Т.е. имеющие n -мерный объём. Тогда точкой следует считать предел любого такого объёма при стремлении к нулю всех линейных мер, составляющих этот объём.

В сформулированных нами понятиях речь идёт о

$$\lim_{dx^i \rightarrow 0} dx^1 \cdot dx^2 \cdot \dots \cdot dx^n. \quad (3.1)$$

Вот такой элемент мира, который можно характеризовать этим пределом (достигнутым, или в некотором приближении) и следует считать точкой. Для трёхмерной евклидовой геометрии мы сказали бы — точка это то, что не имеет ни длины, ни ширины, ни высоты. Заметьте, в нашу математическую идею пространства аффинной связности эти понятия, “линейные меры”, включены изначально, как именно те свойства множества, которые делают его непрерывным. Поэтому такое определение точки, элемента множества приемлемо.

В этом смысле все точки Мира следует полагать равноправными. Отличия между ними с точки зрения геометрического описания Мира может отметить только разная в разных точках связность. Т.е. на этом уровне описания только разница в связях между точками может быть использована как некий указатель индивидуальности каждой данной точки Мира. Это верно, если мы ограничиваемся чисто геометрическими свойствами нашей идеи, свойствами вытекающими из построения системы координат посредством измерений. Однако, я уже многократно упоминал, что с идейной точки зрения ничто нам не мешает снабдить континуум какими-то дополнительными свойствами, в том числе и определить числовые функции (поля) на нашем континууме посредством дополнительных измерений. Измерений, не связанных с построением систем координат. Для геометрии это будут поля скаляров. Более того, такие поля возникают и из самой геометрии (скалярные параметры для подпространств). Идею скалярного параметра можно ассоциировать не только с непрерывными подпространствами меньшего числа измерений, чем объявленный для континуума максимум. Её легко можно довести и до идеи нумерации, т.е. до счётного множества, описывающего дискретный ряд частей. Далее мы увидим, что важнейшей чертой нашего описания Мира станет как раз такой параметр.

А теперь посмотрим, насколько наше обыденное представление о Мире соотносится с объявленными свойствами математической идеи пространства аффинной связности.

Число измерений. У нас есть обыденные понятия длины, ширины и высоты. И ещё, промежутка времени. Все эти “линейные” меры вместе говорят нам — геометрическое описание мира должно иметь четыре измерения. Образом Мира должен быть четырёхмерный математический континуум. Что может служить масштабами я хочу обсудить позже. Сейчас займёмся выяснением вопроса, какие части мира могут рассматриваться в качестве прототипов точек.

Сначала я хочу обратить ваше внимание на то, что деля мир на части и называя их, мы наплодили огромное множество понятий. Понятий никак не связанных с геометрией. По вполне понятной причине. Сама идея геометрии достаточно позднее наше изобретение. И уж тем более её формализация в представленном в этой книге виде. Понятие пространств аффинной связности стало достаточно разработанным лишь к середине двадцатого века. Однако понятие геометрии в очень специальном виде, геометрии Евклида предшествовало, и намного, началу создания Физики, как научного способа говорить о Мире.

А геометрия Евклида в своём исходном виде, концентрируется на специальном типе пространства трёх измерений. “Специальность” евклидова пространства связана с убеждением о наличии всюду и везде (и “всегда” тоже) абсолютно неизменных, не зависящих от места и времени, абсолютно твёрдых единиц для измерения расстояний.

Добавим к этому убеждению наличие у частей мира множества свойств, не связанных с понятием “длина” явным образом — например, вес и цвет. Их тоже можно измерять своими эталонами. Результатом стало создание описания Мира в виде кентавра — евклидова пространства (3х измерений!), **вмещающего** всевозможные предметы и явления, отвечающего за применение понятий возникающих из измерения расстояний, и физики, описывающей эти предметы и явления. *Время при этом, хотя и присутствует явно, но присутствует как нечто тоже внешнее, не зависящее от предметов и явлений, одинаковое для всех точек вмещающего пространства.*

Такая картина мира восходит к И.Ньютону. Нужно сказать, что и сам Ньютон, и некоторые другие работавшие в то время учёные, вполне осознавали, что такая картина мира неполноценна. Ведь способа связать измерения реальных расстояний между телами и расстояния в идеальном вмещающем пространстве никто из них не видел. Но аналитическая геометрия была тогда ещё в совсем зачаточном состоянии (она и создавалась этими учёными) и проблема не имела решения имеющимися в их распоряжении средствами. А дальше все привыкли воспринимать этого кентавра, представление о пространстве, *вмещающем Вселен-*

ную, как нечто уже привычное. Более того, очень удобное. Что не может описать постулированная геометрия с успехом описывает физика, добавляя и добавляя новые законы, когда предыдущее состояние “геометрия + физика” становится не вполне достаточным для описания известных свойств мира. Единство описания утрачивается всё больше и больше? Так ведь этого единства и сначала не было.

Одной из существенных черт, сформированных в картине мира с **идеальным** пространством, вмещающим “материальные предметы и явления”, стало представление о материальной точке. Причём, прототипом точки, базовым элементом непрерывного множества, стал трёхмерный объём. Просто потому, что измерение времени в этой картине не рассматривается как необходимый элемент геометрического описания мира. Время внешнее к геометрии. “Вселенная” в этой картине мира “эволюционирует” во времени. При этом “существует как целое” в трёхмерном евклидовом (вмещающем) пространстве. А само это вмещающее пространство вообще никак с предметами и явлениями реального мира не связано. Для нужд физики, дополнительной к геометрии, потребовалось снабдить эту точку ещё и физическим свойством, массой. Позже мы увидим, что это искусственно выброшенное из геометрии время вернулось таким способом в описание движения частей мира относительно друг друга. В четырёхмерной геометрии относительное движение частей мира факт совершенно тривиальный — у этих частей разные подпространства существования в общем геометрическом описании. А в картине с трёхмерным вмещающим пространством тела могут иметь одинаковые пространственные координаты, но двигаться друг относительно друга (столкновение тел). Так в физике появилось представление о материальной точке. Точке в геометрическом смысле, но имеющей некоторую массу, физическую характеристику. Вся механика по сей день базируется на этой идее. Прототипами материальных точек стали трёхмерные части твёрдых тел. Идея неограниченного уменьшения всех трёх линейных размеров этих частей при сохранении сути самих тел была оформлена в понятие “частица”. Частица камня, частица металла, частица воды и т.д.

Да, физика уже давно знает, что при делении всех без исключения “материальных” тел (иными словами, при делении “вещества”, чего-то, обладающего массой) мы всегда на каком-то этапе деления теряем ту самую суть, с которой начинаем. Казавшиеся непрерывными твёрдые (и не твёрдые тоже, но это нами воспринимается легче) тела сначала превращаются в совокупность молекул и/или атомов (со свойствами совершенно отличными от исходных свойств тел), а потом и во что-то совсем новое — элементарные частицы. На эти элементарные частицы (частицы чего?) точно также переносится представление о них как о материальных точках. Т.е. представление о геометрических точках

трёхмерного пространства, снабжённых массой.

Если для *математической идеи непрерывности*, как мы её сформулировали, при делении её на части базовым свойством является полное подобие новых частей исходному целому, то “вещество” физики таким свойством не обладает.

Важнейшим для нас результатом развития этих представлений о веществе, целиком и полностью базирующемся на нашем опыте, стало понимание неравноправности, неодинаковости различных точек мира. И не только точек, но достаточно больших его объёмов. Об одних частях мира мы можем говорить как о заполненных “веществом”. А другие части мира либо кажутся вообще от него свободными, либо его в них столь мало, что только отдельные точки этих частей мира могут быть ассоциированы с понятием “вещества”. Где пусто, а где очень густо.

В картине мира Ньютона, когда описание пространства выделено из полного описания Мира в отдельный идеальный геометрический образ, вмещающий всё остальное, в Мире наблюдаемое, такое различие между его частями не приводит к различию между геометрическими свойствами точек пространства.

Но нам, при построении нашего описания Мира единой геометрической конструкцией, придётся учесть это очевидное различие между точками геометрического образа Мира с самого начала. Просто потому, что опыт настойчиво этого требует. Мы остановимся на способе описания этого различия между точками геометрического пространства чуть позже.

А сейчас я лишь хочу обратить ваше внимание на то, что материальная точка (трёхмерная) не может рассматриваться как хороший претендент на реализацию понятия точки в четырёхмерном континууме. Причина проста — в этом понятии нет ничего о промежутке времени, который нам тоже необходимо учитывать.

Однако, нужно сказать, что необходимость (желательность) единого, согласованного описания мира всё время оставалась на повестке дня. И, как я уже говорил, в физике, как части полного описания, такого рода достижения были. На рубеже 19го и 20го веков настала очередь и некоторого взаимопроникновения физики с геометрией. На первом этапе было осознано, что измерения пространственных расстояний не могут быть определены без учёта протекания при этом некоторых промежутков времени. Сначала это представление было оформлено как Специальная Теория Относительности, сформулированная трудами Лоренца, Пуанкаре, других учёных, и завершённая А.Эйнштейном. А потом Г.Минковский объединил остававшееся отдельным от времени трёхмерное пространство и отдельное от пространства время в единое понятие — **четырёхмерное пространство-время**. Причём для такого объединения пришлось отказаться от части свойств, приписываемых вмещающему евклидову пространству. Пришлось признать, что четырёхмерное пространство кое в чём

отличается от привычного трёхмерного евклидова, а именно в способе определения “расстояния” между точками. Так было введено представление о **псевдоевклидовом** пространстве, или пространстве Минковского. На свойствах этой идеи я подробно остановлюсь позже. Но, замечу, **пространство-время на этом этапе по-прежнему осталось вмещающим и совершенно не связанным с происходящими на его арене физическими явлениями.**

Тем не менее, для определения прототипа точки пространства-времени (теперь четырёхмерного) этот шаг становится решающим. Точки пространства-времени Минковского, как идеи, уже не точки трёхмерного пространства. Они, по необходимости, имеют ещё одну координату, время. И получают новое название — **событие**. Само понятие события здесь остаётся весьма абстрактным — констатация факта наличия у каждой точки четырёх, а не трёх координат в описании, не более того.

Но для нас и этого указания на то, что именно следует рассматривать в качестве прототипа точки пространства-времени, уже достаточно.

Событие. Начнём, естественно, с самого обычного для нас бытового понятия. Это, например, столкновение автомобилей. Или факт падения яблока на голову И.Ньютону (если он и правда имел место). Или факт вашего рождения. Да что угодно, выделенное нами из реального мира, имевшее место быть в нём, где-то и когда-то, можно назвать событием с полным на то правом. Да и всю нашу жизнь мы привычно рассматриваем как последовательность всяких разных событий.

Что это нам говорит? Бытовое понятие “событие”, в силу своей всеобщей применимости к чему угодно, является очень хорошим кандидатом на роль прототипа точки для геометризации описания нашего мира. Нам нужно только вычленив его идею и правильно её сформулировать для наших нужд.

Итак, каким основным свойством обладает произвольное событие самого общего вида, определённое нами как совокупность имевшего место быть чего-то где-то когда-то? Это свойство называется именно “имеется”, “существует” в мире. Т.е. то самое свойство, которое мы и положили в основу понятия о множестве. Отлично.

Далее. События такие, как выделенные части Мира, в подавляющем большинстве являются сложными, составными. Их можно делить на составляющие их другие события. С той же самой базовой характеристикой “иметься”, “существовать”. При этом связанные с ними трёхмерные объёмы и промежутки времени (место и время) очевидным образом уменьшаются. Т.е. мы имеем в наличии возможность реализовать, хотя бы частично, процесс деления событий, как прототипов точек пространства-времени, с целью уменьшения связанного с ними четырёхмерного объёма вида (3.1) при $n = 4$. То, что нам и надо. Ведь даже

если возможность проводить такой процесс где-то и оборвётся (а опыт нам явно говорит, что это именно так), *для формулирования идеи* препятствия не возникает. Мы просто **допустим**, что **могли бы** продолжать этот процесс потенциально бесконечно. А то, что реально не сможем, так это обдумаем потом.

И, наконец, помимо констатации фактов событий, наш опыт даёт нам ещё одну важнейшую информацию именно о них. Между некоторыми событиями имеются причинно-следственные связи. И это тоже неоспоримый опытный факт. События с такими связями выстраиваются, по крайней мере, в цепочки. А может и в более запутанные структуры. Т.е. события характеризуются ещё и тем самым свойством, которое сподвигло нас на определение непрерывных множеств.

Таким образом, центральным понятием при геометризации описания Мира или его непрерывных частей, при создании его аналитического геометрического изображения, для нас является именно понятие **“событие”**.

Вот только задумаемся, а все ли части Мира, которые мы в нём можем выделить, в том числе, имеющие четырёхмерный “объём”, мы можем назвать событиями? Даже в собственной жизни мы считаем событиями только некоторые, особенные её части. А в мире? А в мире события в строгом понимании нами этого слова мы тоже связываем отнюдь не со всеми частями его, и уж тем более не со всеми (воображаемыми) его точками. Наш опыт говорит, что имеются значительные по четырёхмерному объёму части мира, в которых событий происходит очень мало. И есть другие, заполненные событиями весьма плотно. Т.е. *мы связываем события с наличием и отсутствием “вещества”*. Бытовые понятия “событие” и “вещество” для нас оказываются однозначно связанными.

Причём опыт как раз гораздо лучше соотносит с нашей идеей бесконечно продолжаемого уменьшения “объёмов”, мер, выделенных в континууме, без потери их свойств, те части Мира, где событий нет совсем (ну или почти нет). *События это именно то, что нарушает однородность свойств частей Мира. Как и вещество.*

Из этого следует, что, хотя произвольно выделенные нами части мира (имеющие четырёхмерный объём) мы и можем с полным правом называть событиями, но при их уменьшении, т.е. при определении точек геометрического образа мира, **нам нельзя сохранять это название для всех точек**. Часть точек действительно окажется ассоциированной с нашим исходным представлением о событиях. Но другая часть нет. Причём, хорошо известно, что в Мире “пустоты”, точек без событий, гораздо больше. Понятно, что **эта пустота в нашем изображении мира не будет пустотой вмещающего пространства**. Ведь во всех этих точках мы тоже предполагаем существование и векторов, служащих для изображения возможных масштабов,

и коэффициентов аффинной связности, служащих для описания связей между соседними точками нашей непрерывности, нашего Мира. Пусть как возможность внешней к изображению, но существующую именно для описываемой непрерывности. Поэтому мы далее будем использовать специальное слово “вакуум” для обозначения такой не пустой пустоты. Вроде и пустота, но слово не русское, поэтому в него легче добавить дополнительный смысл. Тем более, что в физике уже давно оно этот смысл приобрело. Физическое понятие о вакууме отлично от простого понятия пустого пространства.

Таким образом, далее мы будем чётко различать “обычные” точки континуума, получаемые (пусть и не реализуемым точно) предельным переходом к нулю всех линейных размеров некоторого выделенного в мире четырёхмерного объёма, и другие, связанные с классическим понятием “вещество”, но для нас ассоциируемые сейчас с понятием “событие”.

События сложные, составные из других событий, т.е. такие, которые мы в состоянии разделить, мы точками, естественно, полагать не будем.¹ А вот **те события, которые мы далее делить не в состоянии, не по нашему выбору, а по тем или иным объективным причинам, мы будем принудительно ассоциировать именно с точками нашей непрерывности. С особыми её точками, такими, где есть события. А сами такие события будем называть “элементарными”**.

Здесь остаётся ещё много вопросов для обсуждения — что это такое, эти элементарные события. Заполняют они полностью хоть какую-то непрерывную часть мира, или в нашем распоряжении таких событий не имеется, и т.д. Обо всём этом речь пойдёт ниже.

3.2 Приближённое описание мира

Прежде чем следовать по указанному пути дальше, я хочу обратить ваше внимание на явно возникающую проблему — **построить таким образом желаемое нами полное и точное, взаимнооднозначное описание мира мы не сможем**. Мы сможем получить лишь **приближённое** его описание. Что это значит? Что такое приближение? И почему только приближённое описание Мира оказывается возможным для нас?

Приближение. В математике, как собрании хорошо сформулированных идей, приближение появляется при записи иррациональных чисел (всегда!). Иногда, при определённой форме пред-

¹Хотя это не совсем верно. В определённых приближениях, называемых классическими, мы будем ассоциировать с точками именно такие, сложные, и даже перекрывающиеся события. Однако, в данном месте я хочу заострить внимание именно на возможном **предельном** случае описания нашего Мира пространством-временем. Случае максимально достижимой детализации такого описания.

ставления, также и рациональных чисел. Только целые числа свободны от понятий “приближённо”, “приблизительно”.

Связано это с нашим идеальным понятием потенциальной бесконечности и его практической не реализуемостью. Всюду, где в нашу математическую идею попала потенциальная бесконечность, мы вынуждены при реализации этой идеи какими-либо средствами реального мира удовлетворяться результатом только приближённо соответствующим математической идее.

В физике понятие “приближение” заметно расширяется. В него мы включаем ещё и такие описания мира, когда мы заведомо пренебрегаем учётом тех или иных наверняка известных нам его свойств. Например, пренебрежение силой трения в механике. Или взаимодействием частиц, составляющих газы. И т.д. Что важно уяснить при этом? То, что **каждое такое “приближение” создаёт своё собственное описание мира или его части**. Иногда несколько разных описаний могут быть согласованы друг с другом, будучи, например, вложенными одно в другое, как результат принятия в рассмотрение всё новых и новых эффектов, которыми ранее пренебрегали. Иногда такого рода описания становятся трудно совместимыми, т.к. соглашения, для них принятые, могут в чём-то противоречить друг другу. И такое в физике бывает. Я не хочу подробно останавливаться на этом вопросе.

Нужно выделить главное. **Всякое наше описание Мира будет его приближённым описанием**. Не соответствующим сформулированным ранее математическим идеям во всей их полноте. **Описание Мира не будет идеальным**.

Главной причиной такой ситуации, независимой от тех или иных соглашений, принимаемых нами сознательно, причиной неустранимой, является отсутствие у нас средств описания непрерывностей точно и однозначно. Невозможность реализации потенциальной бесконечности. Все наши идеи описания непрерывностей так или иначе опираются на понятие предела последовательности. Бесконечно продолженной. А мы можем реализовать только прототип этого, конечную последовательность действий.

Следовательно, нам придётся принимать это ограничение наших возможностей во внимание и здраво оценивать достигнутую близость реально возможного описания мира к желаемому идеальному.

Применительно к начатому обсуждению реализации понятия точки мира, как точки непрерывного множества, всё это тоже нужно будет учесть.

3.3 События и причинно-следственные связи

Приступим теперь к возможному способу описания важнейшего для нас понятия “событие”. Сначала самого общего вида.

Основное свойство некоторого произвольного события, выделенной части мира — это свойство быть, иметься. Дополнительные качества у этого свойства — “линейные” размеры события, рассматриваемого как некий объём в четырёхмерном пространстве-времени. При этом мы полагаем, что каким-то образом, пока не важно как, наш континуум, точнее та его часть, где выделено рассматриваемое событие, уже описано как многообразие. Т.е. всем точкам этой части континуума поставлены в соответствие некоторые наборы из четырёх координат, по определению рассматриваемых как три пространственных и одна временная. Как это может быть сделано, мы будем выяснять позже. Сейчас лишь примем, что это как-то сделано.

Второе основное свойство события подразумевает не единственность его, а наличие и других событий, с которыми у данного могут иметься связи. Отношения вида **причина и следствие**. Что это такое конкретно, мы тоже пока не уточняем. Пока для нас будет важным только их бинарный тип, то что *два произвольных события могут быть связаны в пары*. Одно из событий будет определено как причина другого. А второе, соответственно, как следствие первого. Связи эти должны следовать из опыта, подтверждаться им, а не быть навязаны нашим произвольным выбором.

Вот здесь уже появляется необходимость уточнения соотношения наличия таких связей с теми свойствами, которые мы уже приписали к имеющимся в нашем распоряжении процедурам измерения. Теми, которые создали наше описание континуума системой координат. Ведь это отношения порядка, а наличие координат тоже подразумевает описание именно отношений порядка.

По определению, **все отношения причина-следствие могут быть увязаны только с изменением в координате времени**. Иными словами, **мы определяем координату времени именно как описание такого отношения**.

Если два события имеют причинно-следственную связь, то их временные координаты в любой системе координат должны отличаться. Более того, *для любой системы координат, для любого способа, позволяющего приписать координаты событиям, мы требуем, чтобы порядок причина-следствие не мог быть изменён выбором этого способа*. Единственное исключение из этого правила, которое мы, в принципе, могли бы допустить, состоит в возможности одновременного изменения порядка следования для вообще всех пар связанных событий, имеющихся в данной части мира. Но о такой возможности мы серьёзно будем разговаривать намного позже. Пока лишь просто *требуем сохранения*

порядка при изменении координатного описания событий. В чём это требование будет конкретно выражаться мы тоже рассмотрим позже, когда займёмся обсуждением реальных возможностей построения систем координат.

Наличие или отсутствие причинно-следственных связей между различными событиями является обоснованием, причиной введения, постулирования нами разных типов координат. Разные типы координат призваны описывать именно эти свойства связей между событиями. Если два события не имеют явно определяемых связей такого типа, то мы полагаем, что могут существовать системы координат, в которых приписанная этим событиям координата “время” имеет одинаковое значения, т.е. события описываются как одновременные. То, что они при этом разные, описывают разные значения набора пространственных координат.

Заметьте, что при этом мы изначально полагаем, что все события принадлежат непрерывности, континууму. Это особые точки в нём. Т.е. **мы изначально полагаем наличие связей более широкого типа, чем причинно-следственные.** Но возможностью как-то их проконтролировать напрямую мы не обладаем. Описываем мы их только принадлежностью к одному и тому же континууму. Вот эти связи и получают предварительное название “пространственно подобных”. А причинно-следственные можно будет называть “времени подобными”.

Причина того, что мы изначально приняли существование трёх координат пространственного типа и всего лишь одной временного, целиком и полностью определяется имеющимся у нас опытом. Более подробно логику формирования именно такого представления о мире мы тоже будем обсуждать позднее.

Сейчас наше внимание мы сосредоточим на возможных “объёмах” событий.

Вообще говоря, изучение поведения событий общего вида при уменьшении объёма было бы полезно проводить в тех системах координат, которые получены с помощью масштабов, имеющих одинаковые величины для разных направлений. Однако, пока мы не имеем возможности как-либо проводить сравнение разных масштабов. Мы их ведь ещё и не ввели по-настоящему; просто предположили, что они имеются. Да и исторически так сложилось, что (как мы увидим ниже) масштаб времени обычно используется гораздо больший по величине, чем для пространственных координат. Кроме того, мы примем во внимание уже имеющуюся в нашем распоряжении идею материальной точки, которая была выработана вообще без оглядки на величину масштаба времени. Вполне понятно, что было бы полезно как-то увязать это, уже хорошо поработавшее для физики понятие, с уточняемым нами сейчас представлением о точке четырёхмерного континуума. А для этой идеи более менее важным является лишь представление о равенстве всех трёх пространственных

единиц измерения. Из этого и будем исходить.

Пусть соотношение единицы времени с пространственной единицей (единицей трёхмерного расстояния) пока не фиксировано. И мы даже можем размер события по времени пока совсем не уменьшать, как нам нужно было бы для изучения поведения реального прототипа точки пространства-времени.

Проследим для начала поведение какого-либо выбранного события при уменьшении только трёхмерной составляющей его общего объёма.

Вполне очевидно, что в процессе этого уменьшения мы будем переходить от большего события к меньшему. Т.е. будем переходить от некоторой выбранной части мира к другим частям, каждый раз вложенным в предыдущую в получающейся последовательности событий. Возьмём в качестве примера начального события кусочек твёрдого тела, не важно, из какого конкретно материала сделанного. Важно лишь, что это кусочек **вещества**, поскольку нас интересуют сейчас те части мира, с которыми мы ассоциируем понятие “событие”.

На нескольких первых этапах процесса деления мы будем всё ещё получать всё такой же кусочек этого твёрдого тела. Эти этапы вполне ещё соотносятся с нашей идеей непрерывности. Но нам также известно уже, что с какого-то момента, то что получится при дальнейшем делении перестанет отвечать этому представлению. Некоторое количество новых частей начнёт быть подобным тому, что мы уже назвали вакуумом. А другие части будут всё ещё содержать события, но свойства этих частей мы уже никак не сможем совместить с теми, какие наш кусочек имел изначально. Вещество предстаёт для нас в новом виде. И этот новый вид получил в физике название **атомы**. Части, составляющие вещество. Пока это их основное свойство.

Продолжим деление. Та же история — некоторые части (большинство) явно подобны пустоте. Другие — опять новые виды — “**ядра**” атомов и “**электроны**”. Части, составляющие атомы.

И, о счастье, на свет появляется теория Н.Бора, описывающая строение атома с помощью планетарной модели. Эта идея представляет атомы подобными, например, системе Солнца с планетами.

Почему счастье? А потому, что такое описание позволяет остаться в рамках бесконечно делимой непрерывности. Да, модифицированной, но всё ещё работающей. Я, пожалуй, не смогу выразить эту идею лучше, чем это сделал В.Брюсов в своих стихах “Мир электрона”:

Быть может, эти электроны
Миры, где пять материков,
Искусства, знания, войны, троны
И память сорока веков!

Ещё, быть может, каждый атом -
 Вселенная, где сто планет;
 Там - всё, что здесь, в объеме сжатом,
 Но также то, чего здесь нет.

Их меры малы, но все та же
 Их бесконечность, как и здесь;
 Там скорбь и страсть, как здесь, и даже
 Там та же мировая спесь.

Их мудрецы, свой мир бескрайный
 Поставив центром бытия,
 Спешат проникнуть в искры тайны
 И умствуют, как ныне я;

А в миг, когда из разрушенья
 Творятся токи новых сил,
 Кричат, в мечтах самовнушенья,
 Что бог свой светоч загасил!

Вот только счастье было так кратковременно. Не удалось попытку описать новые **частицы** вещества с помощью такого хорошего представления классической уже механики, как идея материальной точки, достаточно хорошо работавшая в самых разнообразных условиях (в самых разных приближениях)— от звёзд и планет, до бильярдных шаров, маленьких дробинок и т.п. Не удалось настолько, что на свет появилась совсем новая идея механики — квантовая механика. А понятие частицы пришлось заменить двумя не совместимыми в классическом приближении образами — и частица, и волна одновременно. Налицо был кризис физики. Не надо думать, что за сто прошедших лет этот кризис был разрешён. Нет. Его просто загнали под ковёр принципом: “Заткнись и вычисляй!”. Не знаю точно, кто был истинным автором этого лозунга. Возможно и Р.Фейнман. Этот учёный сделал очень много для разрешения этого кризиса. Но он был весьма неординарной личностью, так что вполне мог такое сказать. Но вот тупо следовать такому лозунгу явно не стоило.

