# Глава 4

# Вещество

## 4.1 Вещество как сплошная среда

В двух предыдущих главах мы рассмотрели применительно к нашему способу описания мира пространством аффинной связности следствия главного приближения, положенного в основу всех приближений классической физики. Приближения материальной точки. Такого, в котором пространственными размерами области, занимаемой всей совокупностью событий, которые создают образ масштаба времени (локального) мы пренебрегаем, полагаем все эти события сосредоточенными в точке (с тремя пространственными размерами равными нулю). Точнее, мы рассматриваем их последовательность, объединённую соотношениями причина-следствие, как одномерную **непрерывную** линию в пространстве-времени, со своей единственной координатой, длиной **вдоль** этой линии, являющейся временем **по определению**.

На этом пути мы обсудили понятие **поля** связности, с одной стороны определяемого такими материальными точками в окружающей эти точки **непрерывной** области пространства-времени, а с другой стороны, определяющее согласованное совместное положение, **существование** в этой области самих материальных точек, на языке описания их **движения** относительно порождаемых ими же систем отсчёта в такой области пространства-времени.

Это **единое** поле связности мы разделили на отдельные части, проявляющиеся независимо друг от друга при тех или иных условиях, имеющихся в рассматриваемой области. И ассоциировали эти выделенные в объекте связности составляющие с известными классическими физическими полями сил. Такими, как поле гравитации и электромагнитное поле. Если принять во внимание ещё и поле кручения, в классической физике до сих пор не рассматривавшееся достаточно серьёзно, то этим мы исчерпали вообще все возможности таких полей. Иных полей, создаваемых индивидуальными источниками (материальными точками) в континууме пространства-времени в **любых** классических приближениях быть не может.

Суть этих полей и методов их классификации состоит в том способе, которым они воздействуют на векторы масштабов, составляющих локальные реперы, которые мы **приписываем каждой точке** пространства-времени, чтобы иметь возможность ввести в его непрерывной четырёхмерной области **согласованные для всей этой области** координаты. Причём, сами коэффициенты связности мы рассматриваем одновременно и как порождаемые реально существующими где-то материальными точками, и как то свойство континуума, которое **связывает все эти материальные точки в единое, согласованное и взаимодействующее целое**.

Одним из следствий нашего подхода к описанию реального мира стало также определение понятия **силы** совершенно независимо от понятия массы. Определили мы силу через коэффициенты связности. При этом получили своё ясное обоснование первый и второй законы Ньютона.

Первый закон Ньютона является формулировкой в классических приближениях самого базового понятия, положенного нами в основу любого из возможных для нас описаний мира с помощью измерений, посредством сопоставления всем частям мира и отношениям между ними чисел, числовых множеств, которые мы полагаем единым, взаимосвязанным непрерывным целым — континуумом. Понятия, без которого невозможно осуществить такое сопоставление, и которое формулируется как предположение о непрерывном существовании хотя бы одного, базового для описания масштаба — масштаба времени.

Второй закон Ньютона при этом оказывается следствием нашего способа формулировки первого закона для самых общих видов континуума. Однако, мы увидели также, что этот закон, будучи в самых основаниях вторичным, оказывается незаменимым при описании более сложных ситуаций. Понятие силы, будучи вторичным по отношению к геометрическим понятиям, становится мощнейшим методом описания сложных явлений, которые трудно (а часто и просто невозможно) описывать детально, как совокупность взаимодействующих материальных точек. Особенно это становится важным в том приближении, к построению которого мы сейчас перейдём.

Приближение изолированной материальной точки не позволяет нам получить полноценное описание **всюду** в области, окружающей эту точку. Особенно хорошо это видно для поля гравитации — область при приближении снаружи к трёхмерной сфере гравитационного радиуса и внутри неё нашими решениями не описывается. Однако, мы с самого начала отмечали, что использовать приближение материальной точки можно только для расстояний от той совокупности событий, которую мы приближённо рассматриваем как непрерывную **линию** в пространстве времени, во много раз превышающих возможные пространственные размеры этой области событий. А в самой области таких событий и вблизи от неё нам нужно иметь другое приближение.

Как же мы должны определить нужное нам приближение, оставаясь при этом в рамках всё тех же **классических** приближений?

В классической физике определённые нами материальные точки рассматриваются как **частицы вещества**. Частицы, непрерывно существующие во времени, с которыми можно связать некоторую систему покоя и массу покоя. Откуда появилось понятие “частица”? Это понятие появляется как констатация возможности для самых разных веществ быть разделёнными на части при сохранении за этими частями всех основных свойств без изменения. Кроме одного свойства — масса вещества в каждой такой части будет меньше массы целого, и если мы объединим все части снова в целое, то получим исходную массу (покоя).

Деление на части — что оно означает в этом контексте? Это **только выделение некоторого меньшего трёхмерного объёма** в трёхмерном объёме целого. Время при этом не затрагивается. Существование (во времени) каждой части остаётся непрерывным. Классическое представление о материальной точке появляется как предел такого выделения части в целом при стремлении выделенного объёма к нулю. Соответственно, в классической физике вещество в исходном приближении представляет собой **непрерывную в трёхмерном пространстве совокупность материальных точек**. То, что это не так, что вещество следует рассматривать как совокупность молекул, атомов и т.д., разделённых “пустым” пространством, рассматривается как следующий шаг, уточняющий наше представление о мире. Как следующий набор приближений в его описании.

Такое представление о веществе как о **сплошной среде, непрерывной в трёхмерном пространстве совокупности материальных точек**, мы и будем далее рассматривать как ещё одно классическое приближение. Точнее, как ещё один, очень обширный набор родственных приближений.

Легко видеть, что наше определение “классичности” приближения остаётся при этом в полной мере применимым. Просто речь пойдёт не о материальной точке, непрерывно существующей во времени, а о некоторой области трёхмерного пространства, **заполненной непрерывно** этими точками, точно также непрерывно существующей во времени. Надо сказать, что именно это приближение было исторически первым в процессе формирования физики как науки, по естественным причинам — те части мира, которые мы явным образом отождествляем с веществом, всегда имеют некоторые конечные пространственные размеры.

Нашей целью далее будет приведение того языка, тех методов которые мы здесь используем для описания мира в соответствие с обычным языком классической физики. Чтобы не появилось никакого разрыва между построенным нами фундаментом описания и тем величественным зданием классической физики, которое было создано в процессе её развития к настоящему времени. Точно также, как это было уже нами сделано выше, при переформулировке теории физических полей и при описании движения в этих полях отдельных, изолированных материальных точек.

Делать это я буду, переходя от самых жёстких предположений о свойствах такого непрерывного в пространстве вещества к всё менее ограничивающим представлениям о его свойствах, ведущим в конце концов к принятию его атомарной структуры. Естественно, поскольку моей целью является лишь прояснение возникающих при этом основных понятий, и их связи с нашими базовыми понятиями о событиях и связях между ними, я затрону только самые основы этих разделов классической физики.

Первым шагом на этом пути будет то приближение, в котором вещество полагается **абсолютно твёрдым** телом. Для этого нам потребуется также указать, какими свойствами должны обладать **реальные** тела, части мира, чтобы такое приближение было применимо.

## 4.2 Твёрдое тело

К каким очевидным предположениям о свойствах **локализованных** реперов (наборов масштабов **в точке пространства-времени**) ведёт нас представление о веществе, как о выделенном трёхмерном объёме, снабжённом некоторой массой и существующем как целое, как непрерывная сплошная среда? Как совокупность материальных точек, заполняющих этот объём непрерывно?

Эти предположения можно сформулировать таким образом:

1. С каждой материальной точкой можно связать полный репер масштабов, тождественный самому себе на линии существования этой точки. Репер, не изменяющийся в её системе покоя в процессе существования этой материальной точки.

2. Поскольку вещество **существует (во времени) как целое**, то имеется **общая** для всех материальных точек система их **общего** покоя, с одинаковым для всех материальных точек (частей вещества) масштабом времени. В такой системе покоя масштаб времени, введённый для **всего трёхмерного объёма как целого**, локализуется для всех составляющих его материальных точек как совершенно одинаковый вектор. Или наоборот, поскольку масштабы времени одинаковы для всех материальных точек, составляющих данный выделенный трёхмерный объём, то совершенно свободно можно перейти к приближению, в котором весь выделенный трёхмерный объём рассматривается сам как **единственная материальная точка, с единственным вектором масштаба времени**.

   - Это означает, что наше приближение в описании частей мира, рассматриваемых в виде "вещество как сплошная среда", без проблем согласуется с нашим приближением "вещество как материальная точка". Любое ограниченное в пространстве тело, которое мы рассматриваем в таком приближении, на достаточно больших расстояниях от него может нами рассматриваться уже как не имеющая пространственных размеров материальная точка.
   - С другой стороны, предположение о существовании **единой системы покоя** для всех материальных точек, заполняющих выделенную область непрерывной среды, является весьма ограничивающим, и вполне возможно рассматривать среды, для которых это не так. Поэтому нам следует рассматривать данное утвер-

ждение лишь как первое приближение в описании непрерывных сред, имея ввиду в дальнейшем отказ от такого жёсткого представления о свойствах вещества.

Однако, поскольку любое ограниченное в пространстве тело, при переходе к расстояниям много большим его размеров, мы **всегда** сможем рассматривать как материальную точку, то система покоя, **общая** для такого массивного тела, обязана присутствовать во всех наших описаниях вещества как сплошной среды. Пусть уже не как единая для всех его материальных точек, а как некая средняя, привязанная к какому-то существенному свойству тела. Именно это свойство мы и установим, определяя понятие абсолютно твёрдого тела.

3. Пространственную часть репера для каждой материальной точки **можно** доопределить, базируясь на её локальном масштабе времени **независимо** от остальных материальных точек. Но, соответственно, именно поэтому, **можно** определить и совершенно одинаковым способом, приняв единую, **постоянную во всём трёхмерном объёме** (и во времени тоже), классическую метрику. Единую, одинаковую для всех материальных точек, переходящую в единственную, при переходе к рассмотрению самого данного тела как материальной точки.

   - И с этой стороны оба наши приближения будут полностью согласованы. Как в случае единой системы покоя для всех точек тела, так и в случае общей средней такой системы отсчёта.

Какой вывод относительно возможности введения систем координат **внутри** той области пространства-времени, которая выделена существованием такого трёхмерного тела (которое мы будем называть **твёрдым**), рассматриваемого как сплошная среда, имеющая массу, можно сделать на основании приведённых выше **соглашений**?