А для наших целей пора вспомнить, что нам следовало бы уже давно начать уменьшать и промежутки времени, характеризующие наши прототипы событий. А при этом мы придём к тому выводу, что такого рода эксперименты (выяснение свойств экстремально малых частиц вещества) соответствуют и экстремально малым промежуткам времени. Точнее, **результаты всех таких экспериментов, в конечном счёте, сводятся к установлению того или иного факта. Факта чего? Факта события.** События, состоящего в регистрации каким-либо прибором чего-то. Детектор сработал или нет. Более сложные результаты, вроде доказательства огибания электроном препятствия (и выявления

этим его определённой волновой природы) могут быть поняты как статистические, как некоторые множества (вполне ограниченные) событий. Т.е. мы приходим к некоторому новому для нас типу событий. Такому, *которое уже далее не делимо*. Это просто факт, имевший место и время. Да, ни место, ни время нам точно неизвестны. Но это и не важно. Достаточно того, что **такие события, как результаты наших экспериментов, явным образом дискретны**. Да, между ними остаются связи вида “причина и следствие”. Но сами события явным образом **отделимы** друг от друга.

Далее легко будет увидеть, что если мы не зацикливаемся на выработанном классической физикой понятии частицы как материальной точки, реализованной в четырёхмерном описании мира непрерывной, времени подобной линией, а во главу угла нашего описания поставим понятие такого дискретного, элементарного события, которое ассоциируется с некоторыми точками (не со всеми!) пространства-времени, то многие (если не все) проблемы восприятия соотношений, описываемых квантовой механикой, исчезнут. **Исчезнут противоречия описания**.

3.4 Цепочки событий как основа измерений. Время, Действие, Масса

Мы обсудили идею точки, элемента описания нашего мира, “не имеющего размера”, которому мы приписываем нулевую меру. Понятие это, возникающее из обобщения имеющихся в нашем распоряжении опытных данных, предстаёт перед нами в двух, существенно отличных видах. Первый вид, находящийся в полном согласии с теми идеями, которые мы ассоциировали с понятием о непрерывности, континууме, в то же время является некоторой идеализацией, продлением опыта к идеалу с помощью никогда не завершаемой процедуры деления частей мира. Эти точки мы полагаем свободными от какого-либо вещества, той физической субстанции, с которой развитие физики связало в своё время понятие “масса”. Но не свободными от каких-либо иных характерных свойств частей мира, т.к. все точки континуума несут в себе функцию его взаимосвязей.

Второй вид связан с опытными данными гораздо жёстче. Потому что в установлении фактов существования таких точек и их взаимосвязей опыт даёт нам вполне однозначный ответ. Они есть в мире. Эти точки, по совокупности опытных данных, мы однозначно ассоциируем с веществом. Соответственно, при создании описания мира, нам в любом случае придётся каким-то образом увязать именно эти точки с понятием массы.

Пока никаких иных видов точек мы не имеем оснований вводить. Однако такая возможность в будущем всё-таки остаётся.

Теперь в нашей повестке дня встаёт задача определения

процедур измерения, которые могли бы дать нам желаемое изображение реального мира геометрической идеей. Пространством аффинной связности четырёх измерений. Идеей, которую мы далее будем кратко называть **пространство-время**. Пространство-время это уже не сам мир, как таковой, а его математический образ. Образ целого Мира, Вселенной, или каких-то его частей, имеющих достаточно большой объём (объединяющий значительное число событий). Количество необходимых линейных мер мы установили. Точно или нет — определяет опыт. Пока наш опыт позволяет утверждать, что число четыре, как количество нужных единиц измерения, является для нас и необходимым, и достаточным.

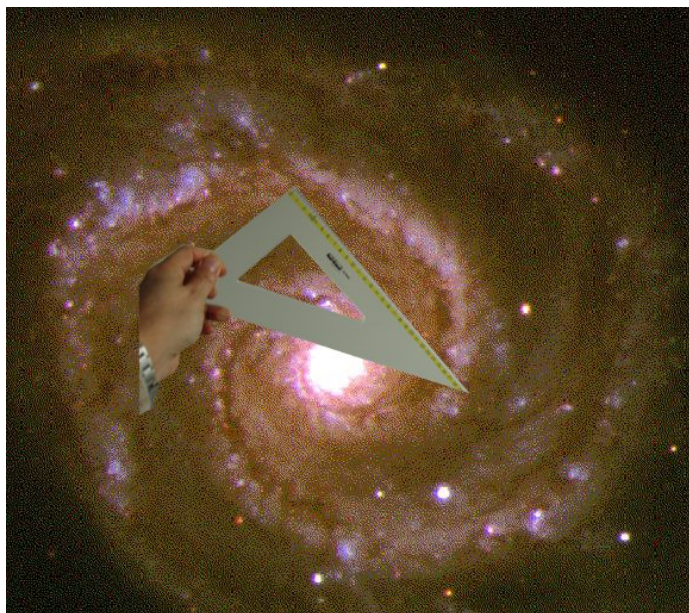


Рис. 3.1: Измерения **извне**.

Нам не хватает определения этих единиц. *В геометрической идее многомерного многообразия единицы измерения являются **внешними** для самой описываемой непрерывности.* **Можем ли мы выйти за пределы нашего Мира, для того чтобы измерить его извне? Нет. Мы обречены опираться только на внутренние соотношения частей мира.**

Нам нужно определить прототипы единиц измерения идеальной геометрии. Определить, каким образом мы реально можем сопоставить частям и явлениям мира какие-либо числа. Далее, опираясь на эти реальные процедуры измерения, мы сможем определить свойства идеальных образов всей совокупности возможных масштабов, векторов, расширив область существования единиц измерения с их реальных прототипов и тех мест мира, где они действительно имеются, на все точки пространства-времени. Конечно, при этом мы выйдем далеко за возможности опыта. И должны будем всегда принимать во внимание те черты нашего

геометрического описания, которые возникнут при такой идеализации. И понимать, что эти черты не могут являться основными, это только воображаемые подпорки создаваемой нами конструкции.

Довольно ясно, что определение единиц измерения будет явно зависеть от выбранного приближения. Я начну с **максимально возможной для нас детализации описания мира**, с опоры на выявленную нами дискретную компоненту точек пространства-времени. На те события, которые могут быть названы точками в последней инстанции, на элементарные события. И на возможные между ними связи вида “причина-следствие”.

Такой выбор может показаться неоправданным, т.к. в обычной нашей практике мы для всяческих наших измерений используем “макрообъекты”, части мира соизмеримые с нами самими. Эти части мира содержат в себе огромное число элементарных событий.

Но и у моего выбора имеется важная причина. В современном состоянии физики, квантовое описание, т.е. описание соотношений при наличии в рассмотрении малого числа элементарных событий, может быть введено только на основе уже имеющихся классических понятий. Такого рода процедуры (а их наработано несколько, и во многом разные процедуры являются не согласованными) называют “квантование”. А вот обратного перехода, последовательного, полноценного получения **всех** классических понятий из введённых таким образом квантовых понятий, до сих пор не имеется. Имеются разные схемы, но все они по тем или иным причинам являются неполноценными, не достаточно удовлетворительными.

Поэтому я хочу пройти именно обратный путь, **на котором будет понятно возникновение и квантовых, и классических понятий из самых базовых наших идей, таких как существование элементарных событий, связанных соотношениями причина-следствие**. Многие странные, на первый взгляд искусственные, конструкции и классической, и квантовой механики при таком подходе станут естественными и самоочевидными.

Для этого мне придётся сначала сделать одно предположение, вообще говоря верное в очень ограниченном смысле. Вот это предположение:

- Я допущу, что у нас имеется возможность работать с элементарными событиями на самом точном уровне. Что мы можем различить несколько последовательных элементарных событий, между которыми других таких событий нет.

Это предположение слишком сильное, т.к. на опыте, когда мы можем с полным правом говорить об элементарном событии, у нас всегда будет только одно такое событие, не больше. Конечно, кроме него в нашем распоряжении имеются и многие другие

события, связанные с этими соотношениями причина-следствие. Вот только это всегда сложные, не элементарные события. Поэтому, забегаая вперёд, скажу, что системы координат, реально нам доступные, ограничиваются теми, которые можно построить только в классическом приближении. Только базирываясь на сложных событиях. Этот факт будет играть одну из важнейших ролей при дальнейшей формулировке квантового описания мира. Однако, чтобы легче было понять что из чего возникает, я начну с предполагаемой идеализированной ситуации, подразумеваемой сформулированным выше предположением.

Итак, пусть на данный момент в нашем распоряжении имеются только элементарные события и их установленные связи.

Событие без каких-либо связей с другими однозначно выпадает из описания мира. Его нет. Измыслить можно, но на опыте наблюдать нельзя.

Другой случай, когда имеется некоторое количество взаимосвязанных событий, но как целое не имеющих причинно-следственных связей с другими, имеющимися в мире. Практически та же самая ситуация, как и с одним единственным событием. Для остального мира их нет. Нет нужды учитывать их в описании остального мира. Да, сами по себе они могут позволить своё собственное описание. Но изолированное от остального мира.

Вывод. **Все без исключения события (элементарные) нашего Мира, нашей Вселенной, связаны между собой причинно-следственными связями.** Эти связи уже не являются именно бинарными связями “причина-следствие”, они могут быть очень сложными, запутанными, но они **всегда имеются** для любых двух событий. В общем случае через посредство очень многих иных событий и их связей.

Рассмотрим теперь, какие же связи между событиями могут возникнуть на основе доступных нам бинарных связей причина-следствие.

Первый, простейший тип — это **линейная цепочка событий**. Некоторые события в этой цепочке, возможно, имеют и дополнительные связи, ведущие вовне выделенной цепочки. Но именно цепочка является простейшим элементом в любом, сколь угодно сложном клубке взаимосвязей. Т.е. *для каждого элементарного события мира мы можем (по крайней мере, теоретически) всегда определить минимум две разных связи.* Одну с его причиной, а другую с его следствием. Число событий, входящих в линейную цепочку, может быть разным, но всегда больше двух. Цепочки из двух событий нам следует рассматривать отдельно, как особенный случай, как специальный вид связи (взаимодействия) двух других цепочек (имеющих каждая больше чем два события). Почему это так, я попытаюсь объяснить позже.

Каким образом мы можем сопоставить цепочкам событий числа? Эти возможности очевидны. События в цепочке упорядочены. Мы их можем пронумеровать, назвав какое-то первым, его

следствие вторым и т.д. Это ещё не измерение. Но когда мы сопоставим эти номера количеству событий, отделяющих данное от некоторого события, принятого за начало отсчёта, мы получаем уже настоящую процедуру измерений. Число, результат измерения, является вполне себе размерным числом. Числом событий. Эта процедура пока воспроизводит только целые числа.

Рациональные числа появляются сразу же, как только мы допустим возможность счёта событий не единицами (естественный масштаб!), а любыми их количествами — парами, тройками, десятками и т.д. и т.п. Отрицательные — очевидно, если начало отсчёта поместить где-то в середине имеющейся цепочки, то и они появятся самым естественным образом.

Как определить на основе дискретной последовательности событий действительные числа, т.е. получить процедуру измерения уже для непрерывностей простейшего вида? Да очень просто.

Порядок в нашей цепочке событий навязан ещё одним их свойством (дополнительным к свойству “существование”), обеспеченным нам опытом. Связи. Причинно-следственные связи. **Их наличие** не только **позволяет** нам соединить эти цепочки событий какой-то непрерывной линией. Мы просто **обязаны** это сделать, чтобы гарантированно учесть это свойство элементарных событий. **Только принадлежность всех событий цепочки одной и той же непрерывной линии позволяет описать установленный в ней этими связями порядок.** Порядок, не нарушаемый никакими способами, не разрушающими эту непрерывность линии.

На непрерывной линии общего вида единицу длины можно ввести бесконечным числом способов, взяв в качестве масштаба длину произвольного отрезка. Наша линия, однако, является весьма особенной. Она не просто содержит особые точки, она обязана проходить через цепочку особенных точек, элементарных событий. Поэтому, среди всевозможных процедур измерения на этой линии имеются выделенные, такие, единицы измерения которых содержат одинаковое число событий. Таких тоже бесконечно много. Но и среди них **можно указать самую важную для нас процедуру измерения.** Таковую, *величина масштаба которой равна минимальной длине линии между двумя событиями.* Может показаться, что нужно говорить об отрезке линии между двумя соседними событиями. Но это не так. Сама линия у нас минимально содержит три события. Линии, содержащие только два события, требуют, как я уже упоминал выше, особого рассмотрения. О них речь пойдёт чуть позже.

Кроме того, для правильного определения процедуры измерения, помимо определения самого масштаба, требуется ещё возможность хоть как-то установить неизменность масштаба для разных точек. Только начиная с трёх особых точек на линии это можно сделать без проблем. Поэтому **минимальной единицей**

длины на линии, проходящей через цепочку событий, мы будем **по определению** полагать расстояние между двумя точками, одна из которых является причиной (начало отрезка), вторая следствием (конец отрезка) для события, находящегося между ними (середина отрезка). При этом, **по определению**, выделенное событие делит этот масштаб **строго пополам**.

Обозначим введённую нами минимальную длину через h . Величина эта будет инвариантной относительно произвольного выбора координаты на нашей линии. Она жёстко привязана к трём элементарным событиям и от выбора единицы измерения, производящей описание линии с помощью действительного числа, координаты, не зависит. Точно также, как не зависит число событий на некотором отрезке линии, если его начальная и конечная точка фиксированы. Скаляром при этом является не только число событий, но и длина выделенного отрезка в единицах h . Обозначим эту длину через s_0 . Заметьте, что “длина” s_0 обладает немного странными для непрерывности свойствами.

- Она может меняться только кусочками, кратными h . В том смысле, что для любой цепочки событий, рассматриваемой как единая непрерывная линия, любой её **выделенный отрезок между двумя какими-то событиями** содержит целое число h .

Для случая любых единиц, кратных минимальной длине h , я буду использовать обозначение s . Очевидно, что имеются также и системы координат, единицы которых совпадают с h , или кратны этой величине. Но **нам необходимо явно различать, относится ли наша процедура измерений к общей группе возможных, или речь идёт именно о числе событий (пусть и с коэффициентом, превращающим число в отрезок, имеющий длину)**. Как это сделать?

При обсуждении идей математики, я упоминал идею скалярного параметра. Это именно наш случай. Поэтому, мы с полным правом можем далее называть параметры s скалярными. И эти скалярные параметры мы не просто придумали. **Их существование и их особый смысл нам продиктовала природа, наш опыт.**²

²Заметьте, хотя мы ввели представление о минимальном отрезке нашего скалярного параметра основываясь на нашем идеальном предположении о возможности различать отдельные элементарные события в цепочках, для признания этого факта как опытного, в том числе для признания существования самого такого скалярного параметра, связанного с каждой цепочкой событий, наше предположение, наша идеальная подпорка для рассуждений, не является критическим. Ведь эти выводы не зависят от того, можем ли мы на самом деле различать события в цепочке опытным путём, или нет. Реальный мир их различает. А вот в этом мы можем быть уверены, т.к. вполне способны опытным путём выделять единственные события в таких цепочках.

А как же мы назовём ту координату, которую мы ввели (самого общего вида) на нашей линии, проходящей через цепочку событий? Так это довольно очевидно. Как мы определяем в бытовом смысле время? Как последовательность взаимосвязанных событий. Наша линия и есть последовательность таких событий. Значит, наша координата должна носить название времени, имеет размерность времени.

А как мы измеряем время? А вот тут я хочу обратить ваше внимание на некоторую, важнейшую для дальнейшего, специфику процедуры измерения времени. Мы стараемся определять масштаб времени не просто как промежуток между произвольно выбранными событиями. Нет, мы стараемся выбрать такие события, которые нам представляются идентичными и повторяющимися. При определении масштаба времени мы опираемся на периодичность. Периодичность одинаковых событий.

Являются ли элементарные события пригодными для определения масштаба времени именно в этом смысле? Да. И с гораздо большими основания, чем какие-либо другие, более сложные. Их свойства идентичны по определению. Точнее, из всех событий отобраны только те, которые обладают только тем минимумом свойств, о котором я уже многократно говорил — свойства существовать и иметь две причинно-следственных связи.

Поэтому, мы с нашей минимальной длиной h можем связать и кое-что иное, гарантирующее нам “периодичность” получающегося описания нашей линии. Вспомним, что среди математических идей у нас имеется и идея *стандартных* периодических функций, \sin и \cos . Имеется также и идея их *стандартизованного* аргумента, сведённого к бесконечно повторяющемуся отрезку, кратному *стандартному значению для периода*, числу 2π . Запомним этот момент.

А пока рассмотрим соотношение между скалярным параметром s_0 и временем t , тем или иным способом ассоциированным с линией, проходящей через цепочку событий. Т.к. s_0 является скаляром для преобразований времени, а значит числом безразмерным с точки зрения описания координатами, то существует соотношение, верное для любой системы координат (для любого выбора описания времени) на линии:

$$s_0 = m_0 \cdot t. \quad (3.2)$$

Вполне очевидно, что величина m_0 скаляром не является. При преобразованиях времени она должна преобразовываться как величина, удельная по отношению к времени, $m_0 = ds_0/dt$, с размерностью $[m_0] = [t]^{-1}$. Имея ввиду в дальнейшем переход к полноценному четырёхмерному описанию, мы заранее запишем, что это на самом деле временная компонента градиента скалярного параметра, $\partial_i s_0$. В данном случае записанная в специальной

системе координат. Что это за система координат? Для выяснения этого нам следует определить (назвать) что же это такое, рассматриваемая нами цепочка событий. События нами с самого начала ассоциировались с веществом. Чем меньше события, тем меньшие частицы вещества мы рассматривали. Так что у нас нет выбора. Линия эта есть не что иное как **линия существования частицы**. Какой частицы? А какие события собраны в цепочку? Элементарные. Вот и частица наша будет называться **элементарной**. В нашем описании это утверждение следует рассматривать как определение понятия (идеи) элементарной частицы. Безотносительно к тому смыслу, который в это понятие обычно вкладывает физика.

Опыт говорит, что есть разные элементарные частицы? Да, есть, но для установления этой разницы в нашем образе мира как пространства-времени потребуются выйти за рамки описания только линии. Потребуется учесть её вложенность в остальной мир, учесть связи её с другими такими (аналогичными) линиями. А пока мы имеем только внутреннее описание всего лишь линии, внутреннюю точку зрения. И с этой точки зрения, для самой выделенной, описываемой частицы (любой!), линия её будет линией времени с остальными координатами постоянными (их у нас просто ещё нет, так что доопределим их нулями). И система отсчёта для нашей частицы, построенная нашими рассуждениями, должна называться системой её покоя. Других частиц нет пока, а **относительно самой себя частица не двигается, покоится, по определению**.

Для произвольных координат вдоль линии существования элементарной частицы мы имеем хорошо понятное нам название. Это время. А какой смысл имеют наши скалярные параметры s ? Как какой, они пропорциональны числу событий на некотором участке линии существования частицы. А ещё они являются инвариантом при любом изменении способа описания этой линии. Вот только современная физика пока ещё не говорит о событиях в таком контексте ничего.

А что есть в физике? В физике имеется одна весьма важная для построения её теорий величина. Важнейшая, как в классическом, так и в квантовом приближениях. Эта величина связана с линией существования любой частицы, и тоже обязана быть инвариантом её описания. Правда, при обычном изложении физики она *не является изначально базовой*. И только потом вдруг выясняется, что большинство главных соотношений между величинами, используемыми физикой, можно получить на основе требования постоянства этой величины при “виртуальных” вариациях тех величин, от которых она зависит. Для отдельной материальной точки (частицы) её вводят как вторичную величину, умножая вектор энергии-импульса (в четырёхмерном описании) на касательный к траектории частицы вектор, и интегрируя вдоль траектории между фиксированными точками. В системе

покоя частицы, эта величина выглядит намного проще — это произведение массы покоя на интервал времени между двумя фиксированными моментами. Называют эту величину “действие”. Не странно ли, что именно эта величина, казалось бы введённая совсем искусственно, для современной физики, и классической и квантовой, является основной для формирования теоретического описания мира? А сама квантовая механика возникла из осознания того экспериментального факта, что действие может меняться только одинаковыми кусочками, квантами? Почему? Нет ответа.

А теперь взгляните на соотношение (3.2). Не узнаете? Эта формула в точности соответствует определению действия в системе покоя частицы. Если m_0 ассоциировать с физическим понятием массы покоя элементарной частицы. Вот только здесь эта формула отнюдь не искусственная. И действие в ней не нечто странное, должное не понятно почему не зависеть от способа описания частицы. Это хорошо понятная нам суть частицы, число элементарных событий в её цепочке связей причина-следствие, взятое с коэффициентом, необходимым для превращения цепочки дискретных событий в непрерывную линию существования частицы, участвовавшей в этих событиях. Изменение величины s_0 только кусочками, квантами тоже очевидно. И независимость её от способа описания нам тоже очевидна. Зачем нам такое описание, в котором его самая основа нарушается?

Да и понятие массы (здесь массы покоя) у нас не апеллирует больше ни к каким иным определениям. Масса в классической физике вводится как коэффициент пропорциональности между изменением энергии-импульса и некой величиной, “силой”, его изменяющей. А сила, в свою очередь, определяется опять же через изменение импульса при относительном движении частицы (относительно некоторой фиксированной системы отсчёта). Яйцо и курица. Что было раньше, как одно отделить от другого? Базовые понятия ведь нужно иметь независимыми друг от друга. А в квантовую физику понятие о массе просто переносится из классического приближения, как уже известное. Сама квантовая физика до сих пор определения массы в собственных понятиях не имеет.

У нас физический смысл величины m_0 совершенно ясен. Это число событий, взятое с некоторым специальным коэффициентом, осуществляющим связь между дискретными событиями и непрерывной длиной, приходящихся на выбранную единицу времени в системе покоя элементарной частицы. А при полном четырёхмерном описании нужно говорить не о массе, а о **ковариантном векторе, градиенте действия**. О **векторе энергии-импульса**. Хочу сразу уточнить, название “масса покоя” для m_0 не совсем хорошо, это скорее устоявшийся в физике жаргон. Следовало бы говорить “энергия покоя”. Забегу немного вперёд для пояснения причин такого жаргона, такого смешения поня-

тий. Происходит это потому, что в физике традиционно использовались две величины, масса и энергия. Они измерялись в разных единицах. Использовались в разных соотношениях. Всё это продолжалось до создания СТО. После её создания, как я уже писал ранее, выяснилось, что это два названия для проявлений одной и той же величины, вектора энергии-импульса. Кажались они разными до тех пор, пока преобразования точек зрения на мир касались изменений в описании пространства и времени по отдельности. Пока время и пространство казались совершенно независимыми сущностями. Независимыми и от физических явлений, и друг от друга.

Далее я буду говорить о массе покоя, подразумевая её настоящий смысл. Смысл быть единственной не нулевой (временной) компонентой четырёхмерного вектора энергии-импульса в системе покоя частицы. Т.е. энергии покоя частицы.

Хочу также обратить ваше внимание вот на что. Хотя мы далее будем рассматривать градиент действия как полноценный ковариантный вектор (математически идеальный) на идеальном же образе мира как четырёхмерного пространства-времени, с физической точки зрения, в его проявлениях на опыте, этот вектор не может не следовать тем свойствам, которые имеет порождающий его скаляр. В любых опытах его изменение будет кратным минимальным кусочкам действия \hbar , отнесённым к текущей единице времени. Особенно заметно это будет в тех приближениях, когда речь пойдёт об описании частиц, на траектории которых событий мало, или рассмотрение будет сосредоточено вообще на единственном событии.

И ещё. Из всего выше сказанного следует, что введённая нами постоянная \hbar , имеющая смысл коэффициента, связывающего две стороны описания цепочек событий, их дискретного числа и непрерывной “длины”, отражающей наличие причинно-следственных связей между ними, известна нам как **постоянная Планка**. И открытие Планком “квантованности действия” может быть теперь осознано как тривиальный факт, вытекающий из отделимости элементарных событий на траекториях любых элементарных частиц.

3.5 Волна? Частица?

Так что же описывает введённое нами понятие “элементарная частица”? Всем, наверное, известно о парадоксе “волна-частица” квантовой механики. Более точно этот парадокс можно сформулировать так:

При изучении взаимодействия разных видов вещества, на определённом уровне его дробления на части, для таких частей, рассматриваемых как материальные точки, исчезает возможность приписать им **вполне определённую траекторию**.

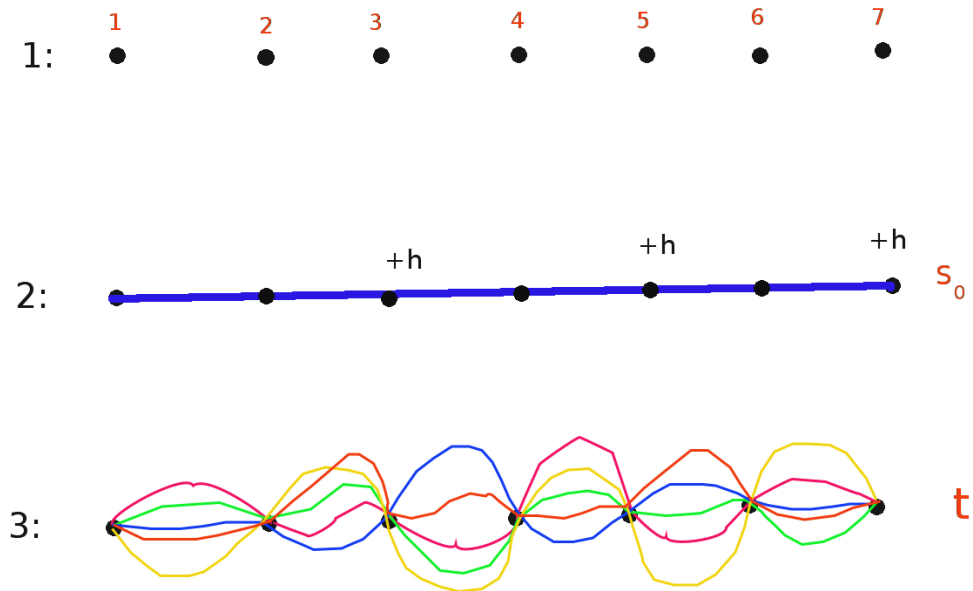


Рис. 3.2: Сверху вниз: 1. Цепочка последовательных пронумерованных элементарных событий. 2. Непрерывная линия действия, соединяющая эти события. 3. Примеры непрерывных линий, которые могут проходить через выбранные события.

В четырёхмерном описании, *пространство существования* такой “частицы” не может быть определено в терминах четырёх координат как линия. Оно “расплывается”. А результаты экспериментов, статистические, собранные для многих аналогичных, можно интерпретировать, как если бы с такими частицами были связаны некие “волны”. В то же время, каждое конкретное событие регистрации каким-либо детектором этой частицы вполне может быть интерпретировано именно как точечное, имеющее конкретные пространственные и временную координаты. Вот отсюда и возникло представление о “волне-частице”, проявляющей себя по-разному в разных условиях.

А теперь взгляните на вот этот рисунок (Рис. 3.2), схематически иллюстрирующий уже описанные выше наши действия по формулировке описания элементарной частицы.

Единственным условием определения непрерывной траектории элементарной частицы служит необходимость её прохождения через события последовательно. В правильном, обусловленном соотношениями причина-следствие, порядке.

Как легко видеть из нижней части рисунка, таких непрерывных линий может быть бесконечное множество. Добавление какого-то нового события в эту цепочку (например, в результате

проведённого эксперимента) выбирает из этого бесконечно разнообразного набора линий меньший по “объёму” континуум. Но не доводит “объём” возможных траекторий до нуля, не делает траекторию жёстко определённой, единственной.

Речь конечно идёт *о доступной нам возможности описания траектории элементарной частицы*. **Возможности сформулировать непрерывное описание на базе дискретного набора фактов**. Каково на самом деле непрерывное подпространство существования частицы, занимаемое ею в четырёхмерном изображении мира, установить точно по имеющейся в нашем распоряжении информации нельзя. Значит ли это, что такой траектории нет вовсе? Нет, не значит. Она определённо есть в виде наличия между элементарными событиями причинно-следственных связей. И не более того. Но и не менее. Мы имеем полное право каким-то образом отметить отличие точек на траектории от остальных точек пространства-времени. Вот только для правильного описания области мира, содержащей эту элементарную частицу, нам **необходимо принимать во внимание весь набор возможностей такого описания**.

Так что *утверждение “элементарная частица не имеет траектории” является слишком сильным и не соответствующим действительности*. Речь нужно вести не о самой траектории, а только о доступных нам возможностях её описывать. Правильно будет говорить, что **траекторию элементарной частицы с малым количеством известных событий необходимо описывать всеми возможными непрерывными кривыми, проходящими через эти события в правильном порядке**. Это сложно, но возможно.

Теперь зададимся вопросом, как возникает представление о волне, связанной с элементарной частицей. Из того же рисунка можно заключить, что *именно необходимое прохождение частицы через заданные события позволяет связать с её описанием некоторую периодическую функцию времени, а значит и некоторую частоту*. Это в классической физике ассоциируется отнюдь не с понятием частицы, а именно с понятием волны. Изменение чего описывает эта периодическая функция я сейчас обсуждать не хочу. Ведь здесь речь идёт только об основах физического описания мира. Более-менее развитому такому (квантовому) описанию будет посвящён отдельный том этой книги. Кроме того, то что между событиями траектория частицы не может быть определена однозначно, а определяется как принадлежащая к некоторому континууму, также является характерным свойством волны. Волны, как способа реализации взаимных связей точек непрерывности, континуума.

Думаю, что всё сказанное выше о событиях, их цепочках, элементарных частицах и их траекториях полезно проиллюстрировать опытными данными, не всегда известными широкой публике. Ведь лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать (или

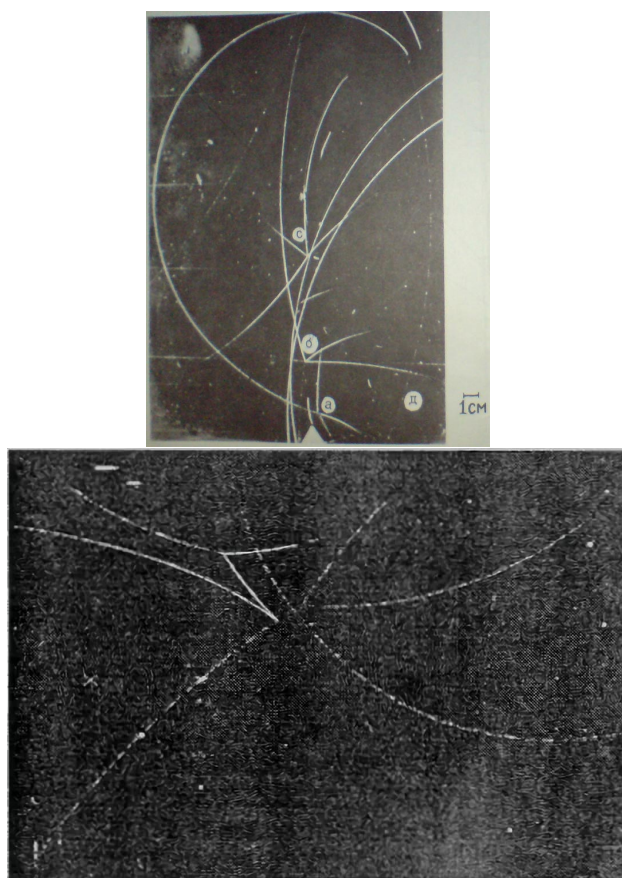


Рис. 3.3: Слева фотография следов, оставленных частицами в камере Вильсона. Справа — в пузырьковой камере.

прочитать). Поэтому представляю пару фотографий, иллюстрирующих опыты, из которых следуют все выше приведённые соображения.

3.6 Пространство, Псевдоевклидовость

Вернёмся снова к нашей основной задаче. Мы хотим описать мир (как целое, или хотя бы отдельными непрерывными пересекающимися частями) с помощью нашей математической идеи “пространство аффинной связности”.

Первое, что для этого требуется, это определить координаты для всех точек непрерывности. Мы это делаем с помощью локализованных процедур измерений. Для **каждой** точки пространства-времени нам нужно иметь **полный набор (репер) масштабов**.

Всё, что нам *удалось* сделать к настоящему моменту — это *определить из внутренних для мира соотношений прототип масштаба времени*. Всего одного масштаба. Да и то отнюдь не для всех точек пространства-времени, а только для некоторых

линий в нём. И поэтому особенных линий для нашей идеи континуума.

Мы ввели прототип масштаба времени через соотношения для трёх последовательных особых точек на линии существования частицы. В то же самое время мы говорим о самых разных других масштабах времени на этой же линии. Эти масштабы в нашем рассмотрении не более чем идеализация возможностей. По причине того, что опираться на точки между событиями мы в реальности не можем. Нашему опыту эти точки не доступны.

Тем не менее, эти, другие масштабы времени, целиком соответствующие математической идее описания непрерывности, могут быть легко ассоциированы с контравариантными векторами, приписанными каждой точке линии принудительно. А вот наш базовый масштаб кажется определённым слишком жёстко, для того, чтобы легко вписаться в эту идеальную схему описания.

Поэтому нам не остаётся ничего иного, как сделать из нашего прототипа такой же локализованный вектор. Другого пути прийти к идеальному математическому образу мира в нашем распоряжении нет.

Как мы можем сделать это? Достаточно просто. Масштаб, как вектор, характеризуется двумя свойствами. Величиной и направлением. Величина по определению для всех точек обязана быть единицей. Здесь нет препятствий. Существование **единицы, которую мы вводим** для трёх точек (минимально возможная физическая реализация масштаба), или для любого иного допустимого набора событий, **продлевается нами на все точки траектории по определению без изменений**. Направление нашего масштаба, как локализованного вектора, в системе покоя частицы тоже фиксировано. Ведь четырёхмерная траектория покоящейся частицы по определению является координатной линией времени. Не важно какая конкретно непрерывная траектория из всего возможного набора. Так мы превращаем наш масштаб, определённый через точки конечного отрезка, в локализованный вектор. Этот вектор нами определяется как идеализированный образ масштаба.

Легче всего уяснить такую идеализацию можно на примере перехода к классическому описанию траектории частицы. Достигается это при увеличении как числа событий, принимаемых во внимание для описания траектории, так и переходом ко всё более сложным событиям, частично перекрывающимся. И таким образом создающим иллюзию настоящей непрерывности состоящей из них траектории. Элементарные события при этом выглядят как заполняющие эту траекторию точки, в пределе сливаясь в непрерывность. А определённые с их помощью масштабы становятся именно локализованными векторами, сохраняющими всё ту же единичную величину, определёнными уже практически в каждой точке и являющимися касательными к траектории частицы векторами.

Иллюстрацией того, как это происходит на опыте может служить рисунок 3.3. Ведь следы частиц на фотографиях при более внимательном рассмотрении составлены из отдельных пузырьков (сложные события), которые, в свою очередь, появились как реакция специально приготовленного вещества в объёме камер на произошедшие в нём элементарные события. А в итоге они сливаются в практически непрерывную линию.

Хочу обратить ваше внимание на один важнейший момент, следующий из нашего способа определения масштабов времени. **Все векторы, которые являются локализованной идеализацией произвольно выбранного масштаба времени на траектории данной частицы, всюду на ней пропорциональны касательному к этой траектории вектору.**

Но где же нам взять прототипы для остальных векторов базиса в каждой точке пространства-времени? Или, для начала, хотя бы на траектории нашей элементарной частицы?

Довольно ясно, что элементарные события и их связи, существующие только внутри самой частицы, не могут нам в этом помочь. Нужно как-то учесть наличие связей с другими частицами. Но и здесь обнаруживается проблема. Все причинно-следственные связи данной частицы с хотя бы одной другой (другой цепочкой взаимосвязанных событий) ведь тоже могли бы дать нам только собственный (определённый на связующей цепочке) масштаб времени. Времени, а не какого-то из измерений остального трёхмерного пространства. И, тем не менее, для определения других масштабов мы воспользуемся именно наличием таких связей.

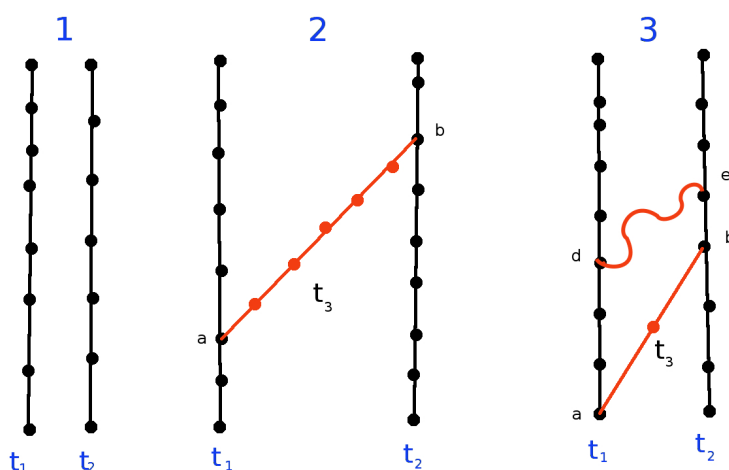


Рис. 3.4: Слева направо: 1. Две не связанных цепочки последовательных элементарных событий. 2. Связь “длинной” цепочкой событий. 3. Имеется две разных связующих цепочки. Одна из трёх событий. Вторая из двух.

Рассмотрим ещё один схематический рисунок, иллюстрирующий наши возможности.

Случай (1) не может нам дать ничего для определения пространственных масштабов. Они могут быть выбраны практически произвольно (с теми ограничениями, которые следуют лишь из самого факта, что описывается континуум). Единственное дополнительное требование, которое мы можем сформулировать — скалярные параметры действия на обеих траекториях, и t_1 и t_2 , должны оставаться инвариантами описания, т.е. быть скалярными функциями точки на этих траекториях при любых допустимых преобразованиях координат. И это всё.

Случай (2) для нас уже более интересен. Между двумя разными цепочками событий (t_1 и t_2) имеется причинно-следственная связь “длинной” цепочкой событий t_3 . Свои масштабы времени можно ввести на всех трёх подпространствах. Принадлежность двух точек из связующей линии траекториям двух других элементарных частиц заставляет в этих точках согласовать каким-то образом локальные масштабы попарно. Естественно, через преобразование векторов. Идеи таких преобразований мы уже сформулировали — это “масштабирование” (изменение “величины” масштаба) и поворот вектора масштаба. Но! Это всегда преобразования масштаба времени в масштаб времени. Для определения масштабов, позволяющих приписать пространственные координаты даже самим траекториям частиц у нас имеется только косвенная информация. Только косвенная информация о том, что вот здесь (в точках, событиях a и b) траектории частиц совпадали (нет дополнительных измерений), а вот в остальные моменты времени (независимо от того, на базе какой из частиц введено время) эти траектории уже различаются. Чем различаются? Вот именно это различие и создаёт идею пространства, идею измерения (хотя бы одного), дополнительного к идее измерения под названием “время”, реализующего цепочку событий, связанных соотношениями причина-следствие. Идею пространства мы имеем. А вот как ввести единицы для его описания? На чём их базировать, что взять за прототип из нашего опыта? Ведь, в конечном счёте, опыт нам даёт лишь факты событий и их связи.

Что делать? Остаётся только вообразить их существование. Ведь и при введении масштабов времени мы не обошлись без работы нашего воображения. Правда, при этом его работа свелась к идеализации имеющегося прототипа, к воображению законченности предела вполне реализуемых последовательностей действий. А тут необходимо вообразить, что мы как-то смогли приписать дополнительные координаты всем точкам мира. И тем, которые являются событиями, и тем которые не являются.

Вообще говоря, кажется, что в таком случае у нашего воображения вроде бы отсутствуют любые ограничения. Но это не так. Ограничения всё-таки есть. И мы о них говорили. Вот они:

1. Масштабы времени являются **реализуемыми**, хотя бы в виде прототипов. **Этим они принципиально отличаются от воображаемых масштабов для измерения пространства.** Поэтому любые изменения в описании мира системами координат должны отслеживать эту разницу. Масштабы времени должны оставаться масштабами времени, а пространственные масштабы должны оставаться пространственными. Никаким допустимым преобразованием координат мы не имеем права их превращать одни в другие. Очевидно, речь не только о масштабах, как векторах. **Соответствующие координаты, времени и пространства, обязаны быть принципиально разными.** Вопрос — как сделать числа принципиально разными?
2. Опираясь при этом мы можем только на разницу между событиями. **Одна пара событий связана соотношением причина-следствие. Другая не связана.** Но всегда это два события. Т.е. **нужно как-то ввести понятие интервала между двумя разными, разделёнными (временем или пространством) событиями.** Причём это понятие обязано отслеживать именно разницу между временем и пространством. Между наличием связи причина-следствие и её отсутствием.
3. Число самих событий в данной части непрерывного мира (в выделенной области пространства-времени как образе этой части мира) для всех наших описаний должно оставаться неизменным. Быть инвариантом изменений в способе описания мира. Инвариантом относительно выбора системы координат в пространстве-времени. Более того, это должно быть так и для всех цепочек связанных событий. Т.е. для траекторий частиц. Число событий на каждой отдельной траектории между двумя выделенными тоже должно быть неизменным при изменении системы координат.

Посмотрим теперь на случай (3) из представленных на нашем рисунке 3.4 возможностей. Он в определённом смысле экстремальный, предельный. Здесь причинно-следственные связи между двумя цепочками событий затрагивают минимально возможное их число. Для цепочки t_3 , для которой мы всё ещё можем определить прототип масштаба времени, это всего три события. Причём её собственных событий, таких, какие мы не можем связать с какой-либо другой цепочкой (частицей), всего одно. Меньше быть не может.

И есть ещё одна связь, в которой промежуточных событий вообще нет. В ней только два события. И каждое из них может быть связано с другой цепочкой. Но каждое с разной цепочкой (частицей).

Вполне понятно, что подобные ситуации тоже должны от-

слеживаться нашим описанием как неизменные, не нарушаемые изменением точки зрения, изменением системы координат.

Как мы можем определить интервал между событиями (произвольными), чтобы учесть все сформулированные выше ограничения?

У нас уже есть инвариантная (скалярная) величина, которая может служить основой такого интервала для цепочек связанных событий с числом большим двух. Это действие. Но для всех остальных случаев мы пока ещё ничего подобного не определили. Вполне разумно ввести новое понятие так, чтобы оно включало уже имеющееся. Для цепочки из двух событий вроде бы тоже можно говорить о действии, с ней связанном. Причём, очевидно, в минимальном и только в минимальном его варианте. Некоторым его “кванте”. Всегда одинаковым, не изменяющемся при выборе системы координат. Этот “квант действия” мы можем принудительно полагать равным тому, который мы уже определили ранее для частиц с числом связанных событий большим двух — h . Казалось бы, следует положить интервал в цепочке из двух событий величине $h/2$, а не h . Но это не так. У нас нет никакой возможности сравнить эти два разных вида интервала. Поэтому, их отождествление (с h , или с $h/2$) является нашим свободным выбором. И у моего выбора есть причина. Причина в том, что удобно рассматривать оба вида цепочек, и из двух событий, и, минимум, из трёх как цельные, **неделимые далее объекты, специфические части мира**. Похожие и отличающиеся. “Похожесть” будет именно в приписывании им обоим одного и того же значения действия.

Мы ведь хотим связать со всеми видами линий в пространстве-времени, не важно какие две точки они соединяют (общая непрерывность, принадлежность всех точек к единому континууму!), некоторую величину, которая на траекториях реальных частиц могла бы рассматриваться как действие. На всех линиях, которые могут соединить всего два события, связанных соотношением причина-следствия, это тоже будет действие, но немного отличное. А если линию нельзя рассматривать как причинно-следственную связь, то эта величина уже действием не должна быть. Таким образом, нам нужна величина, формируемая одинаково для всех траекторий, такая, значения которой могли бы описать все эти возможности.

Отличие для двух видов нашего действия легко увидеть. Оно, очевидным образом, будет заключаться в структуре зависимости этого действия от вводимых нами координат. Мы ведь предполагаем, что как-то мы это всё же сделаем! Зависимость действия от координат описывается ковариантным вектором, градиентом действия $\partial_i s_0$. Вектором энергии-импульса. Этот вектор определён для обеих видов цепочек, состоящих из двух или из большего числа событий.

Для трёх и более событий мы можем определить систему по-

коя, сводя этот вектор к единственной компоненте, массе (энергии) покоя частицы m_0 . Для массивных частиц, цепочек, объединяющих больше двух событий, эта величина всегда не нулевая и, более того, положительная. Определяющая, сколько событий приходится в выбранную единицу времени. Для минимальной такой цепочки, из трёх событий, с единицей времени на них же и определённой, число это тоже минимально — это единица, одно событие между началом и концом, **между событиями, лежащими на других цепочках**. Своё, индивидуальное событие ведь только одно единственное.

А для цепочки из двух **связанных** событий, каждое из которых принадлежит также какой-то иной цепочке связанных событий, следуя этой логике мы просто обязаны сопоставить значение такой гипотетической (в смысле соответствующей системы покоя) ситуации значение “массы покоя”, равное нулю. Ведь своего, индивидуального события такая цепочка не имеет ни одного. *Нуль событий между концами цепочки*. Пустое множество таких событий.

Правильно это утверждение формулируется как **невозможность определить систему покоя** (линию собственного времени) для всего двух связанных событий. Да, **одно из них мы определяем как причину второго и этим устанавливаем направление течения времени вдоль любых непрерывных линий их связывающих**. Но само время мы жёстко связываем с другими цепочками. С такими, которые позволяют нам определить его эталон.³

Необходимость увязать две плохо совместимые вещи, ненулевой отрезок действия для цепочки из двух событий и не нулевой промежуток времени между ними, и нулевой коэффициент между этим действием и временной координатой (соотношение (3.2)) не позволяет нам определить интервал между произвольными двумя точками пространства-времени как континуума в виде простого линейного по приращениям координат точек соотношения.

Что мы имеем на этот случай среди уже сформулированных идей геометрии? А имеем мы идею метрики, квадратичной формы на разницах в координатах точек. Идею уже нами локализованную и вполне годную для наших целей. Более того, идею адаптированную и для векторов, как образов масштабов. Квадратичная зависимость от координат это тот первый шаг, который мы можем сделать от простейшей линейной зависимости. Вот мы его и делаем.

Метрическое “расстояние” в евклидовом пространстве обращается в нуль только при совпадении двух точек. Так что без изменений его определение мы использовать не сможем. Но свой-

³Здесь уже можно увидеть то, что цепочки из двух событий в нашем описании оказываются явным образом ассоциированными с понятием волны в гораздо большей степени, чем цепочки из большего числа событий.

ства метрического тензора вполне можно расширить. Как нам следует это сделать?

Нам нужно одинаковым способом удовлетворить нашу нужду иметь (описывать) как разницу между векторами масштабов, служащими для измерения времени и пространства по-отдельности, так и разницу между видами интервалов (“расстояний”) между точками. Желательно также описывать и естественную разницу между самими координатами, временными и пространственными.

Итак, полагаем в малой окрестности каждого события на траектории массивной частицы (т.е. имеющей не нулевую массу покоя) существующим невырожденный (с не нулевым определителем) метрический тензор в обеих своих формах, ковариантной g_{ij} и контравариантной g^{ij} . Просто существующим, его свойства мы будем определять из наших нужд.

Наличие метрического тензора позволяет говорить о нормах векторов обоих типов. Запишем соотношение, определяющее норму вектора энергии-импульса нашей частицы:

$$p^2 = g^{ij} \partial_i s_0 \partial_j s_0.$$

Положим в системе покоя нашей частицы

$$g^{ij} \partial_i s_0 \partial_j s_0 = m_0^2$$

(с погашенной размерностью при правильном подходе к метрическому тензору, или с естественной размерностью, если мы будем полагать его компоненты безразмерными числами). В этой системе координат

$$\partial_\alpha s_0 = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad \partial_4 s_0 = m_0.$$

Здесь мы использовали первые три значения индекса для обозначения пространственных координат, и четвёрку как индекс координаты “время”.

Заметим, что для получения такого результата не играет никакой роли точное определение пространственной части диагонали метрического тензора. Там могли бы стоять любые числа. И сам метрический тензор может иметь произвольное строение, лишь бы

$$g^{44} = 1.$$

Массу покоя для вектора энергии-импульса частицы, ассоциированной с цепочкой всего из двух событий, мы полагаем равной нулю. Вот это и есть наше требование на дальнейшее определение метрического тензора. Нам нужно сделать его таким, чтобы гарантировалось обращение в нуль нормы для некоторых ковариантных векторов, которые могут рассматриваться как соответствующие векторы энергии-импульса. Поскольку норма вектора является инвариантом преобразований, то обращение её в нуль гарантирует, что не найдётся такой системы

координат, в которой все пространственные компоненты вектора энергии-импульса обращены в нули, а временная компонента нет. Т.е. не найдётся системы покоя для траектории с таким кокасательным вектором. **Во всех системах координат будут иметься как пространственные, так и временная компоненты энергии-импульса.**

Как доопределить метрический тензор так, чтобы нужное нам свойство нормы стало возможным? Для начала заметим, что базовая наша частица в трёхмерном пространстве точечная. Поэтому в её малой окрестности все пространственные направления выглядят равноправными. Соответственно, и единицы измерения для всех трёх направлений нам стоит сначала выбрать одинаковыми. Такая возможность есть, ведь мы их сами выдумываем. Также сделаем наш выбор таким, чтобы пространственные векторы базиса были ортогональны как между собой, так и по отношению к нашей единственной реальной единице, вектору масштаба времени. Этот выбор делает наш метрический тензор полностью диагональным. Значения его компонент на пространственной части главной диагонали мы можем положить одинаковыми, и равными, скажем, a .

Тогда наше условие обращения в нуль нормы вектора энергии-импульса $\partial_i s$ в любой системе таких координат будет выглядеть так:

$$a[(\partial_1 s)^2 + (\partial_2 s)^2 + (\partial_3 s)^2] + (\partial_4 s)^2 = 0.$$

Очевидно, что число a должно быть отрицательным и таким, чтобы пространственная часть нормы компенсировала полностью вклад временной компоненты вектора энергии-импульса.

Посмотрим теперь, как выглядит интервал для двух точек, связанных смещением dx^i при таком определении метрического тензора.

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = a[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] + (dx^4)^2.$$

Легко видеть, что если вектор бесконечно малого смещения направлен строго вдоль траектории нашей частицы (только его четвёртая компонента отличается от нуля), то соответствующий интервал будет положительным числом. Если же вектор смещения чисто пространственный, с четвёртой компонентой равной нулю, то интервал будет строго отрицательным. Вполне естественно, что в случае направления вектора смещения вдоль нашей особенной частицы, состоящей лишь из двух событий, нам следует полагать значение интервала нулевым. Таким образом нам удаётся описать разницу связей между разными точками пространства-времени с помощью инвариантной числовой функции координат. Всю ту разницу, что мы отметили выше как необходимую для учёта в нашем описании мира. Кроме исходной разницы между координатами. Она вроде и имеется, но сосредоточена не в координатах, а в метрическом тензоре. Не совсем хорошо.

Следует отметить, что в теории матриц установлено, что число положительных и отрицательных знаков у компонент матрицы на её диагонали в её нормальной форме является инвариантной характеристикой матрицы, т.е. не изменяется при преобразованиях базисов, в которых она имеет нормальный вид. Это свойство называют законом инерции квадратичных форм. Для нас это свойство важно тем, что определив таким образом метрический тензор для **одной** ортогональной системы координат, мы гарантировано определили его и для **всех** возможных ортогональных координат, связанных с данной системой ортогональными поворотами и масштабированиями.

Достаточно ясно, что пространство-время с таким образом определённым метрическим тензором не является евклидовым пространством. Хотя и очень на него похоже. Из-за схожести пространства такого вида называют **псевдоевклидовыми**.

Насколько я знаю, впервые пространства такого вида рассматривал Г.Минковский, сумевший изложить в строгой геометрической форме те соотношения между пространством и временем, которые возникли при формулировании Специальной Теории Относительности. Поэтому пространства, в которых метрический тензор в нормальной форме имеет три компонента на диагонали одного знака, и последнюю другого, часто заслуженно называют **пространствами Минковского**.

Он же сделал возможным ещё один, альтернативный взгляд на проблему, удовлетворяющий нашим задачам полностью, и даже по ряду причин гораздо более предпочтительный. Он указал, что возможно получить ту же самую картину мира, если не вносить изменения в метрический тензор, оставляя его полностью подобным метрическому тензору евклидова пространства, а изменить смысл чисел, используемых как координаты. Г.Минковский предложил считать временную координату мнимым числом, а пространственные действительными. Тогда возведение в квадрат соответствующих компонент даст нужные знаки вкладов этих компонент в норму автоматически.

Поясню, почему я предпочту далее следовать именно этому пути.

Единственным реализуемым нами напрямую масштабом из репера единиц, необходимых нам для приписывания точкам в пространстве-времени координат (чисел) является масштаб времени. Нужные для измерения пространственных расстояний (чисел) масштабы мы можем определить только косвенно, с помощью тех отличий, которые имеются между двумя принципиально разными видами цепочек событий, связанных соотношениями причина-следствие. Между цепочками только из двух событий, и цепочками, содержащими большее их число. Метрический тензор в нашем случае является инструментом, описывающим эту разницу, искусственной подпоркой. В то же время, мы уже знаем, что основной структурой того геометрического образа мира,

который мы хотим получить в качестве его описания, является не метрика, а связность. Та структура, которая описывает изменчивость самих масштабов при смещении от точки к точке. Метрика вторична, возможность её введения обусловлена определёнными свойствами связности, не всегда выполняющимися. Поэтому опираться с самого начала только на метрику означает безосновательное игнорирование множества иных возможностей в описании поведения масштабов в реальном мире.