Очень простой — в такой области мы **можем**, используя само это твёрдое тело как измерительный инструмент, ввести систему координат, локальные реперы которой **не изменяются** при переносе от точки к точке внутри области. В этой системе координат и во всей области пространства-времени, занятой таким абсолютно твёрдым телом (а не только на линии существования отдельной материальной точки) аффинная связность (по крайней мере, её метрическая часть) равна нулю. Описанные выше свойства массивного тела, позволяющие вводить такие координаты, собственно и являются *определением* понятия “абсолютно твёрдое тело”.

Поскольку мы вводим пространственные координаты с помощью классической метрики, то имеется возможность выбрать её наиболее удобным нам образом, в виде диагонального единичного тензора. Т.е. мы **можем** описывать такую область как **евклидово** пространство-время. И имеем также возможность, при переходе к расстояниям гораздо большим размеров тела, рассматривать его как материальную точку, снабжённую стандартизованным репером масштабов, с локализованной на ней евклидовой метрикой.

Вот только остаётся главный вопрос — а имеются ли в реальном мире такие массивные тела, такие области событий, которые можно рассматривать как сплошную среду, хотя бы в некотором приближении? Ответ на него тоже прост — такие тела имеются, но **весь** мир они **а) не заполняют** и **б) являются таковыми только при ограничении не слишком большими и не слишком малыми пространственными расстояниями**. Т.е. только в определённом диапазоне временных интервалов и пространственных расстояний. Тогда, когда события в этом диапазоне расстояний выглядят как **непрерывные и во времени, и в пространстве**. В этом же диапазоне времён и пространственных расстояний определённую часть сплошных сред, удовлетворяющую принятым нами соглашениям, мы можем рассматривать и как твёрдые тела. Возможно не все из них будут в точности подходить под определение абсолютно твёрдого тела. Но мы можем, как всегда это делаем, полагать понятие абсолютно твёрдого тела идеальным пределом, и рассматривать разные уровни отклонений от этого понятия как разные уровни приближения к этому понятию. Наличие в нашем распоряжении твёрдых тел обеспечивает нам возможность **реализовать прототипы** необходимых для введения евклидовой метрики масштабов.

При выходе из этого диапазона условия для выполнения описанного приближения теряются. Описывать область пространства-времени евклидовым пространством становится невозможным и на достаточно больших временах и расстояниях, и на достаточно малых, определяющих такую область[1].

Для того, чтобы понять, какие именно тела в реальном мире соответствуют в той или иной степени условиям на сформулированное приближение пойдём от самой идеи евклидова пространства. Для её реализации требуется, чтобы имелась хотя бы одна система координат, в которой с течением времени существования выбранного тела **все пространственные расстояния между всеми составляющими его материальными точками оставались неизменными**. Таким условиям более-менее удовлетворяют те тела, те области мира, которые мы называем **твёрдыми телами в быту**.[2]

Твёрдых тел в нашем распоряжении имеется много, самого разного происхождения. Они в разной степени удовлетворяют сформулированному выше условию. Одни меньше, другие больше. Их мы и используем для реализации единиц измерения в трёхмерном пространстве — линеек (образ одного измерения), треугольников (образ двух измерений и прямого угла, т.е. зачатки метрики в двух измерениях) и трёхмерных ортонормирован-

---

[1]Это сразу указывает нам на то обстоятельство, что описание **любых областей мира конечных размеров** евклидовым пространством-временем всегда остаётся описанием **среднего** состояния этих областей. Не более, но и не менее. Евклидовость связности, там где она применима, говорит только о некоторых усреднённых свойствах конечной области.

[2]Развитие науки шло в противоположном направлении. Именно абсолютизация тех свойств твёрдых тел, которые не зависят от их материала, положения в пространстве и от времени, привела, в конечном счёте, к понятиям евклидовой геометрии.

ных реперов разного вида.

Мы отчётливо понимаем, что **можно** использовать и другие реперы — не ортонормированные, не ортогональные, и даже с разными единицами для разных направлений, возможно изменющимися от точки к точке. Простой пример — портняжная мерная лента. И единицы — метры, футы, вершки, сажени, локти ... Да и сингулярные координаты часто могут быть очень удобны. Но наличие в нашем распоряжении массивных твёрдых тел, тел практически **не изменяющих свою пространственную форму с течением времени** в широком диапазоне изменяющихся условий, позволяет нам сформулировать **идею возможности всегда и везде** использовать такие тела для измерений пространственных координат с сохранением заданного нами соотношения между разными масштабами, образующими полноценный пространственный репер, а значит иметь возможность рассматривать соответствующие области трёхмерного пространства как евклидовы. Хотя бы приближённо. Поскольку в системах покоя масштаб времени **по определению** одинаков всегда и везде, то и полное пространство-время рассматривается нами как евклидово. Пусть "локально" (т.к. мы осознаём невозможность заполнить полностью даже ту ограниченную область пространства-времени, которая доступна для наших измерений твёрдым телом), но евклидово.

Нужно ещё раз обратить ваше внимание на то, что "локально" здесь означает отнюдь не бесконечно малую окрестность всякой материальной точки, как мы полагали с самого начала при построении нашего описания стандартизованными системами отсчёта. Речь идёт о **конечных**, достаточно больших областях пространства-времени. В этих областях может иметься **очень много** материальных точек (классических частиц), и, тем не менее, в приближении сплошной среды мы полагаем всю эту область имеющей **евклидову метрику**. Подчёркиваю, речь идёт именно о структуре метрической части связности в конечной области, которую мы ей **приписываем**. Неметрические составляющие в области вполне могут иметься и играть значительную роль в тех или иных рассматриваемых явлениях. Более того, уже определённая нами составляющая метрической части связности, поле гравитации, тоже учитывается там где это необходимо. В тех случаях, когда явления определяются не компонентами метрики, в которых единицы имеют исчезающе малую по сравнению с ними поправку, а именно только значением самой этой поправки. Например, если основное влияние на явление оказывает не абсолютная величина компонент метрики, а только их зависимость от места и/или времени. При этом гравитация принимается во внимание уже не как свойство метрической части геометрии этой области, а как **внешнее к геометрии физическое поле**.

По этим же причинам возникает и укореняется идея **трёхмерного пространства как целого**, отдельного от времени, и существующего **как целое** во времени.

Ведь, в самом деле, твёрдые тела являются реализацией именно области в трёхмерном пространстве, все точки (материальные), их составляющие, **определены для каждого момента времени все сразу, как совокупность**. И время для них всех может быть определено (измерено) одинаково. Тела могут находиться в разных местах, могут ограничивать некий **пустой** трёхмерный объём **внутри** (жёсткие коробки и прочие ёмкости), создавая, таким образом, **идею трёхмерного пустого пространства, независимого от самого твёрдого тела**.

Заметьте, что с принятием такого взгляда на геометрию пространства-времени в конечных его областях, мы **явным образом разделяем реальную связность в этой области на внешнюю для тел, в ней содержащихся, и ту, которую создают сами эти тела**. Фактически, мы приходим к ситуации весьма близкой к той, которая возникает из признания нами сингулярности полной связности на траекториях классических материальных точек. Только эта, не учитываемая нами в геометрии области "внутренняя" часть полной связности, будет выглядеть гораздо сложнее, чем в случае действительно точечной классической частицы.

Да, с развитием и уточнением наших представлений о реальном мире мы начинаем понимать, что сформулированная на основе этих наблюдений идея (идея евклидова пространства применительно к некоторой четырёхмерной области), на самом деле не достижима **нигде и никогда в точности**. Однако, при определённых, достаточно широких условиях, идея эта может служить очень хорошим приближением для описания **геометрических свойств** реального мира. Хотя бы как некоторое усреднённое приближённое описание. При этом, то что **отличает реальную связность мира в этих областях от нулевой, точнее, евклидовой**[3], смещается *нами* **из свойств геометрии в дополнительные свойства мира**. Эти свойства в таких приближениях мы уже не относим к свойствам связности, т.е. геометрическим, а выделяем описание их в отдельную науку — физику. То, что всё, о чём говорит физика на самом деле может быть сформулировано в терминах свойств пространства аффинной связности, остаётся при этом за кадром. И нашей целью здесь и сейчас является установление соответствия между представлениями классической физики в указанных приближениях (сплошной среды) и теми представлениями о роли аффинной связности в описании мира, которые мы уже установили ранее, в приближении материальной изолированной точки.[4]

Поскольку все реальные твёрдые тела, без исключения, всётаки при определённых условиях (для разных тел отличающихся) перестают удовлетворять идее реализации с их помощью некоторой области трёхмерного евклидова пространства **даже приблизительно**, то далее в этом приближении мы будем вести речь (как это и делается в классической физике) о некотором,

---

[3]Мы помним, что связность может быть не нулевой и вследствие специального выбора системы координат даже в случае евклидова пространства.

[4]Напомню, что во всех классических приближениях в нашем описании не все его детали сведены к чисто геометрическим понятиям. Я имею ввиду, что главную характеристику сингулярных линий, описывающих существование материальных точек, их массу покоя, мы в этих приближениях определить через события не можем. Эта характеристика является свободным, внешним для геометрии параметром. И остаётся таковым также и в приближении сплошной среды.

идеальном **абсолютно твёрдом теле, полностью соответствующем идее евклидовости геометрического описания некоторой области пространства**. Абсолютно твёрдом и абсолютно жёстком, т.е. не изменяющем свою форму в процессе существования.

Так возникло базовое представление приближения сплошной среды о привилегированных инерциальных системах отсчёта, определённых не только в бесконечно малой окрестности материальной точки, но и в достаточно обширных областях пространства-времени. О системах отсчёта, пространственные масштабы в которых реализуются абсолютно твёрдыми телами, при одних и тех же масштабах времени для всех точек пространства-времени. Наличие таких систем отсчёта стало основанием описания этих областей с помощью геометрии Евклида. Дополнительным моментом в пользу такой точки зрения на описание мира в "макрообластях", а не только в малых окрестностях, является и то, что то свойство событий (выделенность пары событий, связывающих разные цепочки с большим числом событий), которое мы положили в основание определения классической метрики, тоже подразумевает под собой явную нелокальность описания. Хотя формулировка этого свойства определением равенства нулю интервала между такими событиями и позволяет без проблем совместить локальные и нелокальные их свойства. Что, в конечном счёте, и делает приближения изолированной материальной точки и сплошной среды, являющейся непрерывной совокупностью материальных точек вполне совместимыми.

Сформулируем основные ограничения на применимость такого приближения для описания мира и те соглашения, которые ему соответствуют:

1. В качестве реализации пространственных масштабов в привилегированных инерциальных системах отсчёта (стандартизованных) должны использоваться тела реального мира максимально близкие по свойствам к абсолютно твёрдому телу. Даже если речь идёт о редукции к единственному измерению, то в этом единственном измерении должна быть

гарантирована достаточная жёсткость. Растяжимые мерные ленты не порождают стандартизованные системы отсчёта.

Все другие способы измерения и соответствующие им системы координат допустимы, но сравнение тех измеренных величин, которые становятся предметом физики, должно проводиться в стандартизованных системах координат.

2. В физике Ньютона сплошной среды (а наше приближение в основных деталях соответствует именно физике Ньютона) понятие “сила” изменяется по сравнению с введённым нами понятием силы в физике изолированной материальной точки. Оно обобщается до понятия “эффективной” силы, действующей уже не на отдельные материальные точки, составляющие сплошную среду, а на всё тело как целое (для абсолютно твёрдых тел), или на “макроэлемент” тела, выделенный в сплошной среде общего вида и далее рассматриваемый как твёрдое тело (подход Лагранжа к описанию движения сплошной среды в классической физике, или метод “крупных” частиц). Как следствие, возникает проблема определения правильной связи “эффективных” сил и сил “элементарных”, тех, которые мы можем определить через аффинную связность по приведённым в предыдущей главе формулам. Иногда это сравнительно легко удаётся сделать, например, в случае силы Лоренца. Хотя и для этой силы тоже не всегда всё просто. Но очень многие эффективные силы классической физики (например, силу трения) очень сложно свести к элементарным силам, действующим на материальную точку. Особенно с учётом того, что и сами элементарные силы хорошо определены только в классических приближениях, а для понимания множества “эффективных” сил ньютоновского приближения **требуется выход в квантовые приближения**.

   Эта ситуация иллюстрирует мощь тех соглашений, которые были приняты Ньютоном при формулировке законов его имени. Они не только дань тому времени, когда геометрические представления были в зачаточном состоянии. Они весьма результативно разрешают проблему описания взаимного движения тел при отсутствии реального понимания природы тех или иных сил. Сил эффективных, являющихся эквивалентом описания свойств огромного числа элементарных событий, связанных соотношениями причина-следствие, рассматриваемых как доступные нашему прямому опыту “макрособытия”.

3. Из всего набора инерциальных систем отсчёта выделены только те, которые двигаются друг относительно друга с малыми скоростями и поступательно, так что преобразования между ними хорошо приближаются преобразованиями Галилея. Для тех скоростей, при которых преобразования между системами отсчёта уже следует рассматривать как полноценные повороты (Лоренца) данное приближение нужно модифицировать. Здесь эту модификацию я не рассматриваю.

4. Связано это с тем, что в базовом приближении Ньютона пространственные размеры твёрдых (и не очень) тел становятся величинами, не зависящими от геометрического описания мира.

   Линейное расстояние (в том числе от начала координат до произвольной точки сплошной среды, или между двумя такими точками, а не только линейные размеры тела), площадь некоторой ограниченной поверхности, трёхмерный объём ограниченной области — это в рассматриваемых приближениях, с одной стороны, геометрические инварианты (скаляры) или геометрические величины (векторы, тензоры, их плотности) и, с другой стороны, физические величины, результаты измерений твёрдыми масштабами. При том, что в нашем базовом приближении все эти величины могут рассматриваться как таковые **только будучи бесконечно малыми**. В приближениях сплошной среды все те же геометрические свойства приобретают уже их конечные прототипы. И именно это позволяет **рассматривать результаты реальных измерений** как реализацию **идеальных математических понятий**.

При переходе к инерциальным системам отсчёта, движущимся относительно выделенных нами со скоростями, сравнимыми со скоростью света, тогда, когда пространство уже нельзя рассматривать отдельно от времени, величины из трёхмерного подпространства перестают быть геометрическими инвариантами или геометрическими величинами[5]. Поэтому применение рассматриваемой группы приближений и ограничено достаточно малыми скоростями.

5. Как следствие, в рассмотрение вводятся удельные (в трёхмерном пространстве) физические величины — на единицу длины, на единицу площади, на единицу объёма — которые в приближениях сплошной среды полагаются инвариантами преобразований **между системами отсчёта** или сохраняют геометрические свойства соответствующей им не удельной величины, наравне с истинными геометрическими скалярами и иными геометрическими величинами. Среди удельных величин важнейшими являются плотность массы[6] (обычно говорят просто плотность тела) и давление, определяемое как сила, приходящаяся на единицу площади. Т.к. сила теперь является синтетическим, обобщённым понятием, то таковым является и давление.

6. Среди движений твёрдых тел выделяются **поступательные**, которые рассматриваются как движения целого, т.е. так, как если бы каждое твёрдое тело было материальной точкой. Это становится возможным потому, что в при-

[5] Простейший пример — вектор трёхмерной скорости, когда она мала и мы ограничиваемся преобразованиями Галилея, перестаёт быть полноценным вектором, если мы переходим к преобразованиям Лоренца.

[6] Плотность массы можно рассматривать также и как настоящую, четырёхмерную плотность.

ближении сплошной среды **положения всех материальных точек, составляющих абсолютно твёрдое тело, по определению приближения, в его системе покоя с течением времени изменяются одинаково**. Их траектории отличаются только начальными значениями пространственных координат. Поэтому обычно вместо движения такого тела в простейшем случае поступательного движения рассматривается движение "эффективной" материальной точки. Для этого вводится понятие "центр масс" твёрдого тела, то положение в пространстве, которое занимала бы "эффективная" материальная точка, имеющая массу, равную полной массе твёрдого тела. И точкой приложения суммы векторов всех эффективных сил, действующих на тело и приводящих к его поступательному движению, считается именно центр масс.[7]

7. Помимо поступательного движения, твёрдое тело может ещё **вращаться** относительно своего центра масс. При этом может возникнуть некоторое противоречие с самим определением такого тела. В самом деле, при вращении составляющие тело материальные точки, находящиеся на разных расстояниях от центра масс имеют разные скорости. Но, так как мы ограничили применение нашего приближения только скоростями малыми по сравнению со скоростью света, то эта проблема в классической физике игнорируется. Хотя, как мы увидим в дальнейшем, при этом из рассмотрения неправомерно удаляется имеющееся в этой области пространства-времени кручение.

   Любое движение твёрдого тела можно представить как совокупность двух независимых — поступательного перемещения и вращения относительно центра масс. Поэтому, при рассмотрении свойств такого тела на больших по сравнению с его размерами расстояниях от него, когда его эф-

[7] Вспомните приведённое в предыдущей главе рассмотрение лагранжева метода классической механики. Он предоставляет все средства для применения такого подхода на практике.

фективно можно считать материальной точкой в пространстве, возникает вопрос, какими именно геометрическими объектами его вращение должно быть представлено среди свойств эффективной материальной точки. Части этих вопросов будет посвящён специальный параграф.

Таким образом, трёхмерное пространство, подразумеваемое обладающим свойствами идеального евклидова пространства, в приближении сплошной среды полагается отделённым от времени. Пространство независимо от времени, но при этом **существует во времени как целое**. Пространство-время как целое при этом тоже полагается евклидовым, т.к., по определению, масштабы времени одинаковы для всех точек пространства и с течением самого времени тоже не изменяются.

Имеются не очень чёткие, но вполне доступные численной оценке ограничения на размер области трёхмерного пространства, к которой можно применять приближение сплошной (не релятивистской) среды.

- Эти размеры ограничены сверху теми величинами линейного расстояния, при которых становится возможным с достаточной степенью точности применять к выделенной совокупности вещества приближение изолированной материальной точки. Естественно, эти размеры разные для разного количества вещества. Для разного количества “макро” событий. Дополнительные ограничения состоят в необходимости отслеживать возможность применения приближения малых скоростей и самой возможности введения пространственных единиц, одинаковых для всей области. Скорость света конечна, единицы должны быть введены **одновременно** всюду, что для слишком больших областей пространства-времени сделать невозможно даже приближённо.

- Снизу ограничение в самом приближении не фиксировано — сплошная среда потому и сплошная, что непрерывна в пространстве. Однако, именно требование **не нарушения**

> **непрерывности** вещества как **сплошной** среды и является таким ограничением.
>
> В классической физике, при описании **строения вещества**, это ограничение традиционно преодолевается соглашением о **погружении** в некую сплошную среду (фактически, в пустое евклидово пространство вместо непрерывного вещества), тех элементов (молекул, атомов, электронов) из которых предполагается состоящим рассматриваемое вещество. Такой подход более-менее применим только до тех пор, пока эти составляющие возможно рассматривать как классические частицы. Т.е. как материальные точки, существующие в виде непрерывной последовательности событий. Если требуется учитывать "отдельность", дискретность хотя бы одного события (не обязательно именно элементарного), то необходимо переходить к квантовым приближениям.

Все изменения в размерах тел (а значит отклонения от приближения абсолютно твёрдого тела) во времени перестают быть предметом геометрии и становятся предметом только физики. Описание геометрии фиксируется на применении только метрической, и притом евклидовой в ортонормальных координатах связности и соответствующей стандартной метрики. На этом пути устанавливаются феноменологические законы расширения и сжатия тел, упругости, деформации и т.д., которые связывают те или иные характеристики как тел, так и "эффективных" сил, действующих на эти тела. Или описываются как результат движения составляющих тела молекул и/или атомов. В этой книге мы таких вопросов касаться не будем. Может быть, только самые важные, базовые соотношения в термодинамике будут хотя бы качественно рассмотрены в контексте нашего описания мира.

С самими твёрдыми телами, из-за того, что двигаются они относительно систем отсчёта как целостные объекты, оказывается возможным связать две величины, характеризующие их *поступательное* движение. Те самые, которые мы выделили из вектора энергии-импульса материальной точки в приближении малых скоростей. Это

1. Трёхмерный вектор импульса $p^\alpha = -\mathbf{i} m_0 v^\alpha$ (как мы помним, мнимая единица отличает наше выражение от выражения классической физики из-за выбора мнимой координаты для времени). Здесь $m_0$ это масса покоя **всего тела** (или его макроэлемента в подходе Лагранжа). Вектор этот приписывается к центру масс тела.