Следовательно, если мы имеем возможность сделать акцент именно на разнице в смысле вводимых нами координат, то сделать это необходимо. Координаты ведь являются той частью описания, которая создаётся до введения связности. Более фундаментальной частью. И сама связность, и её тензорные проявления при этом будут изначально нести в себе отпечаток той самой фундаментальной для нас разницы в смысле временных и пространственных координат. Метрический тензор сослужил нам свою службу, сделал видимым путь описания этой разницы. Более того, мы будем его и дальше использовать там, где это уместно и возможно. Но акценты описания мы сместим именно на разницу двух видов чисел, используемых нами как координаты в описании мира пространством-временем. Ведь те соотношения (суммы квадратов координат или компонент векторов), которые потом формулируются как идея метрики, мы вполне можем использовать в весьма ограниченном виде, полагать их верными отнюдь не для всех допустимых координат, а только для небольшой их “подгруппы”. Не делая эту идею абсолютной, верной для всех точек зрения. А значит не требуя существования тензора, не накладывая на связность излишних ограничений. Вот поэтому пути мы и последуем.

Далее мы вместо действительного числа, промежутка времени t , будем использовать в качестве координаты мнимое число $x^4 = it$. Здесь через i обозначена мнимая единица, корень квадратный из -1 , т.е. $i^2 = -1$. В математике мнимые числа появились уже давно при нахождении всех корней квадратных уравнений общего вида. Потом они нашли своё применение во многих других разделах математики. Так что следующим шагом в развитии теории чисел стало объединение действительных и мнимых чисел в единое понятие комплексного числа. Я не стал раньше останавливаться на подробном описании этой идеи. Но сейчас она нам потребуется. Более того, при формулировании квантового приближения к описанию мира, будут использоваться именно комплексные числа. Здесь мы впервые увидели полезность такого расширения понятия числа именно для описания мира, а не нужд чистой математики. Далее я остановлюсь на специфике их применения несколько подробнее.

Сейчас хочу только пояснить, почему удобнее использовать мнимые числа для координаты, связанной со временем, а не для пространственных координат. Ведь **это время реально для**

нас в полной степени, а пространство мы описываем только **косвенно**, через временные измерения. Казалось бы, нам следует полагать именно пространственные координаты мнимыми, а временную реальной. Причин у моего обратного выбора две.

- Весь наш опыт измерений, хотя и без достаточного на то основания, предполагает что именно пространственные измерения для нас первичны. Связана эта **иллюзия** с тем, что мы не замечаем, не обращаем внимания на то, что **любые наши пространственные измерения требуют времени**. Нам кажется, что и наши линейки, и сами предметы, которые мы измеряем, существуют “вне времени”. Хотя это не так, но осознание этого факта требует значительного усилия. Такая физическая теория, как Специальная Теория Относительности и является результатом осознания данного факта. Так стоит ли бороться с этой иллюзией? Ведь для целей описания мира совсем не важно, какие числа мы полагаем действительными, какие мнимыми. Важно лишь описывать пространство и время разными видами чисел. И помнить, что **любые** наши числа могут у нас появиться только как результат измерения. Простого ли, изопрѐнного (обусловленного разными дополнительными соглашениями) — не важно. Мы к ним можем добавлять разные специальные метки (знаки плюс или минус, мнимую единицу) чтобы уточнить смысл этих чисел. Уточнить их область применения, отделить от других возможных чисел.
- Более того, полагать координату на основе времени мнимой для нас оказывается ещё и удобнее, чем наоборот. Вспомните сделанное ранее замечание о том, что время мы склонны связывать с периодичностью событий. Это ведь тоже должно найти своё место в нашем описании мира. А при изучении комплексных чисел было выяснено, что те стандартизованные специальные функции, на которые я ранее обращал ваше внимание, экспонента и тригонометрические функции, на самом деле являются двумя проявлениями одной единственной функции комплексного числа, экспоненты. Причѐм периодическая составляющая экспоненты комплексного числа описывается именно его мнимой фазой. Так что при формулировке квантового приближения, где все эти зависимости встанут в полный рост, вы увидите, что такой выбор является совершенно естественным.

3.7 Преобразования Лоренца

Понятие о метрическом тензоре сослужило нам свою службу, высветив путь, по которому нам можно двигаться вперѐд. Но

оно будет нас слишком ограничивать, поскольку мы ведь пока вообще не ведём речи о какой либо связности в пространстве-времени. Метрической или не метрической — пока её у нас нет и быть не может. Мы ещё пространство-время не смогли представить толком даже как многообразие. Так что торопиться не будем и пойдём по пути использования разных чисел для временных и пространственных координат. Мнимых для координат, связанных с описанием времени, и действительных для координат, связанных с описанием пространственных отношений между событиями.

Для чисто пространственных соотношений мы напрямую ввести масштабы не можем никак. Но можем зафиксировать в нашем описании особое положение пар событий, являющихся одно причиной другого, и включённых в разные временные цепочки (лежащие на траекториях разных частиц).

Это особое положение мы определим как обращение в нуль суммы квадратов координатных расстояний между этими событиями, локализовав это соотношение. Т.е. записав его для бесконечно малого смещения. Локализация нам необходима для последовательного описания мира как непрерывности. Её использование ничем нас не ограничит, наоборот, расширит наши возможности. Т.к. локальное соотношение можно превратить в конечное интегрированием по любому пути, на котором оно выполняется. И конечное соотношение, при том что наше локальное соотношение есть нулевое, гарантирующее совпадение двух разных частей целого, так же будет его повторять. Т.е. требование на соотношения в малом обеспечивают это же соотношение в большом. Вот это условие для определения наших пространственных координат через временные:

$$[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] + (dx^4)^2 = 0. \quad (3.3)$$

Мы по определению полагаем его выполняющимся на любой непрерывной линии, которая могла бы соединить те два особенных события, о которых речь шла выше. Бесконечно малый промежуток $dx^4 = \mathbf{i} \cdot c \cdot dt$, разность временных координат для двух бесконечно близких точек на такой линии мы полагаем известным, пропорциональным определённому нами времени, распространённому на точки вокруг нашей базовой покоящейся частицы с её траектории непрерывно. Мы ввели коэффициент c , некоторую, пока ещё не фиксированную постоянную, для того, чтобы сделать возможным различный выбор единиц измерения для времени и для пространственной части, которую мы специально объединили в единую, общую часть.

Хотя мы рассматриваем три пространственных координаты, но на данном этапе причину выбора именно такого количества пространственных измерений мы не обсуждаем. Из наших схематических примеров явным образом следует только необходи-

мость одного дополнительного измерения, помимо измерения времени. Как я уже писал ранее, три пространственных измерения это опытный факт. Как его можно обосновать я остановлюсь позже. Здесь же для простоты изложения лучше остановиться на добавлении единственного пространственного измерения. На любое иное их число все рассуждения перенести можно будет легко.

Так что сейчас я буду работать с соотношением

$$(dx^\alpha)^2 - c^2 dt^2 = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad (3.4)$$

в котором уже учтена разница в определениях временной и пространственной координат. Вполне понятно, что при этом я сделал ещё одно предположение, принял его как данность формулируемого определения — единица времени принудительно пересчитывается в пространственную единицу, чтобы у слагаемых в соотношении (3.4) были одинаковые размерности:

$$[x^{1,2,3}] = [c] \cdot [t]. \quad (3.5)$$

Собирать два числа разных размерностей в сумму (здесь разность) мы права не имеем.

Следовало бы записать наоборот, т.к. у нас вторичными являются пространственные единицы, их мы здесь определяем посредством временных измерений. Но такая форма записи сложилась исторически. Да и увидеть явно физический смысл постоянной c легче, чем обратной ей величины. А он действительно имеется и достаточно прозрачен, как будет показано ниже.

Но ведь мы пространственную единицу придумываем, определяем, опираясь именно на указанное соотношение. Так что это просто определение, соглашение. Постулат если хотите.

Сразу о большем числе пространственных измерений. Мы принимаем, что наше определение не должно зависеть от направления в пространстве. Какие же координаты у нас получились?

Мы видели в §2.10, что любое преобразование координат для пространства числа измерений больше двух локально может быть представлено как суперпозиция двумерных преобразований. Когда обе координаты принадлежат к одной и той же группе (в нашем случае имеется только одна такая группа, описывающая преобразования только пространственных координат, не затрагивающие изменение временной координаты) ничего нового, по сравнению с описанным ранее, появиться не может. Поскольку мы, с одной стороны, сделали единицы для всех пространственных направлений одинаковыми, с другой стороны полагаем их (в данной системе координат — по определению; просто так приняли и всё) взаимно ортогональными, то вместе с данной координатной системой мы сразу определили непрерывную группу аналогичных координат, получаемых из данной с

помощью линейного преобразования “ортогональный поворот на угол ϕ ” (2.17). Наше предположение об ортогональности введённых нами координат пока имеет весьма шаткое основание только в том, что для их определения мы использовали квадратичную форму, являющуюся записью аналога теоремы Пифагора для евклидова пространства. И при указанных преобразованиях, поворотах, эта форма сохраняет свой вид для всех систем координат из получающейся “группы”. Но большего нам пока и не надо. Здесь нам достаточно лишь формального соответствия, позволяющего опираться на уже известные соотношения для евклидова пространства. Достаточно того, что для всей этой “группы” координат соотношения (3.3,3.4) выглядят одинаково и выполняются.

Рассмотрим важнейший для нас случай, когда одна координата пространственная (x), действительная, а другая временная ($x^4 = \mathbf{i}t$), мнимая. Т.е. когда они принадлежат к разным группам — измеряемым косвенным путём и измеряемым непосредственно. Постоянную c для пересчёта одних единиц в другие пока будем держать в уме, т.к. сейчас мы предположим, что единицы по разным координатам (временной и пространственной) определены пока произвольно.

Запишем матрицу перехода к новым координатам $\{x', x^{4'} = \mathbf{i}t'\}$.

$$A_i^{j'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x^{4'}}{\partial x} & \frac{\partial x^{4'}}{\partial x^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & -\mathbf{i} \frac{\partial x'}{\partial t} \\ \mathbf{i} \frac{\partial t'}{\partial x} & \frac{\partial t'}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Все производные в последней матрице являются действительными. Так что прямым вычислением можно убедиться, что определитель такого преобразования является действительным числом.

Представим матрицу A в виде (2.18). Коэффициенты масштабирования, очевидно, также всегда действительные числа. А вот не инвариантные углы поворотов согласно (2.20) становятся в этом случае чисто мнимыми. Рассмотрим ортогональный поворот, когда оба коэффициента масштабирования равны единице и оба угла совпадают, т.е. когда

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial x} = 1, \\ \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial x'}{c\partial t}\right)^2 &= 1, \\ -\left(\frac{c\partial t'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь нам уже необходимо было вспомнить о коэффициенте c , делающем размерности складываемых чисел одинаковыми, что мы и сделали, заменив t и t' на ct и ct' . Напоминаю, что величины

масштабов и для времени, и для пространства этим преобразованием уже не затрагиваются, так что и постоянная c фиксирована для всей группы получающихся координат.

В этом случае матрицу преобразования (3.6) можно записать в виде

$$A'_i = \begin{pmatrix} \cos \mathbf{i}\varphi & -\sin \mathbf{i}\varphi \\ \sin \mathbf{i}\varphi & \cos \mathbf{i}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \mathbf{i}\sinh \varphi \\ -\mathbf{i}\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Появившиеся у нас тригонометрические функции мнимого аргумента могут вызвать недоумение, т.к. ранее речь шла только об их определении для случая действительного числа в качестве аргумента таких функций. Здесь мы просто доопределили эти функции, дозволили их аргументу принимать более широкие значения. Расширили область их определения на все комплексные числа. Это расширение осталось здесь без объяснений, как и расширенное использование многих других понятий. По причине того, что детальное обсуждение этих вопросов увело бы нас слишком далеко от нашей главной темы.

Не трудно видеть, что точка, покоящаяся относительно новой системы координат в $x' = 0$, имеет “скорость” $v/c = \tanh \varphi$ относительно старой системы координат и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sinh \varphi &= \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \\ \cosh \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Таким образом, преобразование (3.8) не что иное как преобразование Лоренца. Обозначения \sinh , \cosh , \tanh являются общепринятыми обозначениями для так называемых гиперболических синуса, косинуса и тангенса, которые, как видно из (3.8), являются обобщением обычных тригонометрических функций для случая комплексного аргумента.

То, что я назвал выше “скоростью”, ею в действительности не является, это безразмерный параметр поворота. Но вот получается он как раз как отношение настоящей скорости v рассматриваемой точки к нашей постоянной c . И безразмерным параметр будет только если постоянная эта имеет размерность скорости, $[c] = [x]/[t]$, а мы её именно так и определили (3.5). Так что уже то, что мы отождествили ортогональный поворот в плоскости $\{x, x^4 = \mathbf{i}ct\}$ с преобразованием Лоренца позволяет нам сразу ассоциировать нашу постоянную c с известной физической величиной, скоростью света.

Скорость света. Наша постоянная ведь органически связана с особыми цепочками, состоящими только из двух специфических событий. И мы уже говорили, что такие цепочки имеют гораздо

большее право считаться образом волны, чем те, что дают масштаб времени. Но и кое-что от частицы в них есть. А именно, эти два события можно полагать (называть) событиями излучения и поглощения соответствующей частицы, фотона. Заметьте, в нашем описании она не может иметь не нулевую массу покоя. Как и фотон в квантовой физике.

Или излучение и поглощение волны. Электромагнитной. Дальше эту линию я продолжать не хочу, т.к. у нас и в помине ещё нет никаких полей. Так что это пока замечания на будущее.

Однако пренебрегать этой информацией не стоит. Поэтому мы будем далее называть постоянную c скоростью света. А полноценное подтверждение этого факта оставим на потом, когда построим достаточно развитое описание мира, дающее место и для электромагнитного поля, и для многого другого.

3.8 Инерциальные системы отсчёта

Обсудим полученное нами описание мира. Достигли ли мы поставленных на данный момент целей? Какую часть описания мира математической структурой “пространство аффинной связности” мы смогли обеспечить, указать пути её построения с помощью средств, имеющихся внутри этого мира?

- Мы имеем прототипы как для масштаба времени так и для скалярного параметра на траектории существования любой массивной частицы. Эти прототипы связаны генетически, имеют причину своего существования в наличии на траектории любой такой частицы событий, связанных отношениями причина-следствие. Сами факты событий и их отношения являются базовой, формообразующей составляющей нашего описания.
- Далее, мы проводим идеализацию этих прототипов (на самом деле одного, единого для обеих направлений) с тем, чтобы результат идеализации позволял правильно работать с непрерывной линией (описывать её), объединяющей события в двух направлениях:
 1. Подсчёт событий с последующим вложением результата в одномерную непрерывную линию вводит в описание частицы такое понятие как “действие”. Эта величина является базовой, неизменной для любого изменения описания. Поэтому мы определяем её (непрерывный вариант дискретного числа событий между двумя выделенными) как скалярный параметр вдоль траектории массивной частицы.
 2. Идея времени, также базирующаяся на фиксации любого заданного промежутка между двумя событиями

как единицы и дальнейшей идеализации такого масштаба для нужд описания непрерывной линии — локализация единицы, возможность произвольно изменять базовый промежуток между выбранными событиями, как глобально для всей линии, так и допускающая локальную переменность единицы. Эти масштабы, в отличие от масштабов действия, должны служить нам для построения системы координат, наличие которой позволит описывать нашу часть мира, континуум как многообразие. Пока мы смогли обеспечить такими масштабами только особые линии в континууме. Для полноценного описания части мира как континуума, даже локально, их недостаточно.

- Уже два этих способа описания траекторий частиц позволяют ввести в рассмотрение важнейшую характеристику массивной частицы — градиент действия вдоль её траектории, ковариантный вектор энергии-импульса, с его неисчезающей в системе покоя самой частицы временной компонентой. Энергией покоя частицы, или, на привычном для физики жаргоне, массой покоя. Конечно, введение этого вектора подразумевает некоторое забегание вперёд, предположение, что нам определённо удастся ввести хотя бы локально полноценную систему координат для описания континуума, непрерывной части мира вокруг выделенной массивной частицы. Важнейшим моментом нашего введения следует считать то, что вектор энергии-импульса, вместе с энергией покоя с самого начала имеют ясный физический смысл — они описывают удельную величину, скорость появления событий на траектории массивной частицы; число событий в выбранную единицу времени.
- Понятие времени, как одной из координат при описании мира многообразием, распространяется без ограничений на все линии, которые проходят через цепочки, содержащие более трёх событий. Событий, связанных соотношениями причина-следствие. Распространение этой координаты на другие линии является для нас идеализацией. Действием, которое мы предполагаем возможным, поскольку считаем нашу часть мира непрерывностью, континуумом. Но реализация этого действия с помощью конкретных прототипов нам недоступна принципиально. Распространение координаты времени на произвольные точки континуума является соглашением и не более того. И как произвольное соглашение требует от нас при его применении учёта всех допустимых возможностей. Это, впрочем, не проблема, ведь уже на стадии описания тех линий, где имеются прототипы масштабов времени мы перешли к идеальным масштабам, расширив описание за пределы реально возможной реали-

зации. Просто об этом нужно помнить на всех стадиях построения нашего описания мира.

- Следующий шаг позволяет нам ввести полноценную систему координат локально, в окрестности любой из массивных частиц, которую мы можем выбрать для базового определения координаты времени. Для этого мы опираемся на особую роль самых простых возможных цепочек событий, связанных отношением причина-следствие. Цепочек из двух событий. У них имеется естественным образом обусловленное особенное положение среди всех возможных цепочек событий.
 1. Это принадлежность каждого из составляющих такую цепочку событий к двум разным другим цепочкам уже из большего числа событий.
 2. Это возможность и необходимость приписать промежутку между событиями как промежуток, стандартный кусочек действия, так и некоторый промежуток времени. Ведь во всякой такой цепочке есть как причина (событие более раннее во времени), так и следствие. А значит можно ввести на всякой линии, проходящей через эту цепочку и вектор градиента действия.
 3. Это невозможность ассоциировать с такими линиями полноценный, определяемый только с помощью событий на них масштаб времени. По простой причине — на этих линиях (внутри, между конечными событиями) никаких событий просто нет. Следовательно, нет и системы покоя, которую можно было бы ввести для такой линии, нет и энергии покоя у вектора энергии-импульса для такой цепочки событий.
- *Используя описанные выше особые свойства таких цепочек, мы определяем пространственные координаты с помощью координаты времени для любого двумерного направления.* Делаем мы это с помощью соглашения (3.3,3.4), проводя явное различие между **временной координатой**, имеющей прототип, и таким образом **реализуемой непосредственными измерениями**, и любой из **пространственных координат**, **реализуемой косвенно, через временную**, с помощью соотношения (3.4), переписанного в виде

$$(dx^\alpha)^2 = c^2 dt^2, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

- **Соотношение это** не более чем **соглашение**. Но соглашение, опирающееся на определённые факты из реального мира. Кроме того, удобное для нас. Так как для описания пространственных соотношений, признание наличия которых

нам навязывает наш опыт, этот же самый опыт не предоставляет никаких иных возможностей для сопоставления пространственных координат точкам континуума. Поэтому, **локально, в окрестности любой массивной частицы, мы всегда можем полагать выполняющимся именно это соглашение.** С постоянным коэффициентом c . Таким, который мы можем определить как нам хочется. Притом, как постоянным во времени и пространстве, так и не зависящим от направления в пространстве. Просто нам так удобно, и, т.к. пространственные масштабы мы выбираем сами, пользуясь именно этим соотношением, то выбор такой возможен всегда.

- Возможен и любой другой выбор. Постоянная c может быть определена разная для разных направлений. Будут разные единицы для разных направлений в пространстве. Более того, для полноценного описания континуума нам придётся принять во внимание, что наше базовое определение пространственного масштаба возможно только сугубо локально, для каждого определённого выбора базовой массивной частицы. При использовании другой частицы в качестве базы, прототипа для масштаба времени, координаты, введённые ранее, могут быть нелинейными функциями новых. И наоборот тоже.
- Тем не менее, **мы смогли построить на вполне реализуемых измерениях уже полноценное (конечно, идеальное) описание континуума с помощью полной системы координат. Системы в которой время и пространство описываются, с одной стороны, равноправно, а с другой стороны, мы полностью отслеживаем разницу в этих координатах, навязываемую нам нашими реальными возможностями.**
- Следующим шагом мы установили, что с помощью таких соглашений мы можем ввести не только единственную систему координат. Нет, мы вводим целую группу равноправных систем координат, связанных особой, стандартизированной группой линейных преобразований. Группой ортогональных поворотов, описывающей переходы между реперами из базисных векторов в касательном векторном пространстве, отличающихся только общим направлением, но с одинаковыми величинами. Причём повороты описываются формально одинаково, как в случае чисто пространственного преобразования, так и при вовлечении временной координаты. Однако группа этих поворотов, группа Лоренца, позволяет сохранить принципиальную разницу между временем и пространством. А также между направлениями по линиям, соединяющим наши два особенных события

и всеми остальными направлениями, как временными, так и пространственными. Никакими поворотами, преобразованиями из этой группы (Лоренца), нельзя превратить линию времени ни в чисто пространственную, ни в линию, соединяющую только два события. И наоборот тоже нельзя. Что нам и требуется для правильного описания мира.

Все эти соображения работают на том уровне детализации описания реального мира, когда мы можем опереться на описанные выше схемы, когда можно говорить об отдельных событиях на траекториях массивных частиц. Т.е. на уровне элементарных частиц. **С каждой элементарной частицей мы можем связать описание близлежащего континуума в её системе покоя и в системах, как можно видеть из результатов предыдущего параграфа, движущихся относительно данной равномерно и прямолинейно.** Именно такой смысл, смысл скорости относительного движения двух систем отсчёта имеет параметр v в соотношениях (3.9). На языке классической физики, **такой набор систем координат и соответствующих им систем отсчёта** (т.е. тоже самое, но с указанием, на основании какой именно частицы реализован прототип времени) **называют инерциальными системами отсчёта.** Важно! **При описании элементарных частиц выбор системы координат можно ограничить только инерциальными системами отсчёта. Которые в своей группе мы можем считать по определению ортогональными.** Вполне понятно, что иная базовая частица может вести к своей собственной группе инерциальных координат, которые для данной будут выглядеть явно не инерциальными.

А как будет обстоять дело, если мы от наших схем перейдём к классическому описанию частиц? Ведь реализовать масштабы, в первую очередь масштабы времени, мы можем только с помощью “больших”, перекрывающихся событий.

Это легко отследить. Ситуация практически не изменяется. Классические масштабы времени по-прежнему остаются привязанными только к траекториям массивных частиц. При укрупнении и смазывании (перекрытии) событий, для массивных частиц мы получаем непрерывную траекторию. Количество событий на такой траектории мы уже никак определить не можем. Ведь в этом приближении все точки полагаются событиями и, значит, по определению непрерывности, их число на любом отрезке линии бесконечно. Вместо числа событий нам остаются для работы только действие и его градиент, вектор энергии-импульса. Действие в классическом приближении тоже полагается непрерывным, что обычно отмечают как необходимость устремления кванта действия h к нулю. Здесь может появиться логическое затруднение. Ведь h это постоянная, как её устремлять к нулю? На самом деле это не требуется, достаточно только отслеживать, на-

сколько наше приближение является хорошим. Вот это и можно оценить по величине отношения h/S , где через S я обозначил величину изменения действия в изучаемых процессах. Насколько это отношение мало, настолько хорошим и является наше приближение траектории частицы непрерывной линией.

Естественно, масса покоя для такой “материальной точки” должна быть приписана из каких-то иных соображений. Она в классическом приближении, по сути дела, является свободным параметром теории. Число событий в единицу времени нам в этом приближении определить не из чего. Вектор энергии-импульса (масса покоя как его главная составляющая) становится определяющим параметром для вычисления действия, а не наоборот, как в случае элементарных частиц.

Всё это касается времени подобных линий, дающих нам возможность определить координаты времени.

А особые линии, соединяющие две разные времени подобные, имеющие всего две конечных точки? А с ними всё остаётся вообще без изменений. Единственно, в классическом приближении такие линии сразу связывают с распространением света. В виде волны или частицы (фотона) не важно. Световой сигнал по определению полагается распространяющимся с постоянной скоростью. Это один из постулатов СТО. Для нас это тоже постулат, но мы его принимаем не как “закон природы”, а как удобное для нас соглашение. Всё выше сказанное по этому поводу полностью остаётся в силе.

Таким образом, и в классическом приближении, особая роль таких простейших цепочек событий, понимаемых как световой сигнал,⁴ позволяет ввести единицы для измерения (описания) пространства косвенным образом через измерение времени. При этом мы вводим всю группу инерциальных систем отсчёта (координат), привязанную к любой материальной точке.

Точно также, как и в случае элементарных частиц, таких “групп” инерциальных систем отсчёта можно ввести столько, сколько в нашем распоряжении имеется различных “материальных точек”, движущихся друг относительно друга неравномерно или не прямолинейно. Все равномерные прямолинейные движения собираются в одну и ту же группу инерциальных систем. Между разными группами инерциальных систем имеется полное равноправие. Нет никаких причин считать какую-либо из них имеющей некие преимущества, кроме соображений удобства или принадлежности конкретного наблюдателя, описывающего свою часть мира, к одной из них.

⁴Пока без надлежащего обоснования, которое я могу дать только позже, когда будет развито описание электромагнитного поля.

3.9 Число измерений

Я уже многократно упоминал, что число измерений для пространства-времени, как изображения нашего мира, с помощью сопоставления ему идеальной геометрической идеи, пространства аффинной связности, мы определяем на основании нашего опыта, нашей информации о свойствах мира.

Тем не менее, наверно будет полезно также проследить, как возникает и формируется идея о конкретном числе измерений для нашего мира, рассматриваемого как непрерывность. Хотя бы вкратце.

Здесь следует отметить, что линий возникновения наших представлений о числе измерений, нужных для описания пространства-времени, нам полезно проследить две. Одна линия базируется на нашем непосредственном опыте, имеющем дело со сложнейшими событиями. Вторую линию я буду вести в рамках тех схем, которые уже использовал ранее, опираясь на сложные физические эксперименты, говорящие о том, что события сложные всегда состоят из отдельных элементарных событий. Таких, деление которых нам уже не доступно. А потому мы должны ставить им в соответствие не непрерывность, а дискретную составляющую непрерывности, точку.

Как и раньше, мне удобнее начать с представления об элементарных событиях, той совокупности окончательной информации о мире, которую мы могли бы получить, разбив все без исключения события в мире на их элементарные составляющие.