2. Скалярная в этом приближении величина, часть временной компоненты вектора энергии-импульса — кинетическая энергия тела $E_k = m_0 v^2/2$, где $v^2 = \mathsf{g}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$.

Соответственно, для любого твёрдого тела как целого, независимо от его формы и материала, формулируется второй закон Ньютона. Формулируется он в эффективной форме для идеальной материальной точки, имеющей массу тела (массу покоя, т.к. при малых скоростях движения масса фактически от скорости не зависит), находящейся в центре масс тела.

Величина трёхмерного вектора силы, являющейся причиной изменения импульса, как правило, становится собирательным образом всех возможных сил, действующих на все точки твёрдого тела, их единым итогом, "эффективной" силой. Вводится понятие "равнодействующей" всех сил, как тот самый результат всего множества неконтролируемых нами взаимодействий, составляющих само твёрдое тело и окружающую его среду материальных точек. Результирующая сила проявляется только и именно только в изменении указанных выше характеристик тела (импульса и энергии). В частности, именно здесь возникает неразрешимый в классической физике замкнутый круг **совместного** определения силы и массы.

Вполне ясно, что те силы, которые мы ввели в предыдущей главе как образ отличия реальной связности от евклидовой, при таком подходе теряют все следы своего происхождения из геометрической формы описания мира. Хотя, в той области применения приближения сплошной среды, в которой твёрдые тела можно уже с достаточно большой точностью рассматривать как материальные точки, именно эти и только эти силы остаются в окружающем твёрдые тела “пустом” пространстве.

В приближениях сплошной среды те силы, происхождение которых мы увязали с метрическими (гравитация) и с неметрическими (электромагнетизм и кручение) свойствами связности становятся **внешними для геометрии**. Они становятся манифестацией **физических** полей, существующих на пространстве-времени как **неизменной по своим свойствам арене**. Полей, совершенно от его геометрических свойств в этом приближении не зависящих, чуждых пространству-времени, внешних для него и не влияющих на его свойства ни в какой мере.

Но то, что эти поля перестают быть предметом геометрии в этих приближениях, отнюдь не означает, что их нельзя, когда это может нам потребоваться, интерпретировать именно как свойства реперов. Более того, даже если их расматривать как чуждые геометрии, знание их действительного смысла поможет в ряде случаев лучше понять те явления, в которых они проявляются.

Ещё один важный момент возникает при разделении в этих приближениях единого поля на вмещающую евклидову метрическую связность и физические поля, в которых объединены все отличия реальной связности от евклидовой. **Внутри** сплошной среды естественным образом следует рассматривать **второй уровень** возникшего разделения единого поля. Физические поля (отличие связности от евклидовой), которые существуют внутри сплошной среды тоже распадаются на ту часть, которая ответственна за объединение составляющих эту среду материальных точек в единое целое, их единый непрерывный континуум, и на остаток, который проявляет себя как **внутри** массивного тела, так и **вне** занимаемой этим телом области пространства-времени.

## 4.3 Вращение твёрдого тела

В предыдущем параграфе мы обсудили, каким образом твёрдые тела создают идею вмещающего евклидова пространства, в котором их **поступательное** движение (существование во времени) можно описывать как движение материальной точки, обладающей полной массой рассматриваемого твёрдого тела, находящейся в его центре масс. Однако, отнюдь не все возможности в формах существования твёрдых тел описываются поступательными движениями. Твёрдые тела[8] могут также вращаться относительно одной или нескольких осей. Эти "воображаемые" оси могут как проходить через центр масс, так и могут быть смещены относительно воображаемой точки положения центра масс. Для наших целей будет достаточно рассмотреть те детали геометрических понятий, которые нам необходимо учесть при вращении относительно оси, проходящей через центр масс. Причина этого лежит в том, что в общем случае любое движение твёрдого тела можно представить как два независимых движения — поступательное движение центра масс как материальной точки (и этот тип движения полностью накрывается рассмотрением, приведённым в предыдущей главе) и вращение (возможно в нескольких плоскостях) относительно осей, проходящих через эту точку. Для описания поступательного движения нам достаточно оставаться в рамках геометрии вмещающего евклидова пространства (а при необходимости можно принять во внимание всевозможные виды неевклидовости). Такой тип движения изначально принят нами во внимание при построении **самосогласованного описания области локализованными реперами, в которых все изменения при непрерывном смещении от точки к точке могут быть описаны симметричной связностью**. Поэтому полагать вмещающее пространство метрическим (в том числе, и евклидовым) нам ничто не мешает. А вот вращение относительно оси, проходящей через центр масс для своего правильного,

[8]Конечно, вращаются не только твёрдые тела, но **геометрические** детали такого рода движения, по крайней мере его простейшей формы, нам легче всего уяснить именно на их примере.

полноценного описания потребует от нас некоторого расширения представлений о геометрии пространства-времени в рассматриваемой области.

Прежде чем перейти к описанию **вращения как физического понятия**, рассмотрим несколько более подробно, чем ранее, вращение как чисто математическое понятие. Точнее, способы описания групп преобразований координат, которые мы называем в математике **группами вращений** или **поворотов**.

Для наших целей (описания свойств физического вращения) наиболее подходящим способом работы с группами вращений является их описание в окрестности единицы группы средствами теории непрерывных групп Ли (§1.6). Почему так, я укажу чуть ниже. Начнём применять это подход к описанию группы $SO(3)$ **трёхмерных** поворотов пространственной части ортогонального репера. Т.е. группы, описывающей среди **пассивных** преобразований координат переход от процедуры измерений с помощью одного **ортогонального** репера, к измерениям с помощью другого, тоже **ортогонального** репера, отличающегося от первого **только направлением его пространственной** (трёхмерной) части. Та же самая группа описывает и **активные** преобразования уже самих реперов, рассматриваемых как совокупность векторов, изменяющих своё положение в трёхмерном пространстве. Какую именно связность при этом имеет пространство не важно, так как речь идёт о преобразовании **в отдельно взятой точке**. Именно активные преобразования и дали название этой группе, поскольку в этом случае мы и говорим обычно о поворотах или вращениях репера как целого.

Генераторы группы трёхмерных вращений хорошо известны, но будет полезно посмотреть, как они определяются из самых элементарных соображений. Для этого рассмотрим поворот в плоскости $\{x^1, x^2\}$ на **бесконечно малый** угол $d\varphi$. Этот момент важен, он сосредотачивает наше внимание не на повороте на некоторый конкретный угол, а на тех свойствах группы, которые высвечиваются в результате **приращения любого текущего угла поворота**. Поскольку приращение угла бесконечно малая величина, то будут справедливы следующие равенства:

$$\begin{pmatrix} \cos d\varphi & -\sin d\varphi \\ \sin d\varphi & \cos d\varphi \end{pmatrix} \approx$$
$$\approx \begin{pmatrix} 1 & -d\varphi \\ d\varphi & 1 \end{pmatrix} = \delta^{\alpha}_{\beta} + d\varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $\alpha, \beta = 1, 2$.

Достаточно очевидно, что повороты на бесконечно малые углы в двух остальных плоскостях могут быть представлены совершенно также. Сравнение с формулой разложения элемента непрерывной группы Ли по её генераторам (1.31) сразу позволяет нам определить три генератора группы поворотов в трёхмерном пространстве следующим образом:

$$R_1 = -\mathbf{i} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = -\mathbf{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$R_3 = -\mathbf{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[R_1, R_2] = -R_3, \quad [R_2, R_3] = -R_1, \quad [R_3, R_1] = -R_2 \tag{4.3}$$

и им соответствует тензор структурных констант, имеющий не нулевыми компонентами только

$$c^3_{12} = c^1_{23} = c^2_{31} = -c^3_{21} = -c^1_{32} = -c^2_{13} = \mathbf{i}, \tag{4.4}$$

Метрика Картана, действующая **в пространстве генераторов**, т.е. в линейном векторном пространстве, векторами которого являются **матрицы**, при таком выборе генераторов ($g_{ab} = -\delta_{ab}$) ясно демонстрирует тот факт, что все выбранные генераторы взаимно ортогональны. Если мы обозначим параметры, соответствующие выбранным генераторам, углы поворота в трёх плоскостях, как $\varphi$, $\theta$ и $\psi$, то любое бесконечно малое вращение репера в трёхмерном ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) пространстве может быть представлено так:

$$A^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + \mathbf{i}(d\varphi R_1 + d\theta R_2 + d\psi R_3). \tag{4.5}$$

Для описания физических свойств вращения группы трёхмерных поворотов нам будет не достаточно. Ведь связанные с точками вращающегося тела реперы, в общем случае, помимо поворотов в трёхмерном пространстве, будут испытывать повороты ещё и в плоскостях, включающих как пространственную координату, так и время. В плоскостях четырёхмерного пространства-времени $\{x^{\alpha}, x^4\}$. Матрицы этих преобразований в первом приближении по скоростям будут выглядеть, согласно (3.23), следующим образом:

$$A^i_k = \begin{pmatrix} \cos \mathbf{i}d\phi^{\{ik\}} & -\sin \mathbf{i}d\phi^{\{ik\}} \\ \sin \mathbf{i}d\phi^{\{ik\}} & \cos \mathbf{i}d\phi^{\{ik\}} \end{pmatrix} \approx \tag{4.6}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i}dv^{\{ik\}}/c \\ -\mathbf{i}dv^{\{ik\}}/c & 1 \end{pmatrix} = \delta^i_k + \mathbf{i}\frac{dv^{\{ik\}}}{c}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где индексы $i, k$ пробегают значения из пары $\{\alpha, 4\}$, а индекс $\{ik\}$ в общем случае принимает значение $\alpha$ для движения в каждом из направлений $\alpha = 1, 2, 3$. Непрерывные повороты в четырёхмерном пространстве-времени образуют собственную группу Лоренца. Подгруппу общей группы Лоренца, из которой исключены дискретные преобразования, изменяющие ориентацию репера. Генераторы вида (4.6) обычно называют бустами[9]. Вместе с генераторами подгруппы трёхмерных вращений (4.2), после расширения их матриц соответствующим образом до матриц $4 \times 4$, они описывают алгебру этой непрерывной группы. Здесь наше внимание сосредоточено не на изучении детальных алгебраических свойств групп, а на применении полученных нами соотно-

[9]При обычной записи **всех** координат действительными числами, не нулевые компоненты буста будут иметь одинаковый знак. Здесь разные знаки возникли именно из-за нашего выбора временной координаты в виде $x^4 = \mathbf{i}ct$. При этом интерпретация бустов как ортогональных поворотов является очевидной.