Вполне ясно, что на таком уровне описание мира сводится к констатации только существования множества дискретных фактов событий. И всё. Число измерений такого описания самое простое и минимальное — это нуль.

Можно ставить вопрос о количестве всех элементарных событий, составляющих наш Мир, нашу Вселенную. Является ли оно конечным или бесконечным? Мой ответ таков — по совокупности имеющихся в нашем распоряжении сведений о Мире, скорее всего число событий в нём конечно. Но отстаивать далее эту точку зрения я не буду. Буду только в соответствующих местах книги, где это уместно, указывать на те экспериментальные факты, которые заставляют так думать.

Первое и основное указание на необходимость рассматривать Мир как непрерывность и, следовательно, на то, что нам нужно вводить хотя бы один масштаб для его измерения, если мы его хотим описать с помощью координат, это наше знание о причинно-следственных связях между событиями.

Простейший вид таких связей, организация событий в виде цепочек, даёт нам идею и прототип трёх вещей:

1. Одним из инструментов описания Мира (или любых его непрерывных частей) должны служить непрерывные линии. Одно измерение ложится в самую основу нашего опи-

сания. Мир становится на этом уровне одномерным. Но на уровне событий как фактов остаётся нульмерным.

2. Единицы измерения линий, масштабы, основанные на содержащихся в них событиях, с самого начала должны быть помещены в центр нашего описания. Это и инструмент описания, и та его составляющая, которая является производящей все остальные возможные черты описания.
3. Каждая такая линия вводит в описание мира две его стороны — свободно меняющуюся согласно с нашим выбором координату на линии (и в пространстве-времени) и инвариантную относительно этого выбора составляющую, связанную напрямую с событиями, с их числом на линии, т.е. действие.

Здесь основа нашей идеи, входящей в описание мира под названием “время”.

Далее, признавая наличие множества разных таких цепочек событий (зная это из опыта), мы приходим к простейшей причинно-следственной связи **между двумя такими цепочками**. Такого рода связи создают начальный вариант идеи под названием “пространство”. Две цепочки со связью между ними можно с успехом описывать, вводя всего лишь одно дополнительное измерение. Таким путём в наше описание Мира входит представление о его, по крайней мере, двумерности. И, ещё, двумерные подпространства становятся базой для любого описания взаимоотношений между всего двумя выделенными цепочками событий. Как ранее одномерные линии. Опять же, с точки зрения только констатации наличия тех или иных событий, Мир остаётся по-прежнему нульмерным. Только причинно-следственные связи (уже двух типов) делают его двумерным.

По этой схеме мы можем идти и далее, всё усложняя и усложняя виды связей причина и следствие. Но здесь я лучше переключусь на обратную дорогу, на классическое приближение, в котором мы имеем непосредственный опыт только со сложными событиями.

На уровне наших самых непосредственных опытов ощущения себя в Мире, выделения себя как части Мира, и взаимодействия с остальным миром, мы сразу нуждаемся в трёх измерениях для описания этого нашего взаимодействия с остальными (близкими к нам) частями Мира. Наше же собственное существование создаёт идеи времени и эволюции (нашего изменения во времени). Таким образом, некое приближение к времени подобной линии тоже становится необходимым нам для создания формализованного описания мира.

Двумерные подпространства также выглядят для нас удобными и предпочтительными для включения в наше описание. Так мир описывать легче, игнорируя всё, кроме какой-то пары

его взаимодействующих (и существующих во времени) частей. Но, тем не менее, мы ясно обнаруживаем нужду в использовании именно трёх измерений для описания пространства.

Наши сложные события вполне могут создавать иллюзию их непрерывности в той части, которая относится к их организации во временные цепочки. Но вот в своей пространственной части они дают как раз представление о дискретности, об их всеобщей отделимости. Вплоть до понятия о пустоте, тех частях мира, где нет никаких событий вообще. Таким образом, даже допуская непрерывность событий во времени, на основании только их наличия, фактов их существования, мы приходим к пониманию одномерности Мира в этом смысле. А признавая отделимость событий и во времени, снова возвращаемся к его нульмерности.

Это учёт всех известных нам типов связей причина-следствие требует описывать Мир как четырёхмерное многообразие.

На настоящий момент, среди всей той информации о Мире, которую мы накопили как человеческое общество, не имеется каких-либо опытных указаний на необходимость увеличить число пространственных измерений. Всяческие теоретические построения имеются, но все они весьма далеки от опыта.

Введённые нами группы инерциальных систем отсчёта и соответствующих им систем координат описывают мир в полном объёме, но локально. Преобразования между разными такими группами, накрывающими одну и ту же область мира (хотя бы частично), и базирующимися, как на основе, на линиях времени массивных частиц, траектории которых с точки зрения других групп выглядят не прямыми линиями, являются нелинейными функциями точки и приводят к необходимости рассматривать группы преобразований координат самого общего вида. Хотя группа Лоренца всегда остаётся локально выделенной.

Объединение локальных описаний пересекающихся частей мира (карт на многообразии) в единое, пусть и кусочное, описание (в атлас систем координат) позволяет нам полагать, что один шаг на пути к построению образа Мира как пространства-времени, реализации математической идеи “пространство аффинной связности” средствами, реально нам доступными, мы сделали. По крайней мере, рассматривать пространство-время как многообразие мы теперь можем. Такой образ мира частично опирается на реальные измерения, частично на их идеализацию. Но все его черты, вытекающие из навязанного миром или сделанного нами произвольно выбора, мы можем описать без проблем.

Для того, чтобы сделать дальнейшие шаги, нам нужно попытаться выяснить, какие свойства в нашем описании должна иметь главная управляющая свойствами пространства-времени структура, аффинная связность.

3.10 Геодезические. Сохранение энергии-импульса

При подходе к математике как отвлечённому от реального мира способу изучения тех или иных возможностей развития идей, коэффициенты аффинной связности могут рассматриваться как произвольные функции точки пространства (как произвольные функции координат на многообразии).

Для физики такой подход может быть полезен тоже. Но гораздо полезнее сначала выяснить, а нет ли каких-либо ограничений на такого рода манипуляции, связанных с тем, что возможности наши для выбора процедур измерения, полных наборов масштабов, всё-таки ограничены реальным миром. Ведь эти возможности мы уже описали ранее, а коэффициенты связности, даже как идея, не что иное как описание того, как эти масштабы изменяются от точки к точке.

Реальные процедуры измерения всегда базируются на событиях. События объединены в цепочки причинно следственными связями и создают идею непрерывной линии существования массивной частицы. Именно с этой линией напрямую связаны реализуемые измерениями координата времени и скалярный параметр s_0 , действие. И, естественно, контравариантный вектор масштаба времени e_4^i и ковариантный вектор градиента действия, $\partial_i s_0$. При изменении координаты времени вдоль линии существования частицы (элементарной или классической, не важно) оба вектора могут как-то изменяться (или не изменяться), **эволюционировать** с течением локального времени.

Заметьте, что реальный мир всегда накладывает ограничение на возможность выбора направления отсчёта времени как координаты вдоль линии существования любой частицы. Причину и следствие поменять местами мы не можем. Но вот рассматривать, что случится с описанием при такой перестановке вполне возможно. Оставляем этот вопрос на будущее. Сейчас концентрируемся только на возможностях описания эволюции указанных векторов с течением времени.

Ведь кроме этих векторов и касательного к траектории контравариантного вектора dx^i/ds_0 , связывающих координаты и действие, у нас нет никакой возможности приписать нашей базовой частице что-нибудь ещё, реализованное прямыми измерениями. Между вектором масштаба времени и касательным вектором имеется обязательное соотношение, условие их параллельности, которое я запишу в форме $e_4^i = k(s_0)dx^i/ds_0$. Т.е. в виде соотношения пропорциональности между этими векторами, с возможной зависимостью коэффициента пропорциональности от положения точки на траектории. Косвенными измерениями мы приписываем каждой точке на траектории частицы ещё и все оставшиеся пространственно подобные векторы базиса. Но они вторичны и обязаны следовать всем изменениям в векторе

масштаба времени.⁵

В системе покоя нашей частицы, с единицей времени, основанной на фиксированном числе событий, т.е. пропорциональной минимальному промежутку между событиями, оба контравариантных вектора, и вектор масштаба времени, и касательный к траектории вектор, который совпадает с ним же с точностью до постоянного на всей траектории коэффициента, вдоль траектории *не изменяются*. По определению самого понятия такой процедуры измерения, приписывания как координаты, так и значения скалярного параметра каждой точке на траектории

$$\frac{de_4^i}{ds_0} = \frac{d}{ds_0} k \frac{dx^i}{ds_0} = k \frac{d^2x^i}{ds_0^2} = 0. \quad (3.10)$$

Это соотношение справедливо только в системе покоя массивной частицы и в других из той же группы локально инерциальных, связанных с данной преобразованиями Лоренца (включая подгруппу чисто пространственных поворотов). Если же говорить о преобразованиях, включающих время, это системы отсчёта, движущиеся друг относительно друга только равномерно и прямолинейно.

У нас уже заготовлена возможность обобщить такого вида соотношения для векторов на произвольные системы координат. Мы ввели понятие абсолютного (ковариантного) дифференциала как раз для этого. Перепишем с его помощью требование (3.10) только для касательного вектора в форме справедливой для любого выбора координат:

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds_0} \frac{dx^i}{ds_0} &= 0 \quad \text{или} \\ \frac{d^2x^i}{ds_0^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds_0} \frac{dx^k}{ds_0} &= \frac{d^2x^i}{ds_0^2} + \bar{\Gamma}_{jk}^i \frac{dx^j}{ds_0} \frac{dx^k}{ds_0} = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Это уравнение в дифференциальной геометрии известно как уравнение геодезической линии в его канонической форме. Оно является также некоторым ограничением на выбор скалярного параметра, который в этом случае называется каноническим.

⁵Обратите внимание. Это замечание обосновывает наш выбор развития идеи описания возможностей изменения векторов в репере от точки к точке в пространстве как единого целого, а не для каждого вектора по отдельности. Это, в принципе, возможно, но, как сейчас мы видим, для нашей цели формулирования геометрии как способа описания реального мира будет совершенно бесполезно. Имеющийся в нашем распоряжении способ формирования полного репера масштабов завязан на единственный масштаб времени. Остальные векторы репера вынужденно должны следовать за его изменениями. Никакой отдельной самостоятельности у пространственных масштабов не имеется.

Канонический параметр определён с точностью до произвольного не нулевого множителя и произвольной константы, изменяющей начало отсчёта. Следовательно, наш параметр на траектории существования массивной частицы, действие s_0 , в привычных для математиков терминах является каноническим. И становится ясно, что каноничность скалярного параметра означает не что иное как согласованность двух единиц измерения, принятых для данного объекта, чьё подпространство существования описывается данной линией. Его внутренняя единица, производящая скалярный параметр, находится в линейном соотношении с самим объектом как масштабом, используемым для построения координат. В нашем случае “объект” это последовательность связанных элементарных событий и параметр на его траектории определён именно через эти события. Обратите внимание, что наличие в связности тензора кручения на геодезические траектории никак не влияет, поскольку в уравнение входит только симметричная часть связности.

С точки зрения геометрии это очень сильное утверждение: **в нашей картине мира всякая траектория массивной частицы, как в квантовом, так и в классическом приближении, является геодезической**. Для нашего же описания это вещь самоочевидная. Возникает она из признания того факта, что и единственный возможный прототип единицы времени, и определение естественного для траектории массивной частицы скалярного параметра основаны на одном и том же механизме, процедуре подсчёта элементарных событий. И иных возможностей просто не существует.

А теперь посмотрим, как вдоль траектории массивной частицы эволюционирует градиент скалярного параметра. Как изменяется (и изменяется ли) такая характеристика нашей частицы, как её вектор энергии-импульса. Ведь именно такую ассоциацию действия и его градиента с физическими понятиями мы имеем в нашем описании.

Чтобы увидеть, что происходит с градиентом действия, нам достаточно вспомнить, что для всех точек траектории, для всех значений действия, канонического скалярного параметра s_0 , выполняется тривиальное соотношение $\partial_i s_0 \cdot dx^i / ds_0 = ds_0 / ds_0 = 1$.

А значит

$$0 = \frac{d}{ds_0} 1 = \frac{D}{ds_0} (\partial_i s_0 \frac{dx^i}{ds_0}) = \frac{D}{ds_0} \partial_i s_0 \cdot \frac{dx^i}{ds_0} + \partial_i s_0 \cdot \frac{D}{ds_0} \frac{dx^i}{ds_0}, \quad (3.12)$$

откуда, в силу (3.11), следует, что обращается в нуль и ковариантная производная по каноническому скалярному параметру (действию) для градиента самого действия, т.е. для вектора энергии-импульса:

$$\frac{D}{ds_0} \partial_i s_0 = 0. \quad (3.13)$$

А это значит, что **вектор энергии-импульса сохраняется вдоль траектории любой массивной частицы**. Закон сохранения энергии-импульса для изолированной массивной частицы мы снова получили автоматически, как необходимое следствие тех методов и соглашений, которые мы используем для описания реального мира. Это просто тривиальный факт нашего описания, его неотъемлемая, необходимая черта.

В классической физике (и квантовой тоже) это совсем не так. Там это “**Закон Природы**”. Да, и у нас это соотношение можно тоже назвать “законом природы”. Но уж точно законом с маленькой буквы и с полным пониманием, что это закон утверждает и откуда он взялся.

Хотя я сконцентрировался на эволюции векторов, получаемых как идеализация результатов непосредственных измерений, но совершенно ясно, что и косвенным образом формируемые для описания чисто пространственных соотношений векторы тоже сохраняются вдоль траектории массивной частицы при её естественной параметризации с помощью действия. Сохраняется весь репер как целое. С одним и тем же объектом связности, описывающим изменения в этих векторах.

3.11 Относительность общая и движения

Теперь нам необходимо обсудить одно из важнейших понятий физики, понятие относительности. Не случайно две из наиболее известных широкой публике теорий, появившиеся в начале двадцатого века, содержат в своих названиях это слово.

Речь идёт о Специальной Теории Относительности (СТО) и об Общей Теории Относительности (ОТО).

При всей схожести этих названий, две эти теории акцентируют внимание на двух существенно разных аспектах одного и того же понятия, относительности.

СТО возникла и сформулирована, в первую, очередь так, чтобы описывать ситуации, наблюдаемые с точек зрения экспериментаторов, движущихся друг относительно друга. Акцент делается именно на относительности движения. Но движения специального, **равномерного и прямолинейного**.

Общая теория относительности декларирует, что ставит во главу угла переход к описанию мира с точки зрения **произвольно движущихся систем отсчёта**. Поэтому в ней относительность “общая”. Казалось бы, и там, и там речь идёт только об относительном движении.

Наверное не секрет, что в нашем бытовом языке понятие относительности несколько отличается от понятия относительности движения. “Обычное” понятие относительности заметно шире, чем та “общая” относительность ОТО. И в математике, как языке науки, гораздо более точном, чем бытовой, это понятие

всё-таки шире, чем это допускает существующая интерпретация ОТО.

Так что этот вопрос требует основательного разъяснения и уточнения терминологии. Начну я, пожалуй, с наиболее общего представления об относительности в описании мира, и только потом сосредоточусь на относительности движения, для описания которого понятие о его относительности жизненно важно.

Относительность, как понятие самого общего вида, можно сформулировать так:

О чём бы не шла речь, всегда можно это что-то сравнить с чем-то другим. Того же вида, или другого — не важно. И всякое такое суждение относительно. Относительно того, с чем конкретно производится сравнение. Т.е. в понятие относительности входит представление о сравнении как его основа.

Нас интересует применение этого понятия в языке науки, в его наиболее формализованной (хорошо определённой) части, в математике. Здесь тоже можно найти множество самых разных примеров понятий, которые можно рассматривать как проявления относительности в той или иной форме. Я хочу заострить внимание на одной из важнейших для нас, с точки зрения создания описания мира, сторон относительности, как понятия.

Математика сформулировала понятие о числе и использует этот инструмент практически во всех своих разделах. Я уже много раз обращал ваше внимание на то, что *число само по себе ничего не значит*. Число приобретает для нас смысл только тогда, когда известно **о числе чего идёт речь**. Когда указаны единицы измерения и сами процедуры измерения, производящие числа.

А это означает, что любое применение числа (и математики в целом, как инструмента для работы с числами) в процессе описания мира, является относительным. Зависит от единиц и способов измерения, производящих числа.

Мы стараемся уменьшить эту относительность. Именно для этого в математике служат те понятия, которые я определил как “стандартизованные” — специальные, стандартизованные функции (\sin , \cos , \exp и им аналогичные) или стандартизованные числа, такие как π (отношение длины любой окружности к её собственному диаметру, число e (основание экспоненты). Их мы специально рассматриваем в отрыве от каких-либо единиц измерения, потому, что **результат можно применять к любым единицам**. Но и в этом случае *единицы и процедуры измерения всегда присутствуют, только уже как “любые”*.

Вот это и есть относительность математики как её самое общее свойство.

В аналитической форме геометрии, как разделе математики, напрямую работающем именно с числами, эта относительность, по-необходимости, тоже присутствует. И присутствует в двух своих ипостасях, как две стороны одного целого.

С одной стороны, как **необходимость формулировать все соотношения геометрии относительно какой-то конкретной системы координат**. Одной конкретной процедуры измерения, придающей всем числам, появляющимся в геометрической конструкции, вполне ясный и конкретный смысл.

И, с другой стороны, как **необходимость формулировать эти же самые соотношения сразу для всех возможных систем координат, для всех возможных процедур измерения**. Просто потому, что выбор способа описания мира, способа создания его образа как геометрической конструкции, остаётся зависящим как от возможностей, предоставляемых нам самим миром, так и от наших собственных предпочтений. И последние важны не менее, чем первые.

В геометрии, как мы видели в предыдущей главе, соответствие этим целям достигается опорой на формулировку всех соотношений в форме, справедливой для всех возможных систем координат, не изменяющейся при переходах между ними. Переходах, описывающихся как преобразованиями координат, так и преобразованиями по соответствующему правилу любых других геометрических объектов. Сами геометрические объекты при этом классифицируются именно в соответствии с тем или иным законом преобразования, индуцированным для них переходами между системами координат (переходами между процедурами измерений).

Соответствующую форму записи соотношений геометрии обычно называют ковариантной формой записи. Со-, совместно, одинаково преобразующейся. Не путайте с понятием ковариантного вектора. Смысл тот же, да. Только для вектора он гораздо более ограничен, чем для соотношений самого общего вида. Вектор это только частный случай геометрического объекта. А ковариантная форма записи — это общее естественное требование для любых соотношений с участием любых геометрических объектов. Необходимое, чтобы суждения, ими записанные, были верны с любой возможной точки зрения. Вот эта форма записи и гарантирует правильный учёт относительности описания мира к средствам описания в геометрии.⁶

Требование ковариантной формы записи любых уравнений часто рассматривают как один из постулатов ОТО. Вот только сводить это требование лишь к указанию на использование

⁶Заметьте, что “не ковариантные” соотношения в математике тоже возможны. Но они имеют очень ограниченную область применения. Иногда это только одна, единственная система координат. Иногда это определённая, ограниченная необходимостью выполнения именно этих соотношений, “группа” систем координат. Вот вам пример — соотношения (3.3,3.4), выполнение которых и определяет представление о “группе” инерциальных координат (систем отсчёта). Эти соотношения могут рассматриваться как ковариантные, но только если не допускается переход к более общим системам координат, не рассматривается описание мира с помощью более общих процедур измерения.

произвольно движущихся систем отсчёта не следует. Ковариантная форма соотношений поддерживает гораздо более широкую относительность. Заметьте это на будущее, понадобится при обсуждении места и интерпретации ОТО в физике. Постулировав ковариантность всех уравнений, ОТО стала использовать произвольные системы координат. Без уточнения, как они могут быть получены. А для сравнения с экспериментом апеллирует к постулированному существованию локально инерциальных систем отсчёта, координаты которых уже являются результатами измерений. В отличие от общих координат, которым интерпретация теории отказывает в непосредственном физическом смысле. Отсюда и проистекают некоторые проблемы ОТО. Но об этом в другом месте.

Теперь я хочу перейти к рассмотрению именно относительности движения. Читатель, знакомый с СТО, должен был заметить, что наш способ описания процедуры измерения, с использованием предоставленных нам реальным миром средств, ведущий к определению групп локально инерциальных систем отсчёта, полностью соответствует духу этой теории. И не до конца букве. Не до конца потому, что мы не постулировали обязательное существование метрического тензора. Мы использовали соотношение между разными масштабами репера точно то же самое, что может быть записано с помощью постулированного в СТО метрического тензора. Но далее выбрали тот путь описания, который обходится без жёсткой привязки к его существованию. **Путь приписывания разного типа чисел для разных координат, сопоставляемых точкам мира.** Мнимые числа для линейных (“вдоль линии”) расстояний времени. И действительные числа для расстояний, определяемых на линиях пространства, косвенным путём, с использованием посредника, особых линий, имеющих лишь два события на каждом из своих концов. Эта разница совершенно условна с точки зрения каждого из типов чисел, куда эти числа употребляются внутри своего типа. И определяется она именно разницей в производящих числа масштабах. Мы ввели две копии поля действительных чисел, но приняли на себя обязательство не допускать превращения одних в другие, и, в то же время, использовать их совместно.

Как мы действовали? Определяли базовую, привязанную к конкретной массивной частице, систему отсчёта (систему координат). Затем объединяли все системы, связанные с данной с помощью некоторой выделенной группы преобразований (группы Лоренца) в специальную “группу” систем отсчёта (координат). Этой “группе” мы дали специальное название — инерциальные системы отсчёта.

Смысл опоры на базовую систему координат очевиден — это система покоя массивной частицы, в которой события на её траектории, реализующие масштаб времени, распределены равномерно, через одинаковые промежутки. Можно ли промежуткам

между событиями приписывать разную “длину”? Можно. Но **всегда** имеется возможность сделать это так, как сделали мы. Пространственная часть репера тоже выбрана согласно заданному правилу (3.4), для всех пространственных направлений одинаково. И это тоже можно сделать всегда. Хотя вполне можно было бы сделать и иначе, например, для разных направлений выбрать разный коэффициент пропорциональности. Т.е. для разных пространственных направлений определить разные величины для масштабов. Но это на данном этапе лишь создаст нам много неудобств, и ничего более. Однако иметь ввиду само наличие такой возможности следует.

Чем обусловлен выбор группы преобразований, определяющих всю данную совокупность инерциальных координат? Если мы не изменяем способ измерения времени, то достаточно очевидно, что при опоре на единственную частицу, причём точечную в смысле пространственных размеров, в нашем распоряжении не имеется никаких выделенных направлений в пространстве. А значит все системы координат, полученные из данной поворотом пространственной части репера масштабов на произвольный угол как целое, столь же хороши для описания нашей покоящейся (относительно самой себя) массивной частицы. Отсюда выделенность среди возможных линейных преобразований (локализованных, привязанных к произвольному моменту времени в истории частицы) именно ортогональных пространственных поворотов. Двумерное преобразование, характерное для этой группы, записано матрицей (2.17). Всё это означает, что наша процедура измерений, производящая локальную систему координат, определена с точностью до этой группы. Система покоя любой точечной массивной частицы, рассматриваемой и как непрерывная цепочка событий, и как дискретная, состоящая из отделимых событий, собранных в непрерывную линию не единственная. Таких систем бесконечно много. Часть этой бесконечности может быть описана с помощью группы ортогональных пространственных поворотов. Ещё больше возможностей будет принято во внимание, если в рассмотрение будут включены все преобразования вида (2.18-2.20) в пространственной части описания. **Такое расширение будет необходимо при изучении возможностей изменения векторов репера при смещении от точки мира к другой его точке.** Т.е. при изучении возможного вида коэффициентов аффинной связности как функций координат. Однако, для целей построения самих координатных систем для описания мира,⁷ **мы можем всегда ограничиваться ТОЛЬКО**

⁷Напомню, что реально построить хотя бы какое-то приближение к описанию мира в форме многообразия с приписанными **каждой** его точке координатами, мы можем только в классическом приближении. Т.к. реализовать на опыте мы можем лишь классические масштабы, опираясь на огромное число событий. И даже в этом случае наше описание будет в очень большой степени идеализированным, в силу невозможности реализовать весь необхо-

удобными нам процедурами измерений. Пока нет никаких причин, заставляющих нас делать иной выбор. А из самого метода построения процедуры измерения следует, что таких причин нет. Описанный нами выбор **локально** может быть сделан всегда.

Вполне естественно посмотреть, возможно ли расширить допустимые преобразования до полной группы ортогональных поворотов, поворотов всего репера наших масштабов как целого. Включая и поворот вектора масштаба времени. При этом нам нужно убедиться, что такими поворотами мы никогда не сможем сделать временной масштаб пространственным, или наоборот. И ещё нужно при этом понимать, чему будут соответствовать новые системы координат, добавленные в нашу “группу” расширением допустимых преобразований.

Поворот вектора масштаба времени означает, что в рассмотрение включены иные масштабы времени, иные линии времени, иные базовые массивные частицы, со своими цепочками событий. Реальные или возможные, т.е. возможно имеющие траектории в пространстве-времени, не совпадающие уже с нашей базовой. Не совпадение траекторий означает движение частиц, имеющих эти траектории как подпространства существования. Движение друг относительно друга. Относительное движение. Т.е. эти преобразования являются преобразованиями между разными системами покоя, движущимися друг относительно друга. То, что мы рассматриваем только ортогональные повороты, означает, что подразумевается сохранение величины масштаба времени, одинаковость единицы времени для всех включённых таким образом в рассмотрение систем координат (систем отсчёта). Пространственные единицы, конечно, тоже остаются неизменными по величине. Только их положение относительно старых масштабов изменяется.

Чем же мы обычно характеризуем относительное движение массивных частиц друг относительно друга? Скоростью. Скоростью движения, величиной описывающей локально изменение расстояния между частицами со временем. Это самое фундаментальное представление об относительном движении. Однако, **представление о пространстве-времени как многообразии, непрерывности с приписанными каждой точке координатами, подменяет это фундаментальное представление об относительном движении на представление о движении тоже относительном, но не относительно конкретной частицы, а относительно системы координат.** Это очень похоже, но отнюдь не то же самое. И здесь лежит корень проблем большинства сегодняшних теорий (точнее, их интерпретаций) относительного движения.

Более того, сейчас мы поймём, что подмена часто простирается до создания системы координат репер масштабов именно для каждой точки мира.

ется ещё дальше. Вместо движения частицы и её скорости относительно некоторой конкретной системы координат, мы иногда рассматриваем движение друг относительно друга не самих частиц, а ассоциированных с ними систем отсчёта (координат), рассматриваемых как одно целое, относительно другого целого. Собственно, именно представление о некоторой системе координат в данной области мира как о целостности и является определяющим в понятии о системе отсчёта. Система отсчёта это область пространства времени с “впечатанной” в неё системой координат. Обычно, в классическом случае, исходным образом для такого представления служит некоторое абсолютно твёрдое (а значит неизменяемое ни в пространстве, ни во времени) тело, “заполняющее” (хотя бы как идеальное продолжение реального тела) эту область пространства-времени.

И наш случай преобразования координат, который мы рассматриваем сейчас, именно такой. Любой ортогональный поворот из группы Лоренца, затрагивающий масштаб времени, описывает движение новой системы отсчёта относительно старой как единых целых. Или наоборот. Скорость v , фигурирующая в соотношениях (3.9) является именно такой скоростью относительного движения двух систем отсчёта друг относительно друга. Причём наши повороты гарантированно такие, что никогда не превращают времени подобное направление в пространственно подобное. И гарантируется это тем, что в нашей группе преобразований на пути такого перехода непреодолимой преградой встаёт невозможность достигнуть скорости относительного движения систем координат равной c . Преобразование при $v = c$ становится недопустимым, т.к. определитель матрицы преобразования обращается в бесконечность. Что столь же неприемлемо, как и его обращение в нуль. С точки зрения формально математической, притом, что определитель матрицы преобразований из группы Лоренца является всегда чисто действительным числом, превратить мнимое число в действительное непрерывным путём можно только переходя через нуль. А нуль как значение определителя запрещён. Это формальное описание нашего опыта — для масштабов времени мы имеем реальные прототипы, более ни от чего не зависящие, а для реализации пространственных масштабов всегда должны опираться на масштаб времени и особый случай цепочек из двух событий. И никаким переходом между разными масштабами времени мы эти условия изменить не можем.

Полезно посмотреть немного подробнее на соотношение обычных для нас единиц пространства и времени. Его можно оценить используя значение постоянной c . В нашей практике мы полагаем, что пространственные единицы (метры, сантиметры, вёрсты, дюймы) мы выбираем сами. Без каких-либо временных измерений. На чём основывается эта иллюзия? На том факте, что промежутки времени между событиями совпадения начала про-

пространственного масштаба с выделенной точкой на измеряемом отрезке и совпадения конца масштаба с другой точкой на отрезке очень мал в сравнении с привычной нам единицей времени. Нам кажется, что пространственное измерение можно провести “мгновенно”.

Что такое 1 сантиметр, выраженный через секунду?

$$1[\text{см} \rightarrow \text{сек}] = \frac{1[\text{см}]}{c[\text{см}/\text{сек}]} \approx 1/3 \cdot 10^{-10}[\text{сек}]$$

Много это или мало? Мы не различаем интервалы меньше примерно 1/25 секунды (вспомните кино, где воспроизводятся кадры с такой частотой и фильм нам кажется непрерывным), что уж говорить про интервал времени меньше чем 10^{-10} секунды. Его для нас нет, действие “наблюдения двух концов отрезка длиной один сантиметр” для нас происходит мгновенно, без отмеченных затрат времени.

Мы строим образ недостающих нам масштабов, базируясь только на событиях, отмеченных на подпространстве существования реализуемого масштаба взаимодействиями с каким-либо промежуточным агентом. Образ пространственного масштаба возникает у нас на основе, в первую очередь, зрительных впечатлений. Если объект, выбранный в качестве такого масштаба, может быть охвачен взглядом, то у нас возникает впечатление мгновенности его реализации. События регистрации (взаимодействия) света, пришедшего от двух *разных* точек пространственного масштаба разделены очень малым интервалом по сравнению с обычной для нас единицей времени. Но важен сам факт, что всегда должно быть не менее двух событий наблюдения двух концов масштаба. Именно этот факт означает, что пространственные масштабы реализуются нами *посредством временного*. Это становится очевидным тогда, когда размеры масштаба не позволяют охватить его одним взглядом, не говоря уже об астрономических расстояниях. Расстояния в астрономии измеряются отнюдь не в метрах или даже километрах. Они измеряются в световых секундах, минутах и годах. Километры там всегда вторичны.

При этом распространение света (его излучение и поглощение, два события) является для нас основой определения расстояний.

Хотя, в принципе, в качестве посредника можно было бы использовать распространение звуковых волн или даже движение массивных тел. Что мы (и не только мы, летучие мыши, например, тоже) часто и делаем. Для существа лишённого зрения и слуха вообще нет иной возможности узнать о том, что данный предмет имеет пространственный размер, иначе как посредством собственного движения прийти в соприкосновение сначала с одним его концом, потом с другим и, таким образом, создать *два*

события в своей собственной истории. Да и люди, обладающие всеми органами чувств, до сих пор часто измеряют расстояния с помощью времени, затраченного на достижение другого места в пространстве. Час пути, два дня пути. Обычное дело.

Но все такого рода посредники обладают одним существенным недостатком. Они не универсальны. При определённых условиях их вполне можно использовать для определения расстояний. Но только световая волна (или фотон), с её (его) предельно малым количеством событий, всего лишь двумя событиями в её (его) истории, может рассматриваться и рассматривается нами как **универсальный** инструмент для определения пространственных масштабов с помощью масштабов времени. Именно потому, что любая массивная частица имеет в своей истории больше двух событий, и, поэтому, линия с двумя событиями на концах и не более, всегда будет особенной, и одинаково приемлемой для определения пространственных масштабов для всех описаний, базирующихся на произвольно движущихся временных масштабах.

Посмотрим теперь, как выглядят преобразования Лоренца при обычных для нас скоростях. Для наглядности перепишем преобразование Лоренца, описывающее поворот репера в плоскости $\{x, x^4 = ict\}$ не через тригонометрические функции (3.8), а с помощью их выражений через скорость v движения одной системы отсчёта относительно другой и в явной форме, выражая координаты в новой системе через координаты в старой:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x + \mathbf{i} \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ict \\ ict' &= -\mathbf{i} \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x + \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ict \end{aligned} \quad (3.14)$$

При обычных для нас скоростях соотношение $v/c \ll 1$ выполняется с очень хорошей точностью. Например, при $v = 3$ км/сек (огромная для нас скорость), $v/c \approx 10^{-5}$. А уж $(v/c)^2$ заведомо ещё много меньше единицы. Поэтому для таких скоростей с очень хорошей точностью будут выполняться следующие соотношения, описывающие такое преобразование:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned} \quad (3.15)$$

С очень большой точностью в обеих системах, движущихся друг относительно друга со скоростью v (скорость какой относительно другой мы так обозначаем учитывает знак этой скорости, величина одна и та же), время измеряется одинаково. Одинаковое время для любых систем отсчёта, движущихся равномерно и

прямолинейно друг относительно друга со скоростями, малыми по сравнению с нашей постоянной c , скоростью света. Пространственные координаты при этом просто сдвигаются на некоторый, определяемый скоростью, промежуток. Скорости иных массивных частиц относительно этих систем отсчёта просто складываются со скоростью относительного движения систем (с учётом знака). Соответственно, любое массивное тело, движущееся равномерно и прямолинейно относительно любой из систем координат, включённых в эту “группу”, движется точно также относительно всех систем “группы” инерциальных координат. Только с другой скоростью, и всё. Это первый закон Ньютона, или **закон инерции**, сформулированный Галилеем. Ещё его называют *принципом относительности Галилея*. Вот отсюда и происходит название “инерциальные” системы отсчёта для определённой нами “группы” систем координат. А ещё здесь можно видеть причину долгое время существовавшего в физике отдельного взгляда на время и пространство. На представление о пространстве как сущности, существующей во времени.

Только кризис физики конца девятнадцатого и начала двадцатого века привёл к осознанию их нераздельности, необходимости описывать мир как пространство-время, единую сущность. Да и то, похоже, это осознание ещё весьма далеко от полного даже сейчас, в начале века двадцать первого. Об этом немного в следующей главе.

А сейчас хочу только подчеркнуть, что сделанный нами переход к приближённым выражениям не меняет самой сути взаимоотношения между равномерным и прямолинейным движением массивных частиц (тел) относительно систем координат и таким же движением систем координат (отсчёта) друг относительно друга. Только связь времени и пространства становится очевидной при больших скоростях, и сами скорости преобразуются сложнее.

Но все движения остаются и равномерными, и прямолинейными. В этом суть объединения этих систем координат, этих способов описания мира, в единую “группу” инерциальных систем отсчёта (координат).

То, что мы имеем возможность ввести “группу” инерциальных координат как в случае действительно локальном, при описании элементарных частиц, так и в случае весьма от него далёком, но всё же достаточно хорошо поддержанном экспериментом, нашим повседневным опытом, локализованного описания классических “точечных” (имеющих малый пространственный размер) массивных частиц, создаёт определённую иллюзию лёгкости описания относительного движения массивных частиц.

Я хочу обратить ваше внимание на то, что в этом вопросе действительно имеются достаточно серьёзные проблемы. Для их иллюстрации рассмотрим возможности описания относительно-

го движения двух тел в пространстве-времени общего вида. Полагая, что в нашем распоряжении имеются как все допустимые системы координат, так и известен объект связности, описывающий изменение репера масштабов от точки к точке.

Для описания действительно относительного движения массивных тел друг относительно друга, а не относительно систем координат (систем отсчёта) мы нуждаемся в существовании более чем одного объекта. Общее понятие движения *относительно* — нечто движется относительно чего-то другого. Пространственно-временное описание движения по сути дела является способом описания не совпадающих подпространств существования объектов. Значит, мы должны рассматривать, по крайней мере, два объекта. Мы пытаемся сохранять *локальную* точку зрения, поэтому полагаем, что разница в координатах обоих объектов достаточно мала. Правда, не обязательно бесконечно мала.

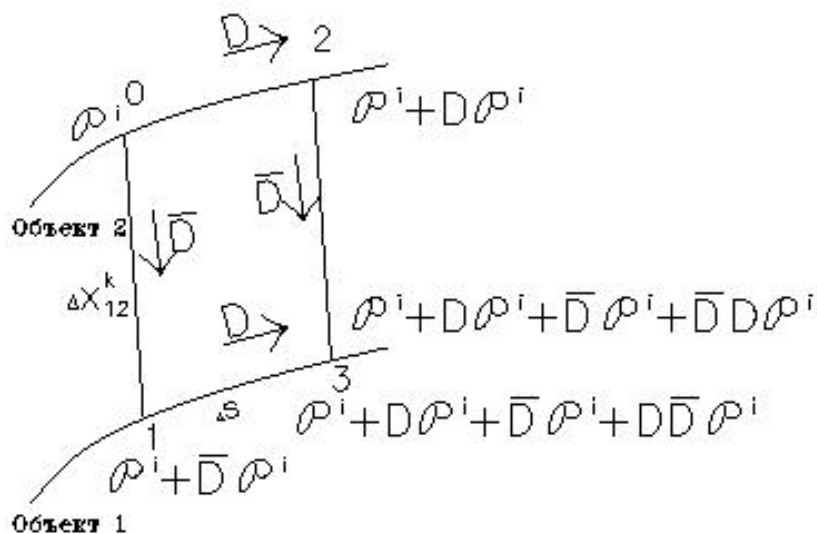


Рис. 3.5: Изменение Δ -плотности контравариантного вектора P^i , ассоциированного с Объектом 2 с точки зрения Объекта 1.

Возьмём две кривые, одну на подпространстве существования объекта 1, вторую на подпространстве существования объекта 2. Попытаемся описать *изменение* какого-то *внутреннего* свойства **объекта 2** с точки зрения **объекта 1**, когда наблюдатель, ассоциированный с ним *переносится* **вдоль кри-**

вой 1 (т.е. существует на кривой 1) с бесконечно малым изменением его канонического скалярного параметра ds . В качестве измеряемого и изменяющегося свойства для наших целей сейчас удобно выбрать Δ -плотность контравариантного вектора \mathcal{P}^i .

Результирующее изменение мы можем записать как $D\mathcal{P}^i/ds$ и оно будет геометрическим объектом, ассоциированным с кривой 1. Но \mathcal{P}^i существует на кривой 2. Значит, чтобы вычислить $D\mathcal{P}^i/ds$ мы должны перенести \mathcal{P}^i с кривой 2 на кривую 1 дважды. Схематически ситуация представлена на рисунке (3.5).

Разница в точке 3 между значениями \mathcal{P}^i , перенесёнными туда вдоль путей {0-2-3} и {0-1-3} может быть записана формально как $D\mathcal{P}^i \approx \overline{D}D\mathcal{P}^i - D\overline{D}\mathcal{P}^i$ (здесь черта над знаком абсолютного дифференциала означает иной путь переноса, а не дифференциал относительно симметричной части связности) и

$$\begin{aligned} \frac{D\mathcal{P}^i}{ds} &\approx \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\overline{D}D\mathcal{P}^i - D\overline{D}\mathcal{P}^i}{\Delta s} \\ &\approx (R_{jkl}^i \mathcal{P}^l - F_{jk} \mathcal{P}^i - 2T_{jk}^p \nabla_p \mathcal{P}^i) \frac{dx_2^k}{ds} \Delta x_{12}^j. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Мы написали *приблизительно* потому, что *координатное расстояние* Δx_{12}^k не является вектором и, хотя мы и полагаем его малым, но всё же не бесконечно малым.

О чём нам может рассказать это соотношение? Очень о многом.

- Мы видим в правой части несколько геометрических объектов. Тензоров, сформированных из коэффициентов связности, о существовании которых мы говорили ранее, в §2.12. Они появились при описании относительного движения двух разных объектов мира, и значит имеют определённый физический смысл, а не только являются полезными для чистой геометрии. Это нам даёт указание на то, что образами всех физических объектов мира в нашем изображении мира пространством аффинной связности обязаны быть некоторые геометрические объекты. Установить, какому именно физическому понятию следует поставить в соответствие конкретный геометрический объект — одна из важнейших для нас задач. Некоторое отождествление мы уже провели — масштабы как контравариантные векторы специального вида, действие как особый скалярный параметр, его градиент как ковариантный вектор энергии-импульса.
- Первая составляющая изменения Δ -плотности контравариантного вектора \mathcal{P}^i представляет собой её свёртку с тензором кривизны R_{jkl}^i .

- Во второй части изменения присутствует антисимметричная свёртка тензора кривизны F_{jk} . Она появилась в уравнении (3.16) как *независимый* член потому, что мы рассматривали в качестве изменяющегося свойства Δ -плотность. Для чистого вектора (или тензора) этот член будет отсутствовать, так же как для скалярной плотности *только этот член* появится в соответствующем уравнении.
- Третья часть изменения пропорциональна уже не самому нашему изучаемому геометрическому объекту, а его ковариантному градиенту. И свёрнут это градиент с тензором кручения пространства-времени.
- И, наконец, всё это, как целое, необходимо свернуть с вектором, касательным к траектории тела, изменением чьей характеристики мы интересуемся и с расстоянием между нашими телами. Опорным и движущимся относительно опорного.

Если мы применим (3.16) к касательному вектору dx_2^j/ds вместо векторной плотности и потребуем $\Delta x_{12}^k \rightarrow 0$, то результирующее уравнение станет *точным* и превратится в уравнение геодезической (3.11). При этом мы переходим от описания относительного движения с точки зрения двух разных массивных тел к описанию движения относительно системы координат. Разница достаточно очевидна. Второй способ описания может быть легко локализован и получающееся уравнение (геодезической) является в этом смысле точным дифференциальным уравнением. В отличие от соотношения (3.16).

Это замечание подтверждает само согласованность нашего описания относительного движения – оно включает как предельный случай описание покоя, отсутствие движения относительно самого себя с внутренней точки зрения. Но оно же ставит под вопрос полезность полученного нами соотношения для изучения относительного движения хотя бы двух тел. Стоит ли его использовать, это “плохое” уравнение, если имеется “хорошее” уравнение геодезической?

Проблема в том, что уравнения геодезической не достаточно для полноценного описания относительного движения.

В это уравнение напрямую входят коэффициенты аффинной связности, а они, как я уже обращал ваше внимание, не могут быть определены с помощью измерений однозначно. Измерить (в той степени, насколько это возможно вообще) мы можем только тензоры и тензорные плотности, порождаемые связностью. Поэтому, даже при возможности, казалось бы, вполне однозначного выбора процедуры измерения для конкретной, выделенной в качестве опорной массивной частицы, объект связности остаётся не до конца определённым этой процедурой. Ведь что происходит **между** соседними событиями с нашим масштабом мы отследить

измерением не в состоянии. Здесь лежит одна из причин необходимости отдельного квантового описания случая, когда события на траектории частиц заведомо отделимы друг от друга. Но и в классическом приближении ситуация улучшается не в достаточной степени. Да, на самой линии существования опорной частицы мы можем полагать в этом приближении то, что объект связности нами определён (измерен) хорошо. А между частицами, где нет прототипов для масштабов времени? Там ведь и измерить ничего нельзя, **туда мы наше описание продолжаем из соображений непрерывности**. А продолжить с одномерного подпространства в четырёхмерный континуум функции, известные только на этом одномерном пространстве, можно бесконечным числом способов.

Кроме того, вспомните, что геодезичность линии определяется только частью полного объекта связности. Только его симметричной частью. А его антисимметричная часть, тензор кручения, в это уравнение не входит совсем. А значит только знание о геодезичности траекторий всех массивных частиц не может дать нам полного представления о том, как меняются наши масштабы от точки к точке. В то же время, соотношение (3.16) явным образом указывает на то, что при определённых обстоятельствах описание истинно относительного движения (частицы относительно частицы, а не относительно системы координат) явным образом зависит от наличия кручения.

Так что нам не следует так вот сразу отказываться от изучения соотношений (3.16) только потому, что они сформулированы недостаточно точно. Мы с самого начала знали, что наше описание мира будет приближённым и не единственным. Вопрос, насколько хороши могут быть наши приближённые описания в тех или иных ситуациях.

На этом я хочу закончить описание самых базовых идей физики, которые будут развиты в следующих томах этой книги. Очевидно, что там основной акцент будет сделан уже на гораздо более детальном описании возможных свойств связности, и наших возможностей извлечь эти свойства из доступных нам опытных данных. На полноценном переходе от образа Мира как многообразия к образу Мира как пространства-времени в форме математической идеи пространства аффинной связности. Предварительное представление о том, что будет содержаться в этих томах можно составить по книге[11].

Глава 4

Некоторые мифы физики

4.1 Мистический взгляд на эффективность математики

Изложенные в первых трёх главах этого тома идеи позволяют нам критически посмотреть на некоторые широко распространённые в наше время представления о физике и математике. Я обращаю внимание на эти вопросы потому, что они высказывались и продвигались весьма известными и вполне достойными учёными. И кочуют из одного учебника физики в другой. Но являются или полностью ошибочными, легко рушащимися при непредвзятом рассмотрении опытных данных и языка науки, или верными лишь частично, при некоторых весьма частных предположениях. А слепое принятие на веру таких представлений может весьма печально сказаться на мировоззрении сегодняшних (и завтрашних) работающих в науке учёных. На их выборе как направлений исследований, так и на интерпретации полученных результатов.

Да и на мировоззрение широкой публики всё это влияет, и даже гораздо сильнее, чем на учёных, которые по необходимости должны быть всегда более критичны как к чужим, так и к своим взглядам на мир.

Первое, что я хочу обсудить в этом плане, это существующее представление о “Непостижимой эффективности математики в естественных науках”. Такая точка зрения на отношения между физикой и математикой была лучше всех сформулирована лауреатом Нобелевской премии по физике Е.Вигнером, название одной из статей [9] которого я как раз и привёл выше. Она также включена и в его сборник “Этюды о симметрии” [10], где такое представление обосновывается ещё шире. Конечно, такой взгляд на отношения физики и математики характерен не только для Е.Вигнера, он распространён весьма широко. Но Е. Вигнер сформулировал его лучше всех, в явном виде, поэтому я и хочу сравнить именно его взгляды с тем материалом, который уже представлен в этой книге.

Те, кто внимательно читал эту книгу, и смотрят теперь на физику, да и на все без исключения другие науки, как на способ описания Мира, его частей, его явлений и связей, могут с недоумением спросить — откуда эта “непостижимость эффективности математики”? Ведь математика и создавалась именно как язык такого описания, её идеи имеют прототипы в нашем Мире. Да, часто продолженные заметно за пределы наших возможностей их проверки и реализации частями и явлениями Мира. Но и только. Так что нет ничего удивительного, что инструмент предназначенный для того, чтобы работать, работает достаточно эффективно. Скорее, следует говорить что работает он всё-таки не настолько эффективно, как нам хотелось бы. Ну тут уж имеет место привычное нам противоречие желаний и возможностей... Как в фильме “Кавказская пленница”: “... Имею желание купить дом, но не имею возможности. Имею возможность купить козу, но не имею желаний...”

Так откуда же происходит это представление о “непостижимости”?

Наверное стоит отметить, что в науке склонность к мистицизму, если не возникла, то оформилась явно, скорее всего в результате перестройки начала двадцатого века. Как реакция на довольно ясно выраженную уверенность в её рациональности и потенциальной способности решить все проблемы в предыдущий период и крах этих представлений с обнаружением квантовых явлений. Да и обе теории относительности дали свой толчок к такому переосмыслению места и возможностей науки.

Если вы посмотрите на обсуждение вопроса Е.Вигнером, то легко увидите, что красной нитью сквозь него проходят следующие вещи:

Разделение описания Мира на “законы природы” и случайные “начальные условия”. Инвариантность законов природы по отношению к месту и времени, т.е. по отношению к сдвигам в пространстве-времени как данность. Выделенность понятия симметрии и понятия группы как инструментов описания инвариантности. Часть симметрий при этом видится обусловленной свойствами геометрии пространства. А часть вообще непонятно откуда взялась — калибровочная инвариантность электромагнитного поля, сохранение электрического заряда, всяческие “внутренние” симметрии в моделях элементарных частиц, и т.д. “Внешность” этих понятий по отношению к физике, делающая их “законами природы”. Да, к тому же, ещё и неполноценными, нарушенными. В физике элементарных частиц представление о нарушенных внутренних симметриях стало общим местом, частью теории. А ещё “за кадром” со времён Ньютона до сих пор присутствует убеждение о вложенности физики, мира с его явлениями в некое абстрактное, математическое пространство. Математика противопоставлена физике с самого начала. Она сама по себе. А физика сама по себе, но её действие развивается на

сцене геометрии, **вмещающего пространства**.

Вот истоки этого мистицизма. Когда нет ясного понимания, что, из-за чего, и почему должно быть так, а не иначе, там и тогда и появляется мистический взгляд на вещи.

Ещё одним истоком является, как не странно, возникшее на рубеже девятнадцатого и двадцатого веков среди математиков (и многих физиков тоже) острое желание аксиоматизировать всё и вся. Сначала математику, а потом и физику. Гильберт поставил задачу аксиоматизации физики как одну из своих проблем.

Вроде бы в этом нет ничего плохого. Вот только... Я специально останавливался на недостатках чисто аксиоматического подхода к изложению идей математики по сравнению с последовательным конструированием их определений, хотя по результатам они вполне эквивалентны. Ведь что такое аксиома, взятая в отрыве от предыстории? Это просто постулат, утверждение, не требующее доказательства. Зачем оно нужно, почему нам требуется такое именно утверждение а не иное — всё это отринуто, оставлено за кадром. Дано богом или природой. Да и нечего размышлять, “почему”. Примем так и выйдет “красиво”. Не даром в то же самое время стали говорить о “красоте” теории как основном критерии её правильности... А ведь именно так и сформулированы обе теории относительности. Как совокупности постулатов. Вот один из постулатов СТО и ОТО — пространство-время локально псевдоевклидово. А почему? Нет ответа. Точнее ответ прост, но ограничен по информативности — так требует опыт. Точка.

А вы уже имели возможность увидеть, что можно ведь и разобраться (смотри предыдущую главу), *чего именно* наш опыт требует и *почему* это требование можно (да и нужно) сформулировать как локальную псевдоевклидовость пространства-времени.

Вот так и получается представление о роли математики, сформулированное Е.Вигнером [9]:

“... Чудесная загадка соответствия математического языка законам физики является удивительным даром, который мы не в состоянии понять и которого мы, возможно, недостойны. Мы должны испытывать чувство благодарности за этот дар. Следует надеяться, что он не покинет нас и в будущих исследованиях и что он будет — хорошо это или плохо — развиваться к нашему большому удовлетворению, а быть может, и к нарастающему беспокойству, расширяя область познания окружающего нас мира.”

Чистая мистика... Чей дар? Кого благодарить? И как это совмещается с наукой? Не лучше ли всё-таки попытаться понять — что, как и, главное, почему?

Один из таких моментов, один из мифов, который льёт воду на мельницу мистицизма, представление об однородности и изотропности нашего Мира как пространства-времени, и его связь

с законами сохранения, мы обсудим в следующем параграфе.

4.2 Однородность и Изотропность. Законы сохранения

Однородность и изотропность.

Что это такое? Является ли пространство-время однородным и изотропным?

Очень часто в книгах и статьях, касающихся свойств пространства и времени, как научно-популярных, так и научных, в том числе и в учебниках, написанных весьма достойными учёными, сплошь и рядом можно встретить утверждения типа:

“Пространство-время однородно и изотропно”. Хорошо ещё, если при этом упоминается, на какой шкале, на каких расстояниях можно считать это верным. Чаще, правда, утверждают, что пространство и однородно, и изотропно, а время только однородно.

А ещё утверждают, что именно однородность и изотропность пространства и однородность времени являются причиной законов сохранения энергии-импульса и момента импульса.

Оба эти утверждения неверны (второе частично), и их широкая распространённость ведёт к серьёзнейшим проблемам в понимании физики. Одной из таких проблем является отождествление однородности и изотропности пространства-времени с вполне естественным требованием независимости результатов физических экспериментов от выбора системы координат в пространстве-времени, в частности от выбора начала отсчёта и направления осей. При этом такая независимость слишком часто трактуется чрезмерно прямолинейно. Вот поэтому я и хочу обсудить эти понятия.

Сначала дадим определения самих этих слов, чтобы избежать каких-либо недоразумений в их понимании.

Однородность.

В математике, на языке наиболее свободном от противоречий, однородными считаются такие области пространства (пространства в самом широком математическом смысле), **точки которых имеют все свойства совершенно одинаковыми.**

Примерами таких пространств, однородных как целое, являются одномерные бесконечные или замкнутые линии, не имеющие самопересечений и каких-либо выделенных на них точек. Ещё в качестве таких примеров можно рассматривать евклидовы пространства двух и более измерений. К более сложным таким пространствам, всё ещё легко доступным нашему воображению, можно отнести поверхности сфер произвольного радиуса (пример замкнутого пространства, каждая точка которого имеет одну и ту же положительную кривизну) и поверхности, образуемые вращением одной ветви гиперболы вокруг оси x или y (при-

мер пространства бесконечного, каждая точка которого также имеет одну и ту же кривизну, но уже отрицательную). Конечно, можно привести и другие примеры однородных пространств, и много. Но думаю уже приведённых вполне достаточно, чтобы уяснить смысл слова “однородность” применительно к понятию пространство.