шений для описания физического вращения твёрдого тела. Поэтому я не буду вдаваться в дальнейшие подробности на этом пути. Отмечу только важный для нас момент, что все генераторы расширенной группы вращений остаются ортогональными друг другу и представляют полный базис в ней. А значит **любой** элемент группы, любое бесконечно малое вращение (поворот) можно представить как разложение по этим генераторам.

Т.е. любое бесконечно малое вращение **в четырёхмерном** пространстве-времени может быть записано аналогично (4.5):

$$A^i_k = \delta^i_k + \mathbf{i} dp^a \mathcal{R}_a. \tag{4.7}$$

Здесь индексы $i, k = \{1, 2, 3, 4\}$, 6 параметров $p^a = \varphi, \theta, \psi, \{v^\alpha/c\}$, $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6,\ \ \alpha = 1, 2, 3$, а 6 генераторов $\mathcal{R}_a$ являются $4 \times 4$ матрицами, полученными соответствующим расширением нулями из матриц $R_\alpha$ и бустов (4.6).

Теперь мы имеем в наших руках всё, что нужно, чтобы увидеть необходимость изменений в геометрическом описании пространства-времени при переходе от приближения чисто поступательного движения абсолютно твёрдого тела, к приближению, в котором это тело ещё и вращается относительно своего центра масс. Поступательное движение такого тела мы можем свести к поступательному движению материальной точки, находящейся в его центре масс и имеющей полную массу тела. Возможно это потому, что **все локальные** реперы, связанные с каждой точкой абсолютно твёрдого тела при поступательном движении ведут себя совершенно одинаково и таким образом, что можно определить систему **покоя общую** для всех этих материальных точек. Как результат, мы в состоянии рассматривать область пространства-времени, вмещающую твёрдое тело, как чисто евклидово пространство, связность которого обращается в нуль в системе покоя, общей для всего тела. Вращение тела относительно центра масс исключает такую возможность.

Чтобы понять, что это так, достаточно спросить себя — а как изменяется со временем (т.е. при смещении по четвёртой координате) репер, локализованный в центре масс вращающегося тела?

Если тело движется поступательно, то в его системе покоя, которую легко установить, этот репер совершенно идентичен всем реперам, находящимся в некоторой области, занимаемой твёрдым телом, и может быть выбран так, чтобы координаты в области были декартовыми. Т.е. ортонормированными. И связность в области в таких координатах можно определить как нулевую. И смещённый репер остаётся неизменным, идентичным себе в предыдущий, бесконечно близкий момент времени.

А если абсолютно твёрдое тело вращается **как целое** относительно своего центра масс, то, при условии ограничения рассмотрения пространства-времени только в рамках евклидовости, оказывается **невозможным согласовать движущиеся относительно этой точки**, локальные реперы, привязанные к другим точкам тела. Просто потому, что эта точка **покоится во вмещающем евклидовом пространстве, а остальные движутся, причём с разными скоростями**. А ведь мы рассматриваем это тело как **абсолютно твёрдое**. Полагаем, что оно во времени существует как **неизменная** целостность, в которой может быть определён один глобализованный репер, остающийся при локализации идентичным сам себе **во всех** точках тела.

Как быть? Отказаться от идеи абсолютно твёрдого тела? От представления, что все наши тела, которые мы рассматриваем как твёрдые, на самом деле таковыми не являются, мы отказаться можем вполне, и это будет правильно. И можем пытаться описывать все отклонения “от твёрдости” как некую физику. Но вот от **идеи** абсолютно твёрдого тела, позволившей нам описывать движение таких тел с помощью законов Ньютона, отказываться совершенно нежелательно. Ведь опыт нам настоятельно говорит, что и вращающиеся тела в тех приближениях, в которых они выглядят как материальные точки с масой тела, помещённой в его центр масс, тоже двигаются согласно законам Ньютона.

Сейчас мы увидим, что этого и не требуется. Чтобы сохранить идею вмещающего евклидова пространства и для описания поступательного движения вращающихся абсолютно твёрдых тел нам достаточно модифицировать её, приняв во внимание возможное наличие в этой области **кручения**. А метрическую часть связности мы по-прежнему сможем полагать евклидовой. Т.е. симметричная часть связности по определению должна быть равна нулю при описании области декартовыми координатами. При этом окажется возможным **непрерывным образом согласовать все локализованные декартовы реперы в таких телах**. Все непрерывные изменения, возникающие в них *в процессе существования* будут учитываться наличием в области кручения. А с локализованными чисто декартовыми реперами, одинаковыми для всех точек **вмещающей тело** области, реализующими её евклидовость, в этом случае мы связываем **гипотетическое не вращающееся твёрдое тело**, её заполняющее. Реализацией этой идеи может служить любое твёрдое тело, которое сначала **не вращается**, а позже приводится во вращение **на том же месте в трёхмерном пространстве**. Но как идея продолжающее существовать *без вращения.* Именно такие пространственные области мы обычно и рассматриваем как вмещающие трёхмерные области евклидова пространства. Важным при этом оказывается ещё и наличие в более обширной области твёрдых тел, **продолжающих покоиться или двигаться поступательно, относительно которых и фиксируется вращение**. Эти твёрдые тела служат внешней, дополнительной опорой для представления о рассматриваемой области как евклидовой. В системе отсчёта, связанной с этими внешними телами, **материальная точка, находящаяся в центре масс вращающегося тела продолжает двигаться строго поступательно**. Но сейчас мы увидим, что представление о евклидовости верно только в том смысле, что симметричная часть связности в области равна нулю.

Чтобы разобраться в этом вопросе обратимся к нашему определению ([1]§2.12) связности, как коэффициентов в главной линейной по смещению части **активного** преобразования векторов репера при бесконечно малом смещении из данной точки пространства-времени в соседнюю:

$$e^i_\mu + de^i_\mu = (\delta^i_k - \Gamma^i_{jk} dx^j) e^k_\mu = A^i_k e^k_\mu. \tag{4.8}$$

Матрица этого активного преобразования локального репера при каждом конкретном смещении из точки является реализацией одного из элементов самой общей группы допустимых преобразований реперов в точке. Не существенно то, что это преобразование связывает две разные, хоть и бесконечно близкие точки. Важно лишь то, что группы и активных, и пассивных преобразований совпадают. Мы рассматриваем самое простое приближение для описания свойств вещества — приближение абсолютно твёрдого тела. Приближение, подразумевающее ограничение рассматриваемой группы изменений реперов только рамками групп вращений (четырёхмерных) и сдвигов. Растяжения (изменение величин масштабов, всех вместе или по отдельности) не рассматриваются, т.к. тело остаётся эквивалентным самому себе как при смещении в трёхмерном пространстве, так и при смещении во времени (т.е. в процессе его существования). Группа сдвигов при этом учитывается вектором бесконечно малого смещения, *находящимся внутри матрицы преобразования репера.*

Соотношение (4.8) мы перепишем как соотношение между элементами группы четырёхмерных вращений и связностью совместно с вектором бесконечно малого смещения, реализующего преобразование из группы сдвигов:

$$A^i_k = \delta^i_k - \Gamma^i_{jk} dx^j. \tag{4.9}$$

Сравните это выражение с выражением в окрестности единицы для элемента непрерывной группы Ли (4.7). Они практически идентичны, только в одном случае фигурируют вектор смещения и коэффициенты связности, а в другом дифференциалы параметров собственной группы Лоренца и её генераторы. Причём для этой группы и параметры, и генераторы нами уже все описаны в явном виде. Остаётся определить вид коэффициентов связности, который соответствует случаю вращения (рассматриваемого как процесс во времени!) абсолютно твёрдого тела. Теперь вам должно быть ясно, по какой причине я использую здесь именно терминологию и методы теории непрерывных групп Ли.

Потому, что они самым естественным образом сочетаются с нашим определением аффинной связности.

Учитывая, что в системе покоя центра масс нашего вращающегося твёрдого тела мы всегда имеем возможность выбрать направления пространственных осей ортогонального репера любым удобным нам способом с помощью **пассивного трёхмерного поворота**, выражение (4.7) мы можем упростить, оставив минимально необходимое нам для описания процесса вращения число изменяющихся параметров. Самый простой вид оно будет иметь в случае, когда пространственные оси выбраны так, что вращение сводится к вращению с угловой скоростью $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ только в одной плоскости $\{x^1, x^2\}$. Сделать это для абсолютно твёрдого тела мы можем всегда.

Кроме того, рассмотрим простейший случай такого вращения — вращение с не слишком большой **постоянной** угловой скоростью, так чтобы все линейные мгновенные скорости каждой частицы этого тела были малы по сравнению со скоростью света. При таких условиях координаты материальной точки, находящейся на расстоянии $r$ от центра масс (центра вращения) зависят от времени следующим образом:

$$x^1 = r\cos\omega t, \quad x^2 = r\sin\omega t. \tag{4.10}$$

Каждая материальная точка имеет тогда во все моменты времени две зависящие от времени (при отличии радиуса вращения от нуля) компоненты скорости:

$$v^1 = \frac{dx^1}{dt} = -\omega r\sin\omega t, \quad v^2 = \frac{dx^2}{dt} = \omega r\cos\omega t. \tag{4.11}$$

Кроме того, при вращении материальные точки в каждый момент времени подвержены ускорениям

$$\frac{dv^1}{dt} = -\omega^2 r\cos\omega t, \quad \frac{dv^2}{dt} = -\omega^2 r\sin\omega t, \tag{4.12}$$

Вектор бесконечно малого смещения такой точки выглядит так:

$$dx^j = \{v^1 dt, v^2 dt, 0, \mathbf{i}cdt\}.$$

В результате, соотношение (4.9), представляющее собой выражение для преобразования локального репера при бесконечно малом смещении каждой такой материальной точки через связность, запишется в виде

$$A^i_k = \delta^i_k - v^1 dt \Gamma^i_{1k} - v^2 dt \Gamma^i_{2k} - \mathbf{i} c dt \Gamma^i_{4k}. \tag{4.13}$$

Сравнивая с (4.7), мы можем получить систему уравнений для определения отличных от нуля компонент связности. Для этого полезно иметь перед собой явный вид $4 \times 4$ матриц тех генераторов, которые дают вклад в общую матрицу поворота в нашем случае. Таких матриц всего три.