Довольно ясно также, что пространства, в общем случае неоднородные, могут содержать некоторые вполне однородные области. Простейшим примером является отрезок прямой. Все точки отрезка, за исключением его концов, имеют одинаковые свойства.

И в быту, на языке не столь точном, мы полагаем нечто однородным тогда и только тогда, когда **произвольно взятые его составляющие для нас выглядят совершенно одинаково**. Достаточно большая ёмкость (но не слишком большая), в которую налита чистая вода или какая-нибудь иная чистая жидкость, даёт нам зримый пример того, что мы называем однородной субстанцией, имеющей три измерения. Так же как и достаточно гладкая бумага или поверхность стола дают нам такой же пример однородной субстанции, имеющей два измерения. **Но в быту мы уже приучены понимать, что однородность эта может быть результатом не истинных (т.е. всех без исключения, при выборе любых, в том числе и сколь угодно малых частей субстанции) свойств самих субстанций, а того приближения, в котором мы их рассматриваем.**

Я имею ввиду, что взяв хорошую лупу, мы можем разглядеть даже на самой гладкой бумаге определённые шероховатости в некоторых местах, или даже волокна, из которых эта бумага состоит. Иногда случается и так, что проведя ладонью по кажущемуся гладким (т.е. однородным) столу мы рискуем получить занозу. А с помощью микроскопа можно обнаружить и в чистой воде инородные включения, например, бактерии. Более того, мы уже знаем также, что все известные нам субстанции, какими бы однородными они нам не представлялись на бытовом уровне, в конечном счёте состоят из молекул и/или атомов, разделённых пустотой. Т.е. при должной придирчивости оказываются на поверку совсем неоднородными.

Отметим этот важнейший момент: в реальном мире **некоторые его части могут в определённых приближениях описываться как однородные**, будучи одновременно сильно неоднородными в других приближениях. Приведённые примеры хорошо иллюстрируют тот факт, что критическим свойством приближения, от которого зависит, будет ли описание говорить об однородности или неоднородности рассматриваемой субстанции, является **выбор размеров тех частей мира, которым в описании ставятся в соответствие точки** (в случае строгого математического языка) или которые представляются нам сливающимися (на бытовом языке).

С точки зрения опыта вопрос однородности или неоднородности той или иной части мира жёстко связан с выбором шкалы, единицы измерения, меньше которой всё полагается уже не имеющим размеров.

Кроме того, связав однородность с принятым приближением, т.е. фактически несколько изменив само понятие однородности, мы можем пойти дальше и говорить о “частичной однородности” как об однородности только по одному свойству точки, или по неполному набору её свойств. Тому набору свойств, который одинаков, сохраняется при переходе от точки к точке. Но должно быть ясно, что такого рода расширения должны чётко оговариваться. **“Частичная однородность” не означает полноценную однородность данной области пространства.**

Изотропность.

Это тоже одинаковость. Но не всех свойств всех точек области пространства. Выделяется один набор свойств, присущих какой-либо точке — рассматриваются **направления** из этой точки, т.е. **связи этой конкретной точки со всеми соседними**. Достаточно ясно, что если говорить об однородности можно и применительно к дискретным пространствам (множествам не связанных точек), то изотропность подразумевает наличие связей между точками (элементами) пространства. А значит речь идёт о непрерывных пространствах, континуумах. **Изотропность в данной точке подразумевает, что связи со всеми без исключения соседними точками (разные направления из данной точки) совершенно одинаковы.**

Отметим слова “изотропность в данной точке”. Их наличие означает, что понятие изотропности, вообще говоря, применяется к отдельным точкам области пространства. Когда говорят об изотропности всего пространства или какой-то его области, то подразумевают выполнение данного условия для всех точек пространства или его области. А это требует также и однородности пространства или области, хотя бы частичной, по крайней мере по этому свойству.

В то же время, если пространство является однородным, то, в случае его непрерывности, оно автоматически является и изотропным, так как в определении однородности мы говорим о совпадении всех без исключения свойств точек.

Следует добавить, что понятие изотропности в точке также позволяет говорить об “ограниченной” изотропности, исключая из рассмотрения некоторые направления. Например, направления в точке, расположенной на сферической поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве все одинаковы в смысле пространства трёх измерений, если принадлежность данной точки именно сфере не существенна. И остаётся изотропность только двумерного пространства, если мы при этом строго следим именно за принадлежностью рассматриваемой точки выделенной сфере.

Теперь нам будет легко понять, является ли пространство-время однородным и изотропным. Если речь идёт о пространстве-времени как целом, едином объекте, т.е. об образе Вселенной, то ответ яснее ясного — конечно нет.

Вселенная содержит в себе все и всяческие объекты, её части, которые отличаются друг от друга, и пространство-время как образ, описание такой Вселенной неоднородно (а значит и не изотропно) по самому своему смыслу. **В однородной Вселенной некому (и нечему) было бы задаваться самим таким вопросом.** В ней все точки (её части) совершенно одинаковы и уже поэтому ничего собственно и нет. Однако, в неоднородной по большому счёту Вселенной не исключаются и какие-то подобласти, возможно однородные в абсолютном смысле, или в ограниченном — в определённом приближении.

Ещё более справедливо это в отношении изотропности. Наличие таких областей, частей мира а priori нельзя отрицать. Не изменится наш вывод и если мы выделим в пространстве-времени только пространство. Во первых, для всей Вселенной сразу этого просто нельзя сделать. Но и для отдельных её частей местные, локальные мгновенные сечения, которые с определённой натяжкой можно полагать пространством, отделённым от времени (местным пространством), это пространство как целое однородным быть не может. Всё по той же причине — в нём окажутся и сечения отличающихся друг от друга объектов, существующих в данной области пространства-времени.

Если же мы ведём речь о некоем гипотетическом математическом пространстве, в которое мы поместили этот образ Вселенной — а математика, как язык допускает и такой способ описания мира — то такое, вмещающее пространство, вполне можно выбрать однородным и изотропным.

Известно, что любое сложно организованное пространство конечного числа измерений можно рассматривать как подпространство в некотором евклидовом пространстве, но уже гораздо большего числа измерений. Это возможно. Но нужно ли? Ведь наша цель — это описание Мира доступными нам средствами, изнутри. Кто-нибудь имеет возможность посмотреть на Мир снаружи?

По ряду причин, вполне существенных (чаще всего в качестве одной из таких причин упоминается опыт, в котором рассматривается поведение поверхности воды в ведре, подвешенном на верёвке, и испытывающем крутильные колебания), в своё время И.Ньютон отвёл пространству и времени роли вместилищ. Арены, на которых происходят все физические явления, но сами эти арены их влиянию не подвержены. Заметим, что между двумя этими вместилищами имеется определённое неравноправие. Пространство подразумевается существующим во времени как единое целое. Можно также говорить об их совокупности как об едином вместилище.

Эти абсолютные пространство и время вполне уместно было полагать однородными (и изотропными). А можно было бы и не полагать. Вот только описание мира в таком вместилище стало бы куда как сложнее, чем то, которое развили Ньютон и другие учёные.

Но уже в то время, когда формировалось такое описание мира или физика, которую мы часто называем физикой Ньютона, некоторые учёные (и сам Ньютон в том числе!) ясно видели определённую зыбкость и противоречивость концепции вмещающего пространства. Чего стоила, например, необходимость учёта так называемых сил инерции при описании множества физических процессов. Силы эти, с одной стороны, весьма усложняли само описание, а с другой стороны создавали сложности в понимании самих основ описания — реальные они или фиктивные (устраняемые правильным выбором системы отсчёта)? Какая конкретно система отсчёта самая “правильная”?

Усложнение описания мира, вытолкнутое из парадных ворот теории, вернулось через заднюю калитку и смеётся над дворцом.

Ещё хуже ситуация стала после создания Эйнштейном Общей Теории Относительности. Одна из настоящих, “правильных” сил, да ещё как раз та, описание которой столь тесно связано с именем Ньютона, сила тяготения, оказалась чуть ли не в точности инерциальной, уничтожимой выбором системы отсчёта. Почти везде, за исключением тех мест, где находятся сами тяготеющие, массивные тела. Ну, в таких местах и теория Ньютона пасовала, приписывая там силе тяготения бесконечное значение.

Мало этого, и свойства точек пространства-времени, всё ещё вмещающего эти массивные тела, да и не только массивные (в смысле наличия именно массы покоя), оказались зависящими от расположения этих тел. А тензор энергии-импульса, описывающий наличие чего-то действительно физического в образе мира, созданном Эйнштейном, является для пространства-времени ОТО абсолютно чужеродным. Ситуация, прямо скажем, мало удовлетворительная для хорошей теории. В этом смысле теория Ньютона более последовательна. Пространство и время являются ареной для физики, их свойства чётко постулированы и от физических явлений не зависят. Точка. Всё остальное — предмет физики. Физики, рассуждающей о различных предметах, силах, процессах, и так далее. Обнаружили что-то новое? Ну и хорошо. На общую картину мира это влияет мало. Добавим новую силу к набору уже известных, новое состояние вещества или что-то ещё в этом роде.

Теперь же ситуация половинчатая. Вмещающее пространство-время, с одной стороны, изменяет свои свойства в зависимости от физических тел или процессов, существующих или происходящих в тех или иных его областях. Происходит это в результате связи тензора кривизны пространства-времени с тензо-

ром энергии-импульса материи (связь эта записана уравнениями Гильберта-Эйнштейна). С другой стороны, само пространство-время также частично указывает физическим телам, каким образом им двигаться, т.е. существовать, какие области в этом пространстве-времени занимать. Это **постулируется** с помощью утверждения, что линии существования точечных массивных тел (при условии отсутствия у них электромагнитных свойств) являются геодезическими линиями пространства-времени. А вот для заряженных массивных частиц это уже не так.

Неудовлетворительность такой картины мира очевидна. Тут уж или всё, или ничего (как в картине мира Ньютона). Именно поэтому Эйнштейн провёл большую часть своей жизни в поисках формулировки единой теории поля, делающей и обширнейший круг электромагнитных явлений зависящим от геометрии пространства-времени, а не только определяющим эту геометрию. Не будем дальше следовать в этом направлении, это увело бы нас слишком далеко от рассматриваемых вопросов однородности и изотропности.

В образе мира Эйнштейна свойства пространства-времени, в том числе однородность и изотропность, целиком и полностью определяются свойствами тензора энергии-импульса, величины физической, внешней для геометрии. Если этот тензор однороден (или изотропен), то можно рассчитывать на повторение соответствующих свойств и в геометрических структурах (хотя и не обязательно). А если нет, то **гарантировано**, что и само пространство-время однородным (или изотропным) не будет.

Последнее верно строго, т.к. хотя бы одна геометрическая структура, одна из свёрток тензора кривизны, тензор Риччи не будет одинаковой для всех точек пространства-времени.

Вполне очевидно, что из-за существования сравнительно компактных массивных объектов — планет, звёзд, галактик — говорить об однородности тензора энергии-импульса не приходится.

Тем не менее это отнюдь не мешает огромному числу учёных полагать распределение материи во Вселенной однородным. Заметьте, не в пределах звёздной системы или галактики — уж слишком это абсурдно. А именно во Вселенной.

Дескать галактики распределены более-менее равномерно в объёме Вселенной и при описании Вселенной с помощью уравнений ОТО всё это вещество можно полагать равномерно размазанным по точкам пространства-времени.

Давайте вспомним мои замечания о возможности полагать физическую субстанцию, являющуюся сугубо неоднородной на одной шкале размеров, вполне однородной на другой шкале. Вероятно, это как раз тот самый случай? И всё в таких рассуждениях согласовано? Существует приближение в котором вселенная (как некое пространственное сечение Вселенной) однородна?

А вот и нет. Беда именно в том, что все такие рассуждения должны применяться не к Вселенной (смотрите следующий

параграф) как целому, а к вселенной как пространственным сечениям полного пространства-времени в определённые моменты времени. Если такого рода сечения неплохо определены для достаточно малых областей, частей пространства-времени (для которых легко определить и само общее для области время), то уже для больших областей это весьма затруднительно. А уж для Вселенной и вовсе невозможно. Малость здесь определяется соотношением между пространственными размерами рассматриваемой области и длительностью, которая в выбираемом приближении полагается равной нулю. В сечение ведь необходимо включать только те точки пространства-времени, которым соответствуют одни и те же моменты времени, хотя бы приблизительно.

А усреднение является процедурой физической и все аргументы, которые Эйнштейн использовал при формулировке Специальной Теории Относительности, применимы к этой процедуре полностью. **Усреднять можно только по областям с пространственными размерами малыми по сравнению с длительностью этой процедуры усреднения.** В том смысле, что время прохождения сигнала между самыми дальними точками области усреднения должно быть фактически нулём на выбранной шкале времени.

Скажем так, если для нас секунда является малым промежутком времени, то мы имеем право усреднять субстанцию (или тензор энергии-импульса) в областях малых по сравнению с сантиметрами. Здесь с это, очевидно, скорость света, и области размерами много меньше 300000 километров можно усреднять.

Вполне ясно, что обычные наши представления о сравнительно однородных субстанциях, доступных нашему непосредственному опыту, весьма хорошо, с большим запасом, подчиняются этому условию.

А вот на астрономических масштабах, начиная с галактик и далее, делать пространственные сечения, да и вообще, применять уравнения Эйнштейна-Гильберта (дифференциальные уравнения, **записанные для бесконечно малой окрестности точки!**) нужно весьма и весьма осмотрительно.

А уж к самой Вселенной их применять просто нельзя. И горе тому, кто этого не понимает...

Моя точка зрения состоит в том, что, поскольку для описания всех соотношений в нашем мире достаточно пространства-времени четырёх измерений, то и вводить какое-то вмещающее пространство не требуется. Ключевое слово здесь вмещающее. Может быть, иногда его введение будет кому-то и полезно, поможет что-то понять легче, почему нет? Но *всё, что с его помощью может быть понято о строении мира, по-необходимости должно быть выражено в терминах объектов и связей между ними, точек и свойств этих точек, строго принадлежащих миру, как пространству четырёх измерений.* Ведь вмещающее пространство с точки зрения опыта не более чем фикция. И в

любом случае, когда мы говорим о пространстве-времени как о пространстве четырёх измерений, то мы говорим не об этом гипотетическом вмещающем пространстве. **Мы чётко знаем, что точки этого, четырёхмерного пространства не одинаковы.** А значит пространство это неоднородно (и не изотропно).

Кто в этом сомневается, пусть попробует съесть камень вместо хлеба, или выйти из комнаты не через дверь, а через стену...

Всё это на шкале измерений, близкой к нашим размерам. При переходе к меньшим размерам, даже те субстанции, что представлялись нам однородными, становятся всё больше и больше неоднородными.

Если же мы обратимся взглядом к астрономическим размерам, то и там то же самое. Звёздные системы сугубо неоднородны — массивные объекты, звёзды и планеты, очень малы в сравнении с расстояниями между ними. Они разделены огромными областями практически пустого космоса. Галактики тоже.

Да, само “пустое” космическое пространство, разделяющее звёзды, можно приближённо полагать однородным. Но энергии-импульса в нём размазано очень мало по сравнению со звёздами. И не случайно самыми близкими к однородным являются именно области наиболее бедные материей, массивными объектами. Пустота максимально однородна для нас. А там, где есть что-то, там нет в природе однородности. Только иногда, как приближение, да и то, как правило, первое приближение, можно использовать такое представление о некоторых областях пространства-времени.

Да, когда говорят об однородности вселенной, то говорят об областях даже не галактик, а много больших по размерам, чем галактики.

Таких больших ячеек, в которых полагают число галактик примерно одинаковым в каждой, выделяют во всей видимой вселенной около тысячи. При том, что для всей этой тысячи ячеек общее время определить просто не представляется возможным, рассматривать такое пространство как удовлетворительное сечение пространства-времени, на мой взгляд совершенно не допустимо. А уж описывать такую вселенную (всего лишь тысяча точек, ну как они могут образовать континуум, даже и приблизительно?) с помощью дифференциальных уравнений и вовсе смешно. А ведь делают это и не задумываются. Уравнения написали Гильберт и Эйнштейн, значит можно применять...

С изотропностью несколько сложнее. Поскольку массивная материя во Вселенной имеет явную тенденцию группироваться на разных шкалах измерения в достаточно компактные объекты, а окружающее эти объекты пустое пространство на этих шкалах можно как раз рассматривать приближённо однородным (планета или звезда в космосе, атом в газе), то в приближении точности этих компактных объектов на таких шкалах мы обнаруживаем хорошее приближение к изотропности трёхмерных

направлений именно в точках, ассоциированных с массивными объектами.

Эта изотропность в определённой степени нарушается при включении в поле зрения (в шкалу приближения) соседних таких компактных массивных объектов. И так происходит на всех подобных уровнях приближений.

Что в газах (жидкостях, твёрдых телах), что в звёздных системах.

Теперь перейдём к вопросу о связи однородности и изотропности с законами сохранения. Скажу сразу, определённая связь есть, но отнюдь не такая глобальная, ни в коей мере не требующая для существования законов сохранения глобальной однородности и изотропности пространства-времени.

Что такое “сохранение” чего-то? Это слово означает одинаковость этого самого чего-то в разных точках пространства-времени. Весьма близко к понятию однородности пространства-времени. Только вот понятие “сохранение” не требует одинаковости **во всех** точках пространства-времени **ни всех величин, характеризующих точку, ни даже какой-то одной из полного набора величин.**

Как раз наоборот, сохранение чего-то обычно чётко ассоциируется с чем-то **хорошо выделенным из остального мира.**

Обычно с однородностью связывают сохранение энергии-импульса, а с изотропностью сохранение момента импульса. Причём сохранение этих величин имеет место во времени, в процессе существования объекта мира, который характеризуется ими.

Что такое существование объекта? Подразумевается, что во все моменты времени в течение существования объекта определённые характеристики, по которым этот объект и выделен из внешнего мира, остаются тождественными сами себе, т.е. одинаковыми, сохраняющимися. Это не обязательно все характеристики объекта. Допустимо, что какая-то часть его характеристик может меняться.

Но есть основные, неизменные, которые и определяют объект как таковой. Если объект изображается точкой в пространстве, то его существование в пространстве-времени по-необходимости изображается линией. И единственной геометрической характеристикой такого точечного объекта, связанной с его существованием (линией) оказывается касательный вектор. Точнее, два сопряжённых вектора — контравариантный касательный вектор и ковариантный градиент скалярного параметра (действия). Изменение действия как счётчик событий в его истории описывает существование объекта и, по определению, пропорционально его собственному времени.

Мы уже рассмотрели изменение этих векторов вдоль линии существования массивной частицы в §3.10. И получили закон сохранения энергии-импульса. Без каких-либо упоминаний об однородности всего пространства-времени.

Да, это означает определённую однородность точек этой линии. Линии существования, а не всего пространства-времени. На самом деле это утверждение верно только в классическом приближении, когда каждая точка существования объекта является событием. В квантовом приближении, когда в истории объекта можно указать только цепочку дискретных событий, только сами эти события являются одинаковыми. В квантовом приближении имеет место однородность только дискретного множества событий (точек) на траектории объекта. Но и в классическом, и в квантовом приближениях однородность эта “частичная”, отнюдь не влекущая за собой однородность всего пространства-времени или хотя бы некоторой его области.

Линия существования областью в точном смысле не является, т.к. имеет размерность ($= 1$) меньшую, чем размерность пространства-времени ($= 4$).

Вполне очевидно, что говорить об изотропности линии существования объекта не приходится. Одно направление вдоль линии, направление времени, определяющее и определяющееся порядком событий в их причинно-следственной последовательности на траектории объекта является выделенным.

Но можно говорить об изотропности, одинаковости всех направлений в малой трёхмерной пространственной области пространственного сечения, окружающей каждую точку существования объекта. Это связано напрямую с тем, что объект в нашем приближении изображается именно изолированной точкой в пространстве. А для точки в пространстве, вокруг которой хотя бы в малой области ничего нет, все направления равноправны. Именно это свойство позволяет говорить о “группе” систем покоя, связанных с данной массивной частицей. И, в более широком смысле, как мы это видели, позволяет определить “группы” локально инерциальных систем отсчёта. Да и саму возможность говорить о “пространстве”, как о чём-то дополнительном к понятию времени, тоже.

Направления в пространстве станут неравноправны, если в рассмотрение будут приняты другие объекты, находящиеся достаточно близко от данного.

При этом говорить об общей изотропности точек пространства тоже не приходится. По выше названной причине, и ещё потому, что для точек из малой пространственной области вокруг объекта направление на сам объект явно отличается от всех других направлений.

Если же мы ограничиваемся малой пространственной областью, не содержащей других объектов, то **каждая точка существования объекта** (для каждого момента его существования) будет обладать свойством изотропности в трёх пространственных измерениях. На языке физики это свойство означает сохранение момента импульса точечного изолированного объекта.

Посмотрим теперь, связаны ли понятия однородности и изо-

тропности с преобразованиями координат. На преобразования координат существует два взгляда — пассивные и активные преобразования.

Под пассивными преобразованиями (а по сути дела, только такие преобразования я обычно называю преобразованиями координат) понимается весьма простая вещь. Я уже так много слов посвятил этому вопросу, но повторяюсь ещё раз.

Пусть имеется область, в которой множество разных наблюдателей приписали каждой точке уникальные координаты, каждый по своему. Тогда для каждой точки можно найти коэффициенты пересчёта от каких-то одних координат ко всем остальным. Эти коэффициенты представляют собой $n \times n$ матрицу, с отличным от нуля определителем. Здесь n обозначает число измерений пространства-времени, в нашем случае 4. Сами координаты точки $\{x^i\}$ являются набором n чисел. Одним из простейших преобразований координат является изменение начала отсчёта, положения точки в пространстве, которой приписаны все значения координат, равные нулю. Это преобразование описывается не полной матрицей, а столбцом величин, на которые сдвигается начало отсчёта по каждой из координат. Помимо координат, в любой точке могут быть определены (если мы говорим о физике, то с помощью измерений; в математике их просто приписывают точке) разные наборы чисел. Количество чисел в каждом конкретном наборе должно быть одинаковым в разных координатах, а вот значения, в общем случае, меняются при переходе от одних координат к другим, преобразуются. Но, тем не менее, в каждой системе координат эти наборы чисел имеют вполне определённые значения (в общем случае отличающиеся для разных наблюдателей).

В зависимости от закона преобразования эти наборы, геометрические объекты, имеют названия, такие, как скаляры, векторы и так далее.

Вполне очевидно, что все свойства точки, значения наборов чисел в ней (кроме самих координат) никак не зависят от выбора начала отсчёта координат (да и от любого выбора координат тоже). Т.е. свойства точек от конкретных значений координат вроде как не зависят.

Вот тут очень легко смешать две совершенно разные вещи. Свойства точек зависят от конкретных значений координат при условии, что выбрана конкретная привязка координат к этим точкам. Изменение координат в этом случае эквивалентно переходу к другой точке.

Когда координаты изменяются при преобразованиях это совсем другой случай, чем тот, когда координаты изменяются при переходе от точки к точке.

А это так легко забыть... Особенно с учётом того, что очень во многих курсах математики внимание акцентируется на активных преобразованиях координат, когда сама система координат

не изменяется, а изменяется как раз рассматриваемая точка (в случае трансляций) или выбранное направление (в случае поворотов).

Активные преобразования как раз увязаны с понятиями однородности и изотропности и с соответствующими законами сохранения.

Но смешивать их с пассивными нельзя совершенно, хотя определённая связь между ними имеется. Эта связь оформлена в геометрическом понятии связности.

Связь эта заключается в том, что **вся группа возможных преобразований пассивных координат повторяется и в связности**. Те изменения в процедурах измерений, которые возможны в каждой отдельной точке, точно также возможны при смещении от точки к точке.

Но это вовсе не означает, что смещение от точки к точке эквивалентно переходу к иному способу приписывания точкам координат.

Таким образом, выяснить вопрос о наличии или отсутствии однородности можно только с помощью активных преобразований, т.е. смещений из точки в соседние, но отнюдь не с помощью пассивных преобразований, переходов к иным способам приписывания координат данной единственной точки.

4.3 Большой взрыв и Эволюция Вселенной

Что мы подразумеваем, когда говорим “Вселенная”? Что значат слова “Вселенная расширяется”? Был ли “Большой взрыв”? И если был, то что было “до него”?

Вселенная. Слова, слова... Как много разных слов мы произносим не задумываясь. И не только в обыденной жизни. Довольно часто и в физике некоторые, и даже очень многие, казалось бы хорошо определённые слова, используются неправильно и не к месту... И одно из этих слов – **Вселенная**. В результате приходится слышать так много утверждений, которые никогда бы не были сделаны, если бы люди всегда тщательно продумывали, что именно они произносят. И, может быть, и у широкой публики не возникали бы вопросы, не имеющие смысла. Но что уж пенять на широкую публику, если даже специалисты, которым сам бог велел, часто сами не понимают в точности, что именно они говорят. Особенно это заметно в обсуждениях такой популярной темы, как возникновение Вселенной в результате Большого взрыва.

Какой же смысл мы вкладываем в слово “Вселенная”? Ясно, что вариаций значения этого слова довольно много. Особенно в обыденной речи. И это нормально. “Всю-то я вселенную проехал...” Ну кого озаботит гипербола в этой строчке песни? Не об этом здесь речь. А вот применительно к физике, и в популярных физических теориях книгах или статьях, хотелось

бы видеть определённую, отсутствие неясностей в смысле этого слова. Пожалуй, никто со мной особенно не будет спорить о том, что базовая функция слова “Вселенная” в физике – **обозначение всего сущего, без изъятий**. Только понимают это многие весьма специфически. И причиной является то, каким образом формируется ещё в школе наше представление о пространстве и времени как о вместилищах, где существуем мы сами и окружающие нас вещи. Это представление автоматически расширяется с нашего маленького мирка на всё большее, окружающее этот мирок пространство, захватывает всё шире и прошлое его, и будущее. *Таким образом создаётся представление, модель существования в пространстве последовательно всё больших островков сущего – человека или предмета, города, страны, планеты Земля, Солнечной системы, Галактики, Метагалактики и... Вселенной.*

Здесь и находится ядро проблемы. Это представление становится барьером для правильного понимания и интерпретации как Большого взрыва как причины рождения Вселенной, так и особенности гораздо менее общей, черной дыры. Сейчас я сделаю одно “самоочевидное” утверждение и попытаюсь объяснить, почему оно не может быть правильным.

Утверждение:

Вселенная, как совокупность всех сущих вещей, занимающих все вместе некоторое пространство, существует во времени.

Здесь неверно абсолютно всё. Больше того, в такой форме это утверждение, даже если его применить так, чтобы стало хоть немного верным, всего лишь к некоторой небольшой, компактной части Вселенной, верно оно будет только приближённо.