Это матрица $\mathcal{R}_1$, расширение на четырёхмерный случай генератора $R_1$ пространственного поворота в плоскости вращения, представленного в (4.2):

$$\mathcal{R}_1 = -\mathbf{i} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

и две матрицы бустов в плоскостях $\{x^1, x^4\}$ и $\{x^2, x^4\}$:

$$\mathcal{R}_{1*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{2*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Индекс $i$ в (4.7) или (4.13) указывает номер строки в приведённых выше матрицах. Соответственно, индекс $k$ является номером столбца.

При введённых обозначениях систему уравнений для определения коэффициентов связности мы запишем в компактной форме так:

$$-v^1 \Gamma^i_{1k} - v^2 \Gamma^i_{2k} - \mathbf{i} c \Gamma^i_{4k} = \mathbf{i} \frac{d\varphi}{dt} \mathcal{R}_1 + \frac{\mathbf{i}}{c} \left( \frac{dv^1}{dt} \mathcal{R}_{1*} + \frac{dv^2}{dt} \mathcal{R}_{2*} \right). \tag{4.16}$$

Примем во внимание также то, что мы рассматриваем простейший случай вращения с **постоянной** угловой скоростью и коэффициенты связности от времени зависеть не могут. В уравнениях (4.16) в явном виде имеются коэффициенты, включающие $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$. Поэтому от нуля будут отличаться только те компоненты связности, для которых **и справа и слева** имеется одинаковая зависимость от времени в соответствующих коэффициентах уравнения.

Достаточно очевидно также, что при имеющихся в левой части зависимостях коэффициентов уравнений от времени, не нулевые компоненты в связности могут быть только с теми индексами $\{i,k\}$, которым в матрицах $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_{1*}, \mathcal{R}_{2*}$ соответствуют не нулевые значения.

Для $i \neq k$ это 6 пар индексов : $\{i=1,k=2\}$, $\{i=2,k=1\}$, $\{i=1,k=4\}$, $\{i=4,k=1\}$, $\{i=2,k=4\}$, $\{i=4,k=2\}$.

Для первой пары, $\{i=1,k=2\}$, имеем следующее уравнение

$$\omega r\sin\omega t\Gamma^1_{12} - \omega r\cos\omega t\Gamma^1_{22} - \mathbf{i}c\Gamma^1_{42} = -\omega \\ \Rightarrow \Gamma^1_{42} = -\mathbf{i}\frac{\omega}{c}. \tag{4.17}$$

Вторая пара, $\{i=2,k=1\}$, приводит к

$$\omega r\sin\omega t\Gamma^2_{11} - \omega r\cos\omega t\Gamma^2_{21} - \mathbf{i}c\Gamma^2_{41} = \omega \\ \Rightarrow \Gamma^2_{41} = \mathbf{i}\frac{\omega}{c}. \tag{4.18}$$

Третья, $\{i=1,k=4\}$, даёт

$$\omega r\sin\omega t\Gamma^1_{14} - \omega r\cos\omega t\Gamma^1_{24} - \mathbf{i}c\Gamma^1_{44} = -\mathbf{i}\omega^2 r\cos\omega t/c \\ \Rightarrow \Gamma^1_{24} = \mathbf{i}\frac{\omega}{c}. \tag{4.19}$$

Для четвёртой пары, $\{i=4,k=1\}$, получаем

$$\omega r\sin\omega t\Gamma^4_{11} - \omega r\cos\omega t\Gamma^4_{21} - \mathbf{i}c\Gamma^4_{41} = \mathbf{i}\omega^2 r\cos\omega t/c \\ \Rightarrow \Gamma^4_{21} = -\mathbf{i}\frac{\omega}{c}. \tag{4.20}$$

Пятая, $\{i=2,k=4\}$, ведёт к

$$\omega r\sin\omega t\Gamma^2_{14} - \omega r\cos\omega t\Gamma^2_{24} - \mathbf{i}c\Gamma^2_{44} = -\mathbf{i}\omega^2 r\sin\omega t/c \\ \Rightarrow \Gamma^2_{14} = -\mathbf{i}\frac{\omega}{c}. \tag{4.21}$$

И, наконец, последняя, шестая пара, $\{i = 4, k = 2\}$, даёт нам

$$\omega r \sin \omega t \Gamma^4_{12} - \omega r \cos \omega t \Gamma^4_{22} - \mathbf{i} c \Gamma^4_{42} = \mathbf{i} \omega^2 r \sin \omega t / c$$
$$\Rightarrow \Gamma^4_{12} = \mathbf{i} \frac{\omega}{c}. \tag{4.22}$$

Все остальные компоненты связности равны нулю.

Легко видеть, что полученная нами связность **антисимметрична** по нижним индексам: $\Gamma^1_{42} = -\Gamma^1_{24}$, $\Gamma^2_{41} = -\Gamma^2_{14}$, $\Gamma^4_{12} = -\Gamma^4_{21}$. Простейший случай вращения идеального твёрдого тела с постоянной угловой скоростью соответствует наличию во вмещающей это тело области именно **кручения**. Симметричная часть связности остаётся нулевой, и в этом смысле вмещающая тело область всё ещё может рассматриваться как евклидова. То, что компоненты **тензора** (хотя полная связность тензором и не является) постоянны как во времени, так и в пространстве (в пределах тела), является результатом нашего приближения — вращающееся тело полагается нами **абсолютно твёрдым**. Неким цельным объектом, соотношения между частями которого не изменяются ни во времени, ни в пространстве **по определению**. Для реальных вращающихся твёрдых тел это будет, конечно, не так. Но, это будут некие зависимости компонент тензора кручения от положения составляющих его материальных точек во времени и пространстве, а не полное его отсутствие.

Для полученного нами тензора кручения его свёртка, вектор кручения, равен нулю. Почему это так? Сам процесс проведённого нами определения кручения явным образом учитывает совместное действие двух групп — сдвигов и поворотов. А не нулевые свёртки связности описывают не повороты, а масштабирования. В случае кручения не нулевую свёртку тензор кручения может иметь в результате совместного действия масштабирований, сдвигов и поворотов. Приближение абсолютно твёрдого тела исключает наличие масштабирований в группе преобразований локальных реперов составляющих его материальных точек в процессе их общего существования как целого. Для реальных вращающихся тел это вполне может быть и не так. Мы не можем исключить необходимость учёта масштабирований при определённых условиях во вращающихся системах материальных точек.

Заметим, что компоненты полученного нами тензора кручения весьма малы, т.к. в наших приближениях заведомо выполняется условие $r\omega \ll c$. Поэтому практически всегда наличием этого тензора в таких приближениях можно пренебрегать. Однако там, где это может потребоваться, его можно также рассматривать **как дополнительное физическое** поле, а не как свойство геометрии. Точно также, как мы рассматриваем в этих приближениях гравитацию и электромагнетизм. Ясно также, что полученный нами тензор кручения, вследствие того, что связанный с ним вектор кручения тождественно равен нулю, прямого вклада в явления электромагнетизма давать не может.

Хочу особо обратить внимание на вот какой важный момент. Мы получили коэффициенты связности фактически из их определения. Но в какой именно системе отсчёта? В системе отсчёта, связанной с вращающимся твёрдым телом? Нет. Эта связность **должна бы** соответствовать гипотетической, идеальной декартовой системе отсчёта, **локальные реперы которой не изменяются от точки к точке в области**. Начало её отсчёта совпадает с **центром вращающегося абсолютно твёрдого тела**, и система эта полагается **покоящейся относительно всей вмещающей тело области** пространства-времени. Это достаточно очевидно из того факта, что для определения связности мы рассматривали **в том числе и эволюцию репера, покоящегося в этой области именно в такой системе отсчёта в центре масс тела (при $r = 0$)**, репера, получаемого как предел **реально существующего прототипа**. Покоящегося **во все моменты его существования, но, тем не менее, изменяющего своё положение по отношению к бесконечно близкому моменту времени**. Т.е. по отношению к гипотетическому положению тех локальных реперов, которые были бы **обязаны существовать** во всех точках существования этого твёрдого тела при условии **точного соответствия геометрии рассматриваемой области некоторой области евклидова** пространства-времени. Наш тензор кручения определён в декартовой системе отсчёта "**вмороженной**" во вмещающую тела область. Поэтому мы обязаны принять факт отличия полной связности в области от строго евклидовой как **экспериментальное подтверждение** наличия в ней кручения. При этом мы совершенно спокойно можем продолжать полагать эту **вмещающую тела** область просто евклидовой при описании **чисто поступательного** движения твёрдых тел, ведь симметричная часть связности, которая одна и определяет такой тип движения, остаётся строго равной нулю. Отсюда следует применимость законов Ньютона к твёрдому телу, как целому, заменяемому материальной точкой, помещённой в его центр масс. Все вращения **относительно центра масс** требуют особого рассмотрения, учёта наличия кручения в тех областях, в которых они имеют место.

Мы ограничили рассмотрение вращения абсолютно твёрдого тела только вращением в определённой плоскости, $\{x^1, x^2\}$. Однако, повторить выкладки (4.10-4.22) для плоскостей $\{x^1, x^3\}$ и $\{x^2, x^3\}$ с соответствующими изменениями не составит никакого труда. Обозначим угловые скорости в указанных плоскостях через $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$. В результате, можно будет утверждать, что в общем случае вращения твёрдого тела во всех трёх возможных плоскостях, в области будет иметься тензор кручения со следующими компонентами[10]:

$$\begin{aligned} T^1_{24} = -T^1_{42} = T^2_{41} = -T^2_{14} = T^4_{12} = -T^4_{21} = \mathbf{i}\frac{\omega_1}{c}, \\ T^1_{34} = -T^1_{43} = T^3_{41} = -T^3_{14} = T^4_{13} = -T^4_{31} = \mathbf{i}\frac{\omega_2}{c}, \\ T^2_{34} = -T^2_{43} = T^3_{42} = -T^3_{24} = T^4_{23} = -T^4_{32} = \mathbf{i}\frac{\omega_3}{c}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Посмотрим теперь на ситуацию немного иначе, с точки зрения *движения двух материальных точек относительно друг друга.* Ведь наши стандартизованные системы отсчёта всегда привязаны к каким-либо материальным точкам, точнее, к твёрдым

[10]Т.к. мы оставляем возможность использовать для описания области и неинерциальные системы отсчёта, то далее я перехожу к обозначению полученной в этом параграфе связности только как тензора кручения.

телам, даже если мы при этом распространяем их действие на окружающую эти точки и тела область пространства-времени. В случае вращения твёрдого тела можно выделить две характерные точки — одна расположена в центре масс (центре вращения), а вторая на некотором расстоянии $r$ от неё. Да, в твёрдом теле имеется бесконечно много материальных точек, находящихся на расстояниях $0 < r \leq r_0$, где через $r_0$ обозначено максимальное расстояние от центра масс какой-либо из точек тела. Но это не является принципиальным в нашем текущем рассмотрении относительного движения двух материальных точек. Оно будет применимо к любой паре точек вращающегося тела. Более того, выводы будут справедливы и для любых сплошных (и разреженных тоже) сред, в которых имеет место аналогичное относительное движение. И даже в случае наличия в области всего двух материальных точек, их **относительное** движение будет демонстрировать все те же самые эффекты.

Выше мы обсуждали появление в описании сил инерции в тех случаях, когда такое относительное движение происходит с ускорением. Силы эти являются проявлением **только симметричной части** связности. В том числе, и в том случае, когда ускорение своим появлением обязано **отличию движения от поступательного**. А со всяким таким движением можно всегда связать наличие в данной точке пространства-времени у рассматриваемой (движущейся) материальной точки некоторой локальной угловой скорости относительно той материальной точки, которая (возможно) находится в начале координат используемой системы отсчёта. И как мы увидели, этот случай требует ещё и учёта появления в области новых компонент связности — тензора кручения. Ведь, то, что мы рассматривали весьма специальный случай вращения абсолютно твёрдого тела при описании поведения локальных реперов его отдельно взятых точек роли никакой не играет. Во всех случаях, когда относительное движение хотя бы двух материальных точек не сводится к чисто поступательному, необходимо принимать во внимание наличие в области тензора кручения. Тензора кручения, компоненты которого должны быть в общем случае функциями места и времени. Иначе не будет возможности достигнуть полной согласованности всех локальных реперов в области. А чисто поступательное относительное движение материальных точек в мире явление чрезвычайно редкое, можно сказать вообще отсутствует. Просто потому, что даже в простейшем случае системы из двух материальных точек, их относительное движение будет заведомо отличаться от чисто поступательного, поскольку их гравитационное взаимодействие имеет место всегда. И если силы инерции могут быть компенсированы локально выбором подходящей системы отсчёта (связанной **обязательно** с той материальной точкой, которую ранее мы рассматривали как движущуюся неравномерно и не прямолинейно), то кручение описывается тензором, и **никаким** преобразованием систем отсчёта обнулено быть не может. Поскольку уравнение геодезической напрямую зависит только от симметричной части связности, и кручение в явном виде на определение зависимости траектории (локально) от координат не влияет, то никакого противоречия с игнорированием кручения классической физикой и описанием ею же локализованного движения не возникает.

Но полностью игнорировать наличие такого свойства у континуума классическая физика, естественно, не могла. И кручение в ней проявляет себя. Каким же именно способом?

Мы видели, что наличие тензора кручения в области напрямую связано с группой вращений. Конечно, группа сдвигов тоже необходимо участвует в в формировании этого тензора, он учитывает совместное действие двух этих групп, выражающих свойства континуума, на поведение локальных реперов при смещениях от точки к точке. Тем не менее, в некотором смысле, можно сказать, роль группы вращений является при этом определяющей. Определяющей в том плане, что фиксирует ту структуру тензора, которую мы можем видеть в (4.23). А видим мы там для каждого значения верхнего, контравариантного индекса тензора кручения набор **аксиальных** векторов в терминах евклидова пространства. Аналогично выделению аксиального вектора магнитного поля в полном тензоре Максвелла, мы можем, пусть немного более сложным путём, связать определённые компоненты тензора кручения с определением аксиального вектора **угловой скорости** $\boldsymbol{\omega}$ для каждой из трёх пространственных поверхностей. Связь эта возникает из соответствия определения аксиальных векторов угловых скоростей структуре генераторов группы вращений. А такое специальное определение угловых скоростей в классической механике потребовалось для формулировки тех свойств классических систем материальных точек, которые мы привели раньше в §3.4, вводя классическое понятие момента импульса материальной точки и закона его сохранения. В обобщённом виде, эти понятия были определены с помощью аксиальных векторов и для классических систем, состоящих из большого числа материальных точек. Очевидно, эти понятия классической механики (момент импульса, момент сил, их описание с помощью специально введённых в геометрию *аксиальных* векторов и *векторного* произведения векторов) применимы напрямую и к описанию вращения абсолютно твёрдого тела.[11]

Однако, все эти методы, используемые классической механикой для описания мира, к сожалению, ограничены рамками применимости того приближения, в котором они получены. Приближения малых относительных скоростей используемых систем отсчёта. Кроме того, они по тем же причинам имеют ограничения в пространственных размерах систем, к которым их можно применять. Всё, что касается понятия **момента** импульса или **момента** силы, по своему смыслу относится к понятиям не локальным, в которые напрямую входит расстояние между точками системы. И если с ростом расстояний приближение, в котором сформулированы соотношения, перестаёт работать, то и применять эти соотношения становится невозможным. По крайней мере, результаты применения становятся всё менее достоверными **с ростом расстояний от центра вращения**.

[11]Именно для описания вращения твёрдого тела методами классической механики и были введены эти понятия.

В этом плане, та связь между компонентами тензора кручения и классическим понятием угловой скорости, которую мы получили при рассмотрении вращения абсолютно твёрдого тела, вполне возможно сможет помочь в решении возникающих в описании относительного вращения, наблюдаемого в механических системах с очень большими пространственными размерами. Вот каким образом. Да, мы *выразили* компоненты тензора кручения *через* аксиальные векторы угловых скоростей вращения твёрдого тела в отдельных пространственных плоскостях. Но ведь мы должны понимать, что тензор кручения является **характеристикой связности пространства-времени, а не характеристикой свойств твёрдого тела**. И именно его компоненты первичны для описания свойств континуума. Соответственно, если в рассматриваемой области пространства-времени **имеется** не нулевое кручение, то определённую часть его компонент можно (и следует) рассматривать как **локализованные угловые скорости** некоего локализованного “вращения”. Вращения, оторванного от своего центра.

Такой центр, вероятно, должен иметься в какой-то части мира всегда, как **источник** кручения. Так как связность в нашем описании мира появляется не сама по себе, а служит образом **связей между событиями**, а значит и между массивными объектами. И мы видели во второй главе, что если на траектории материальной точки имеется не нулевой вектор кручения, то вокруг этой точки **обязательно** существует определённое им поле кручения. С другой стороны, мы вполне допускаем, что не все необходимые нам для согласованности локальных реперов, описывающих мир, части связности обязательно должны быть сведены к создаваемым таким образом локальными источниками (материальными точками) связностям. Некоторая часть связности может возникать как коллективные эффекты, представляющие собой результат согласования большого числа локальных источников, тем не менее, не локализуемый в применимых к ним терминах. Полученное нами поле кручения в области существования вращающегося твёрдого тела относится именно к таким составляющим связности. Ведь это поле, как мы видели выше, имеет нулевой вектор кручения. А значит, при переходе к приближению, в котором наше твёрдое тело станет материальной точкой, мы не получим возможности его вычислить, т.к. для таких приближений наши возможности вычислять компоненты связности как для поля кручения, так и для электромагнитного поля ограничиваются условием наличия у материальной точки соответствующего заряда. Т.е. ограничиваются обязательным наличием соответствующего не нулевого вектора свёртки компонент связности.

Таким образом, для такого вида кручения "центр вращения" как источник "локализованных угловых скоростей" является синтетическим образом коллективных эффектов **всей системы, всей части мира в целом**. Что, в общем-то, должно быть очевидно из наших представлений о вращающемся твёрдом теле. Ведь вращается оно **относительно центра масс**. И центр масс явным образом определяется как зарактеристика механической системы, а не отдельной её составляющей. Но если для малых размеров системы эта фиктивная точка хорошо определяется в рамках применяемого приближения и именно этой точке приписывается вся суммарная масса системы, то выход за пределы хорошей применимости условий приближения делает это понятие плохо определённым. Вот тут и может помочь апелляция к локализованным в виде тензора кручения геометрическим свойствам области. Ведь именно применимость геометрических представлений о свойствах области (утверждение о евклидовости пространства-времени) нарушается при выходе за рамки приближения малых скоростей и расстояний.

## 4.4 Жидкости и газы

Рассмотрим кратко круг приближений для описания сплошной среды, связанный с отказом от требования сохранения со временем формы области, занимаемой этой сплошной средой. Это означает, что становится возможным **индивидуальное** для каждой материальной точки, составляющей эту среду, изменение во времени её **пространственных** координат. Условие непрерывности (неразрывности) среды в пространстве в процессе её существования является главным ограничивающим эти новые возможности условием. Оно известно как уравнение неразрывности или непрерывности.

Среды, о которых идёт речь, в физике и обыденной жизни называют жидкостями и газами. Разница между этими формами состояния вещества обычно определяется той степенью изменения во времени занимаемого этой средой **трёхмерного объёма**, которая возможна для того или иного конкретного случая. Жидкостью обычно называют такую среду, объём выделенной части которой не изменяется (не сжимаемая жидкость) или изменяется мало (сжимаемая жидкость) при её существовании во времени. Если же изменения объёма, занимаемого средой существенны, то обычно говорят о газе.

И в этих приближениях область пространства-времени, в которой существует выделенный объём рассматриваемых жидкости или газа нами рассматривается как часть евклидова пространства. Т.е. геометрия вмещающей области по-прежнему отделена от физики в этой области. При рассмотрении существования во времени (при возможном движении в пространстве без сохранения формы) и жидкостей, и газов, мы **всегда** в качестве системы отсчёта выбираем процедуры измерения, основанные **на внешних к этой сплошной среде твёрдых телах**. Именно эти твёрдые тела используются для всех наших измерений и их идеальное продолжение в соответствии с правилами евклидова пространства распространяется на все точки вмещающей жидкость или газ области.