Дело в том, что в такой форме совершенно игнорируется происхождение понятия времени, как последовательности событий. Это понятие, время, и способы его измерения средствами нам доступными, я обсуждал весьма тщательно. Но здесь смысл понятия времени является ключевым, критическим для понимания вопроса. Поэтому повторюсь вкратце.

Время – это всегда образ последовательности событий. События могут быть разные, поэтому и время для некоторой компактной, достаточно большой области мира можно определить по-разному. Поэтому времён для каждой такой выделенной части имеется много. Это может быть как время, определённое (измеренное!) как последовательность событий любой из меньших частей этой области (например, часы на руке, эталон времени в Москве, Лондоне или Париже), так и время, определённое как последовательность событий глобальных для всей области — для планеты Земля это могут быть сезоны (год) или некоторое усреднённое, эталонное время, распространённое на всю планету с помощью радио синхронизации. Таким образом, существование во времени для произвольной части мира — это в некотором смысле

тавтология, поскольку само время и определяется как существование. И ещё одно слово, важное здесь и сейчас, является почти тождественным этим двум понятиям, понятию времени и понятию существования. Это слово — **ЭВОЛЮЦИЯ**.

Эволюция часто понимается в довольно ограниченном смысле как **изменение** чего-то (предмета, живого существа, планеты, звезды) со временем в процессе существования. Но дело в том, что эволюция как таковая включает в себя и возможность “отсутствия эволюции”, **неизменность** предмета рассмотрения. А это значит, что все эти три понятия могут быть очень часто взаимозаменяемы, практически без ограничений. Только имеют свои, более менее определённые ниши.

Скажем, слово время употребительно тогда, когда речь идёт об измерении, числе событий (интервал времени). Или используется как метка части мира, координата (момент времени).

Существование — больше применимо к последовательности событий как некой целостности.

А слово эволюция применяется тогда, когда цепочка событий прослеживается именно как последовательность, от одного события к другому.

Из-за того, что времён много, возникает и утверждается идея именно существования во времени, во времени соседней части области и, что гораздо естественнее, во времени, общем для всей области.

Наличие в рассматриваемой области более мелких частей, её составляющих создаёт также и идею пространства, этой областью занимаемого.

Здесь же возникает и идея существования в пространстве, примером реализации которой служит существование любой, более мелкой части в пространстве, ассоциируемом с пространством всей области.

Поскольку в мире естественным образом выделяется последовательность, матрёшка всё больших и больших областей, содержащих предыдущие как малые части — человек или камень, город, страна, планета, галактика (и промежутки времени, соответствующие этим частям как событиям тоже растут) — то формируется также идея неких общих, содержащих всё это, всеобъемлющих, пространства и времени. Делается предельный переход от конечной такой последовательности, которая вполне реальна, к гораздо менее обоснованному представлению о бесконечных пространстве и времени, которые будут содержать в себе всё сущее, как бы мы не расширяли свой кругозор. Вместо понятий о времени и пространстве как способах описания отношений между событиями, возникает представление о них как о независимых от чего бы то либо “субстанциях”.

Хочу подчеркнуть, что в появлении идеи вмещающих всё и вся пространства и времени нет абсолютно ничего плохого. Наоборот, сама по себе идея вмещающих пространств весьма пло-

дотворна и очень полезна при изучении свойств пространств, в них помещённых. Такое помещение иногда делает наглядными те свойства пространств, которые с внутренней точки зрения могут быть описаны только формально, с помощью тех или иных математических (физических) соотношений. Принципиально такая возможность гарантирована математикой. Для любого, сколь угодно экзотического математического пространства, можно найти некоторое его вмещающее **евклидово** пространство. Правда число измерений такого вмещающего пространства будет заведомо велико, часто намного больше числа измерений того пространства, которое нужно вместить.

Я как раз собираюсь проиллюстрировать многие свои замечания именно таким образом, помещая **модель** Вселенной в привычное читателю трёхмерное пространство, делая таким образом доступными прямому взгляду **извне** некоторые свойства Вселенной, которые трудно понять **изнутри**. Важно только понимать, что просто потому, что мы сами являемся частями Вселенной, реально такой взгляд “со стороны” на Вселенную нам не доступен. Но посмотреть со стороны на модели Вселенной мы вполне можем. Если будем помнить, что это всего лишь модели, не соответствующие оригиналу в точности, и даже весьма не соответствующие.

Вернёмся теперь к утверждению, приведённому в начале этого параграфа. Сделаем сначала акцент на словах “Вселенная как совокупность всех вещей существует во времени”.

Вспомним, что есть время? Время есть последовательность событий. Но сама Вселенная — это **ВСЕ** события, без какого-либо исключения. В каком же таком времени может существовать Вселенная? Где они, те события, что задают шкалу времени для **ВСЕЙ** Вселенной? И что они такое? Они не часть Вселенной? А чего тогда они часть? Вот эти простые вопросы имеют только один разумный ответ — **представление о времени для Вселенной как целого не имеет смысла**. *Время имеет смысл для частей Вселенной, но не для целого.*

И то же самое нужно сказать и о пространстве. **Вселенная как целое может мыслиться только как пространство-время, единый объект, но не как нечто в пространстве и времени**. Так что утверждение в начале этого параграфа, чтобы иметь смысл, может и должно быть переформулировано только так: “**Вселенная существует, как совокупность всех вещей, образующих единое целое — пространство-время**”. Причём “существует” в смысле “имеется” а не “длится”, и не более того.

Вот и задумайтесь теперь, имеют ли какой-либо смысл утверждения:

“Вселенная расширяется”, “Вселенная возникла в результате Большого Взрыва” или вопрос “А что было до Большого Взрыва, если время началось в момент этого взрыва?”

По отношению к Вселенной делать такие утверждения просто бессмысленно...

Вы спросите, да как же так?! Неужели всё врут физики, они же говорят Вселенная расширяется, а доказывают это такие опытные факты как **красное смещение, реликтовое излучение** и что-то там ещё?

Успокойтесь. Не собираюсь я опровергать все эти и другие опытные факты. Единственное, за что ратую, чтобы физики и популяризаторы науки не вводили читателя в заблуждение неправильно используемыми словами. Да и себя тоже. Потому как есть у меня большое такое подозрение, что очень уж часто те, кто пишут на эти темы сами плохо понимают, что же они пишут...

“Расширение” есть, да только не Вселенной, хотя правильнее было бы называть это явление не расширением. Может быть. Но ведь назвали уже. Красное смещение есть, но вот интерпретировать его можно многими способами. Большой Взрыв, как некая особая область (и даже точка!) во Вселенной мог бы быть, а мог бы и не быть. И так далее.

Мы можем изобразить из себя господа бога и поизучать возможные свойства Вселенной, как некоего цельного объекта, математической конструкции, пространства-времени. Насколько воображения хватит. Вдруг да и станет понятнее, что именно расширяется, и о чём это может говорить? Этим я сейчас и займусь.

А для иллюстрации таких возможных свойств буду использовать модель, помещенную в трёхмерное евклидово пространство. Ясно, что любые такие модели не будут точными. И моя тоже. Но всё-таки надеюсь на её полезность именно как иллюстрации.

Чтобы вписаться в трёхмерное пространство мои модели должны быть максимум двумерными, т.е. поверхностями. При двух измерениях, одно обязательно **должно** изображать время как основу описания (причинно-следственные цепочки событий) и для изображения пространства остаётся только одно измерение. В этих моделях разницы между временной и пространственной координатами вы конечно не увидите, хотя она, вообще говоря, существенна.

Всем знаком один более-менее замкнутый мир, который может служить вполне неплохой моделью Вселенной, если немного напрячь воображение. Речь идёт о нашей планете, точнее её поверхности. Вот двумерное изображение Земного шара (Рис 4.1), как он видится извне. Наше воображение уже достаточно привычно к тому, чтобы ассоциировать такое двумерное изображение со сферой в трёхмерном пространстве. Изображения трёхмерных предметов на плоскости давно стали обыденностью, уж об этом-то в наше время хорошо позаботились кино и телевидение. Уверен, что большинство видело эту сферу извне по крайней мере в качестве школьного пособия – глобуса. Для краткости ни-

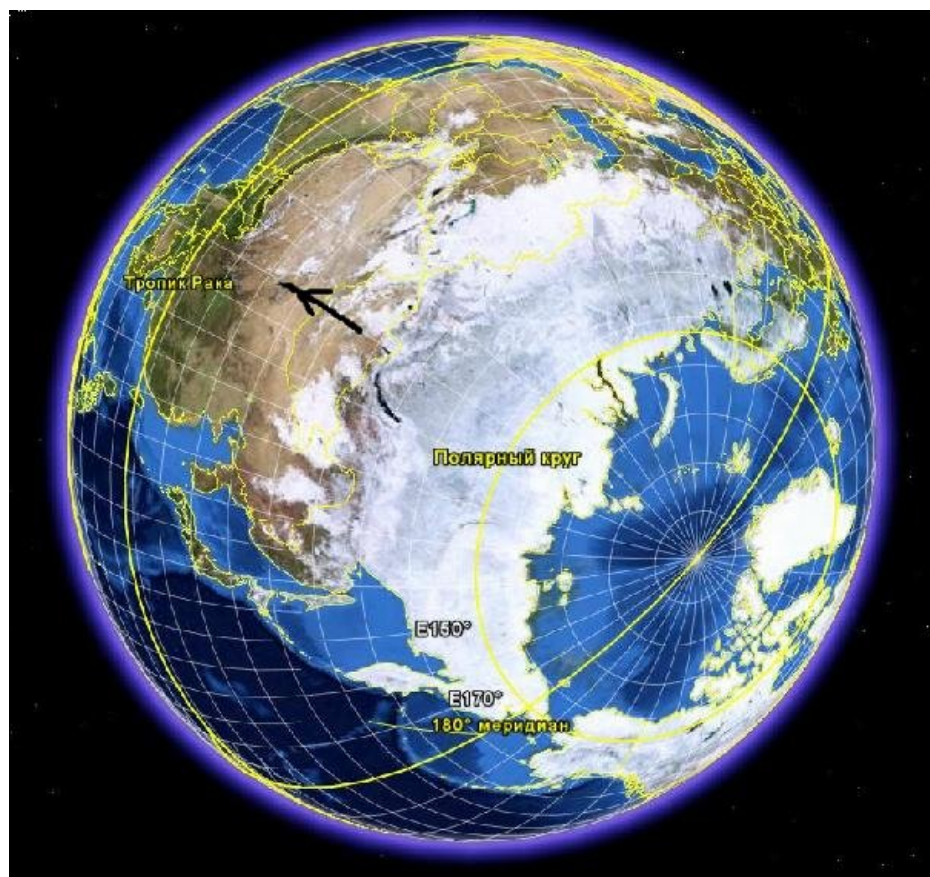


Рис. 4.1: **Глобус**: Двумерная модель Вселенной, её двумерное изображение в трёхмерном пространстве.

же я буду называть эту свою модель Вселенной, изображение её сферической поверхности, Глобусом.

И на плоском изображении Земли (картах), и на земном глобусе, помимо контуров материков и островов, которые являются неотъемлемыми частями земной поверхности (собственно они и являются самой земной поверхностью), как правило, наносятся специальные линии – параллели и меридианы. Эти линии помогают ориентироваться на поверхности сферы. Это линии координатной сетки. Вот и на своём Глобусе я тоже хочу иметь координатную сетку. Но если на земном глобусе и вдоль параллелей, и вдоль меридианов измеряются длины, расстояния, то на моём Глобусе мне нужны координаты двух принципиально разных сортов. Мне нужны линии времени и линии пространства. Кроме того, пространство моей вселенной, Глобуса, будет одномерным, в отличие от пространства нашей Вселенной.

Будучи для Глобуса внешним наблюдателем, я могу наложить на него координатную сетку совершенно произвольно. Сделаю это точно также, как делают географы для земного глобуса.

При этом буду считать меридианы всегда линиями времени, а параллели тогда будут давать мне мгновенные пространственные сечения моей Вселенной, которые естественно рассматривать как **мгновенное состояние пространства, как целого**.

Заметьте. “Пространство” в моей модели есть не более, но и не менее как сделанное определённым образом сечение пространства-времени, а не нечто существующее само по себе. А именно, сечение это делается ортогонально к линии времени в любой данной точке.

А можно было бы делать сечение иначе. Но я хочу так. Поскольку Глобус является сферой, то накрыть его всюду одной единственной ортогональной координатной сеткой линий “время-пространство” невозможно. Если всё же хотеть именно единственную сетку координат, то *в ней неизбежно должны быть две особые точки, полюса*, где все временные линии пересекаются, а пространство как таковое *сжимается в точку*, т.е. фактически *исчезает*.

Мне и вам, как наблюдателям внешним, вполне очевидно, что полюса эти ничем особенным в Глобусе не являются. Это не более чем издержки нашего способа наносить координатную сетку на сферу. Полюса – особые точки описания, а не Глобуса, как такового. Точно также, как это верно для земной поверхности. Да, на Земном глобусе полюса координатной сетки помещаются в две действительно особенных точки земного шара, которые выделены на его поверхности воображаемым прохождением через неё воображаемой земной оси. Ось-то воображаемая, но вращение Земли как целого имеет место. Так что некоторая особенность настоящая, физическая а не координатная, в Земных полюсах, Северном и Южном, несомненно есть. Кроме того, эти точки очень далеки от мест обитаемых. Поэтому, помещать туда полюса сетки наших географических координат удобно. Но не обязательно.

На земном глобусе все географы наносят сетку параллелей и меридианов всегда одинаково именно потому, что полюса все помещают в одни и те же места. На моём Глобусе изначально таких особых мест нет, поэтому легко представить множество таких сеток, с полюсами в произвольных местах сферического Глобуса.

Посмотрим теперь, **как выглядят время и пространство для наблюдателя из моего Глобуса**. Пусть это будет весьма продвинутый господин (или госпожа), **который оказался способен собрать полную информацию о пространстве Глобуса в своём прошлом**.

Не только в том прошлом, где он сам существовал. Но и во всей той области его Вселенной, нашего Глобуса, которая в его шкале времени была до него. Уж как он это сумел сделать, спрашивать не будем. Мы извне и так всё сразу видим.

Господин этот тоже описывает свои время и пространство, как он их видит изнутри, с помощью координатной сетки, в которой в каждой её точке линия пространства ортогональна линии времени. Нетрудно понять, что сетка координат, им построенная, и есть в точности та сетка координат, которую мы наложили извне на Глобус. Точнее, одна из множества таких однотипных сеток меридианов и параллелей. И значит, всё, что наш господин может сказать о своей Вселенной, будет нам видно сразу, мы говорим с ним на одном языке. Время существования этого господина, естественно, является частью некоторого меридиана Глобуса. Я его пометил кусочком чёрной линии где-то в районе Памира. Направление времени, в будущее, указано стрелочкой. Соответственно, прошлое этого господина отслеживается по меридиану в направлении Северного полюса. А “пространства” в его прошлом это не что иное, как все параллели, расположенные в этом направлении.

Легко видеть, что каждая параллель, представляющая собой окружность ортогональную к меридиану (линии времени), при отступлении в прошлое имеет всё меньшую длину.

Пространство нашего господина в его шкале и направлении времени расширяется!

А вот теперь вспомним, что нам свойственно отождествлять окружающее нас пространство со Вселенной. Я уже сказал, что это неправильно, но ведь делаем же мы это. Для отличия этой “неправильной вселенной” от правильной Вселенной, я буду писать её с маленькой буквы. Вот и господин наш тоже отождествляет своё пространство со вселенной.

И кричит: **“О! Моя вселенная расширяется!!!!”**

И это действительно так. Таким образом определённое пространство, его вселенная, расширяется с течением его времени. А вся его настоящая Вселенная, наш Глобус? Будучи вне Глобуса, не связанные с рамками времени и пространства этого господина, мы ясно видим, что говорить о расширении Глобуса в его терминах не имеет никакого смысла. Его терминология неудачна. Для него Глобус, его Вселенная, просто существует, все времена и пространства вместе, как единое пространство-время. Для этой модели двумерное. Ну а в нашем случае четырёхмерное.

Обращу ваше внимание на ещё один важнейший факт. Место на глобусе для моего продвинутого исследователя я выбрал произвольно. Нарисуйте на глобусе сами стрелочку для другого такого господина в любом месте и направлении, привяжите к ней новую, его собственную сетку меридианов и параллелей и всё будет выглядеть точно также.

Так что **любой наблюдатель Глобуса придёт к одинаковым выводам.**

Хорошо, скажете вы, теперь нам понятно, что имеется на самом деле ввиду, когда мы слышим или читаем, “вселенная расширяется”.

Правда, вам понятно? И что же это за свойство Вселенной, которое так себя проявляет? Догадались? Да, это **кривизна**.

Именно наличие у тех огромных областей пространства-времени (пространства-времени как единого объекта, а не у пространства или времени как отдельных его сечений), которые нам доступны для наблюдения, и чаще всего и называются вселенной (пусть так, но с маленькой буквы!), некоторой общей средней положительной (т.е. сферического типа) кривизны и проявляется для нас как расширение нашего пространства с течением нашего времени.

Ну вот, надеюсь с пониманием того, что может лежать за словами “вселенная расширяется” мы немного разобрались.

А теперь на очереди Большой Взрыв. Логика, согласно которой строятся все теории Большого Взрыва, обескураживающе проста. Вселенная расширяется? Да, опытные факты говорят именно это. Материя — вещество и излучение вместе — как известно, сохраняется. Сколько материи есть сейчас, столько её и было в прошлом.

Что из этого следует? Что раньше, в пространстве меньшем чем сейчас, материя была более плотной, просто потому, что занимала меньшее пространство.

Смотрим на Глобус. Когда наш господин смотрит в своё прошлое вплоть до момента времени, попадающего на его меридиане на северный полюс, что он обнаруживает?

Ой!!! Пространство сжалось в точку!!! Времени тоже уже нет!!! Большой Взрыв!!!

Или наоборот. Вселенная родилась в результате Большого Взрыва, время пошло, пространство появилось и стало расширяться... Такой вывод может сделать наш наблюдатель в Глобусе.

А вы читатель, наблюдающий Глобус извне? Какой вывод сделаете вы? Конечно, что всё это фикция, результат экстраполяции представлений нашего господина о строении его Вселенной со своей малой окрестности туда, где они уже не имеют места. Усугублённый неточной терминологией к тому же. Вы же точно знаете, что в Глобусе северный полюс абсолютно ничем не отличается от любой другой точки сферы. Всё дело в координатной сетке, которая имеет особенность.

Подчеркиваю, особенность есть, но в способе описания Вселенной Глобуса, а не в структуре его. И со временем, и с пространством в этой области Глобуса, как и в любой другой, равным счётом ничего не происходит. Локально можно определить и хорошее время, и хорошее пространство. Просто те координаты, которые использует наш господин, хорошие в его области, нельзя экстраполировать безнаказанно на любой из полюсов.

Почему? Да потому, что пространство-время Глобуса кривое.

Кстати, из-за отсутствия настоящей особенности в Глобусе, вопрос “что было до момента Большого Взрыва?” может казаться

вполне осмысленным. Ведь меридиан-то проходит через полюс без проблем.

Вот только беда, самого Большого Взрыва в нашей модели просто нет.

Большого Взрыва нет в нашей модели. Можно ли придумать модель Вселенной, в которой есть особенность, которую можно назвать Большим Взрывом?

Пожалуйста — поверхность конуса. Его вершина моделирует Большой Взрыв. И даже некоторое подобие расширяющегося пространства имеется. Но такая модель всё-таки гораздо хуже согласуется с теми экспериментальными данными, из которых физики извлекли представления о расширении нашей вселенной, чем модель сферическая.

Дело в том, что направления на конусе явно не равноправны, тогда как в нашей Вселенной они представляются равноправными, что больше всего похоже на то, как это имеет место на сфере.

По сути дела, практически все экспериментальные данные говорят нам, что средняя кривизна пространства-времени нашей Вселенной для всех доступных нашему наблюдению областей соответствует кривизне типа сферической. Мы не знаем, насколько она меняется от места к месту, но тип свой не меняет.

А это говорит о том, что наблюдаемая нами часть Вселенной имеет тенденцию к тому, чтобы целое было замкнутым. Вот такой вот вывод можно сделать из наблюдаемого явления “расширения пространства”.

А теперь ещё раз по поводу Большого взрыва. Нам хорошо известно, что события, образующие ткань Вселенной, которые мы называем материей, рассматривая их как связанные цепочки, заполняют Вселенную, по крайней мере, известную нам её часть отнюдь не равномерно. Где густо, а где и пусто. Причём есть места, где ой как густо — звёзды, ядра галактик, например. Поэтому я и говорю о средней кривизне пространства-времени. И если поставить вопрос так — “а нет ли во Вселенной такой области, где действительно при приближении к некоторой её точке плотность материи устремляется в бесконечность?”, то в такой форме вопрос о реальности Большого Взрыва становится вполне осмысленным. И поиски таких областей во Вселенной, которые мы, по необходимости, можем вести только в прошлом, становятся тоже осмысленными. С соблюдением правильной терминологии, конечно. К обсуждению такой возможности я вернусь чуть ниже.

Надо заметить, что помимо Большого Взрыва, этот вопрос накрывает также и еще одно модное порождение не критического использования результатов Общей Теории Относительности. Я говорю о чёрных дырах. Там тоже время исчезает, пространство объекта (слава богу, не всей Вселенной) сжимается в точку, а плотность материи устремляется в бесконечность. Правда ведь, что и в случае чёрных дыр в их окрестности всё очень похоже

на то, что мы только что рассмотрели выше? Один к одному.

Я не собираюсь ставить под сомнение возможность существования областей во Вселенной, где плотность материи может достигать огромных величин. Такие области заведомо есть. Упомянул уже звёзды, ядра галактик, еще могу добавить квазары. Но по моему мнению, наиболее вероятно, что во Вселенной в любой области плотность материи может достигать только конечных величин. Чуть ниже поясню, почему я так думаю.

Как я уже говорил, измыслить непрерывное пространство-время (Вселенную), имеющее особую точку, да даже и бесконечное их число не составляет никакой проблемы. Даже мой пример Глобуса можно модифицировать так, что в нём появится особая точка.

Возьмите Глобус за северный полюс, и вытяните его так, чтобы с этой стороны Глобус был уже не вполне приличной сферой, а одна её часть превращалась в острую пупочку, в подобие конуса с достаточно острой вершиной. Вот вам и почти всюду почти сферическая модель Вселенной, в которой есть настоящий Большой Взрыв.¹

Как вы понимаете, и в любой такой модели, вопросы, “что было до Большого Взрыва?”, “родилась ли Вселенная в результате Большого Взрыва?” тоже остаются неправильно поставленными. Потому что вопросы “до” и “после” применительно ко Вселенной смысла не имеют, независимо от её устройства.

Остановлюсь теперь на тех причинах, которые заставляют меня полагать, что в нашей Вселенной наличие особенности типа Большого Взрыва маловероятно. Для меня ткань, субстанция Вселенной, пространство-время не являетсяместилищем чего-либо. События, материя — поля и частицы — не находятся в пространстве-времени, а формируют его, являются его составными частями, в пределе — его точками. А при таком взгляде на вещи **всякое событие есть не что иное как особая точка в ткани Вселенной**. А те точки, где событий нет (ну, пусть нет и частиц) — обычные, неособые.

Так что, **если Большой Взрыв точка, то чем эта особая точка отличается от всех других особых, но таких обычных точек?**

Максимум, что можно сказать по этому поводу, что Большой Взрыв это не точка, а область таких точек, очень близко расположенных, сгущающихся **непрерывно** к одной точке, которую тогда и назовём Большим Взрывом.

¹Для любителей теорий Большого взрыва и расширяющейся “Вселенной”. Вот эта модификация модели, “сфера с пупочкой” вполне годится как иллюстрация модных представлений о выходе на стадию “инфляции” в расширяющейся “Вселенной”. А для тех, кого заботят утверждения, что расширение “Вселенной” ускоряется, могу сказать — модифицируйте сферическую модель так, как вам нужно — в воздушный шарик, например, вытянутый вдоль меридианов и более похожий на конус у горлышка и на сферу у макушки.

Если не непрерывно, то плотность в этой области будет конечной.

Непрерывно. И куда тогда деть достижения двадцатого века, квантовую теорию? Бог с ней, с теорией. Но результаты экспериментов, из которых эта теория выросла, нам говорят — **события отделимы одно от другого. Не бывает непрерывных цепочек событий.** Вот поэтому-то мне и представляются рассуждения о бесконечной плотности материи в одной точке, будь то Большой взрыв, или чёрная дыра, результатом экстраполяции классических представлений о непрерывности событий на область, где эти представления просто не имеют никакого смысла. В той же степени, как представление о Вселенной как всего лишь части ещё чего-то большего.

Является ли Вселенная замкнутой? Скорее всего да. Скорее всего, число элементарных событий в ней конечно. Чрезвычайно велико, но конечно. А в этом случае их обязательная всеобщая связность посредством отношений причина-следствие в единую, пусть очень запутанную, сеть неизбежна. И такая сеть будет замкнутой.

Что ещё можно добавить?

Ещё раз подчеркну. **Понятие “эволюция” нельзя применять к Вселенной.** Но для описания отдельных её частей это понятие жизненно важно. Только с его помощью мы можем описать своё существование в нашем Мире.

Ну и ещё одно. Никаких “других Вселенных”, никаких “мультиверсумов” — “всё сущее” — это “универсум”, единственная Вселенная. В фантастике — да пожалуйста. А вот к описанию Мира такие идеи не надо применять.

Литература

- [1] Корн Г., Корн Т., Справочник по математике, Москва, Наука, 1984
- [2] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, Москва, Наука, 1974
- [3] Рашевский П.К., Риманова геометрия и тензорный анализ, Москва, Гостехиздат, 1953
- [4] Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicists, Oxford, 1951
Схоутен Я. А., Тензорный анализ для физиков, Москва, Наука, 1965
- [5] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т., Современная геометрия, Москва, Наука, 1979
- [6] Норден А.П., Пространства аффинной связности, Москва, Наука, 1976
- [7] Шабат Б.В., Введение в комплексный анализ, Москва, Наука, 1976
- [8] Владимиров В.С., Обобщённые функции в математической физике, Москва, Наука, 1976
- [9] Вигнер Е., Непостижимая эффективность математики в естественных науках, УФН, 1968 г. Март, Том 94, вып. 3
E.Wigner, The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Comm. Pure and Appl. Math. 131,1(1960)
Лекция в честь Рихарда Куранта, прочитанная 11 мая 1959 г. в Нью-Йоркском университете. Перевод В.А.Белокопя и А.Угарова
- [10] Вигнер Е., Этюды о симметрии, Москва, Мир, 1971
Wigner E.P., Symmetries and Reflections, Bloomington-London, Indiana University Press, 1970
- [11] Гаврюшев В.Г. Измерение и свойства пространства-времени, Москва, URSS, Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2010