Условие неразрывности (непрерывности) сплошной среды, в данном случае жидкости или газа, не является чем-то новым, дополнительным к уже рассмотренным ранее свойствам нашего описания мира. Оно, по сути своей, является всего лишь переформулировкой для конкретных условий требования тождественного исчезновения метрической дивергенции введённого нами тензора энергии-импульса. Требования сохранения всех возможных векторов энергии-импульса, составляющих сплошную среду материальных точек при их распространении на соответствующий континуум.

При этих условиях основной характеристикой сплошной среды вместо точечной массы покоя $m_0$ становится плотность массы, $\varrho = m_0/V$, где $V$ трёхмерный объём, занимаемый жидкостью или газом. Эта величина уже должна использоваться вместо массы и во многих случаях при рассмотрении поведения абсолютно твёрдых тел. А для жидкостей и газов это становится необходимостью в подавляющем большинстве случаев.

Какой геометрический смысл мы обязаны приписать плотности массы? Это настоящая скалярная $\Delta$-плотность. И вот почему. Число событий в четырёхмерном объёме в нашем описании является истинным скаляром, инвариантом нашего описания мира. Как я уже не раз отмечал ранее, масса покоя это ничто иное, как число событий приходящихся на выбранную единицу времени вдоль траектории существования любой материальной точки. При рассмотрении выделенного элемента сплошной среды, его трёхмерный объём непрерывно заполнен материальными точками и существует во времени. Поэтому, разделив массу покоя ещё и на этот трёхмерный объём, мы, естественно, получим удельную величину, число событий, приходящихся на выделенный **четырёхмерный** объём этой области пространства-времени. Т.е. истинную $\Delta$-плотность с точки зрения видов геометрических величин, если устремим величину этого четырёхмерного объёма к нулю. При стремлении **трёхмерного** объёма к нулю плотность массы устремляется к массе покоя соответствующей материальной точки: $\lim\limits_{V\to 0} \varrho = \lim\limits_{V\to 0}(m_0/V) = m_0\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$.

Поэтому, опираясь на рассмотрение, проведённое в §2.4, перепишем (2.30) в форме, более подходящей для описания свойств сплошной среды[12]:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_0^{ik} &= -m_0 c\,\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)\tfrac{dx^i}{dl}\tfrac{dx^k}{dl} = \\ &= -\lim_{V\to 0}(m_0/V)c\tfrac{dx^i}{dl}\tfrac{dx^k}{dl}. \end{aligned} \qquad (4.24)$$

Таким образом, распределённую в выделенной области сплошной среды плотность тензора её энергии-импульса, рассматриваемую как функцию точки в этой области, следует записывать так:

$$\mathfrak{T}_0^{ik} = -\varrho c\,\frac{dx^i}{dl}\frac{dx^k}{dl}. \qquad (4.25)$$

Тогда её метрическая дивергенция, как и в §3.2 (3.16), вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_i\mathfrak{T}_0^{ik} &= -\varrho c\,\frac{dx^i}{dl}\widetilde{\nabla}_i\frac{dx^k}{dl} - c\frac{dx^k}{dl}\widetilde{\nabla}_i(\varrho\frac{dx^i}{dl}) = \\ &= -\varrho c\frac{\widetilde{D}}{dl}\frac{dx^k}{dl} - c\frac{dx^k}{dl}\widetilde{\nabla}_i(\varrho\frac{dx^i}{dl}) = 0. \end{aligned} \qquad (4.26)$$

Т.к. **для каждой** частицы сплошной среды по-прежнему выполняется уравнение геодезической $\frac{\widetilde{D}}{dl}\frac{dx^k}{dl} = 0$, это уравнение превращается в требование

$$\widetilde{\nabla}_i(\varrho\frac{dx^i}{dl}) = 0. \qquad (4.27)$$

Требование это тривиально для единственной материальной точки и становится нетривиальным условием только на **совместное** движение совокупности материальных точек, составляющих некоторый выделенный **непрерывный** объём сплошной среды.

[12]Индекс нуль указывает на то, что речь идёт о тензоре энергии-импульса именно вещества, рассматриваемого как сплошная среда. Если в этой области имеются физические поля, т.е. с точки зрения геометрии следовало бы описывать её более сложной связностью, чем евклидова, то они должны описываться дополнительными, своими тензорами энергии-импульса. Естественно, в нуль должна обращаться дивергенция **полного** такого тензора, что приведёт к модификации приведённых здесь уравнений.

Т.к. $dl = cdt$, $dx^i/dl = \{v^\alpha/c, \mathbf{i}\}$, то (4.27) можно переписать в привычной для классической физики форме:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + div(\varrho \mathbf{v}) = 0, \tag{4.28}$$

где $\mathbf{v} = \{v^\alpha\} = \{dx^\alpha/dt\}$.

При наличии в области каких-либо сил (что фактически означает в нашем описании использование неинерциальной системы отсчёта или отличие геометрии от евклидовой), это уравнение модифицируется соответствующим образом. Но мы не будем стараться изложить здесь всю наработанную к настоящему моменту теорию гидродинамики. Здесь нам достаточно высветить тот путь, на котором эта теория естественным образом сочетается с нашим описанием мира геометрическими понятиями, и какие соглашения (приближения) при этом принимаются.

Кроме того, если необходимо учитывать отличие тензора кручения для этой среды (в случае вращения всей рассматриваемой массы вещества или только её части), для его определения можно, в принципе, воспользоваться методом, описанным в предыдущем параграфе. Однако, в остальных приложениях этот тензор следует рассматривать как **дополнительное физическое** поле, присутствующее в этой области.

Помимо уравнения неразрывности, для описания различных явлений в жидкостях и газах используется второй закон Ньютона применительно к поведению выделенных в рассматриваемой среде малых объёмов вещества, служащих в этих приближениях заменой понятия материальной точки. Всё отличие состоит в том, что при этом работают с плотностью вещества, а не конкретной массой покоя. Как мы помним, второй закон Ньютона даёт возможность связать ускорение (т.е. изменение скорости) элемента вещества с наличием в среде тех или иных эффективных сил. Являющихся в этом приближении заменой всех отклонений связности от евклидовой. При этом обязательно учитывается наличие сил давления. Остальные виды сил (и внутренние, обусловленные свойствами вещества, и внешние для рассматриваемой среды) могут учитываться по мере необходимости.

В результате можно определить распределение вектора скорости (импульса) по объёму сплошной среды. Среди всевозможных таких распределений особое место занимают **колебания** и **волны** в сплошной среде. Так называют **периодические** (или квазипериодические) во времени отклонения значений тех или иных параметров среды от некоторых средних местных значений. Волны могут быть как бегущие, так и стоячие. Зависимость параметров от места и времени обычно представляют в виде тех же самых стандартизованных функций, что были нами использованы для описания электромагнитных волн. Но необходимо ясно понимать, что все эти виды волн отличаются кардинально от электромагнитных (включая волны кручения). Это явления **коллективные**, синтетические. События их “излучения” и “поглощения” (лучше, наверное, говорить “генерации” и “затухания”) тоже коллективные, и ни в коем случае не могут быть сведены к отдельным элементарным событиям. Эти волновые явления совпадают с фундаментальными для континуума по описанию, но не по смыслу.

## 4.5 Термодинамика и статистическая физика

Пока мы касались только рассмотрения вещества именно как сплошной среды, обращая внимание, в основном, лишь на те его распределённые характеристики, которые имеют смысл и при переходе к рассмотрению **того же самого вещества** как материальной точки. Т.е. при переходе к таким расстояниям в пространстве, для которых выделенный пространственный объём, занимаемый веществом, вполне можно считать пренебрежимо малым. Конечно, в рассмотрении появляются и многие характеристики, которые не связаны с понятием материальной точки, а могут быть введены только при рассмотрении вместо материальных точек эквивалентных им “малых объёмов”, “крупных частиц”. Тем не менее, все они восходят к понятиям массы, скорости (импульса) и силы.

Однако, для полноценного описания вещества как сплошной среды только этих его свойств совершенно недостаточно. Нам привычны такие качественные понятия о свойствах вещества, как тёплое и холодное, твёрдое, вязкое или текучее. Всё это применительно к разным типам вещества. Вполне естественно, что все такие свойства вещества находят своё отражение и в физике, только как более чётко определённые, соответствующие требованиям науки, понятия. Понятия, однако, не имеющие прямых аналогов в приближении материальной точки.

Среди них, пожалуй, важнейшим является понятие о **температуре** вещества. Это понятие, совместно с представлением о количестве **тепла**, связанного с изменением температуры, было сначала совершенно самостоятельным понятием в физике. Настолько самостоятельным, что первоначально разрабатывались представления о *специальной жидкости, теплороде*, перетекание которой обеспечивает для разных выделенных объёмов вещества возможность обмениваться между собой теплом.

Описание явлений, связанных с изменением температуры вещества, и, в более общем подходе, взаимодействие в этом плане некоторых **выделенных количеств** вещества друг с другом, объединено в физике в разделе, который называют “**термодинамика**”. Этот раздел физики строился изначально как вполне самостоятельная, **феноменологическая** теория. В нём были определены собственные, специфические только для этого раздела физики величины и способы их измерения, включая те или иные базовые единицы для каждой из величин. К таким феноменологическим величинам относятся, в первую очередь, температура $T$, давление $P$ и **теплота** $Q$.

Конечно, имеется и некоторая часть величин термодинамики, общая, по необходимости, с динамикой материальной точки. Например, объём $V$, занимаемый выделенными количествами вещества остаётся вполне геометрическим понятием, одинаково определённым в рамках геометрии Евклида для всех разделов физики. Также как и общая масса выделенного вещества, совместно с его плотностью.

Несколько иначе обстоит дело с понятием энергии в термодинамике. По сути дела, в этом разделе физики вводятся в рассмотрение свои, особые формы энергии — внутренняя, свободная, поверхностная виды энергии и энтальпия. Да и теплота вместе с работой тоже являются по своей сути видами энергии. Хотя при этом сохраняется понимание того, что всё это именно **формы** энергии, и могут иметь одну и ту же единицу измерения, хотя для некоторых форм могут использоваться свои собственные единицы.

Нужно отметить, что развитие термодинамики происходило совместно с уточнением и оформлением теории динамики материальной точки, твёрдого тела и иных форм существования вещества. Поэтому многие формировавшиеся идеи физики развивались параллельно, в постоянном взаимопроникновении различных, казавшихся мало связанными теоретических течений. Остановимся на основных понятиях именно темодинамики, как сформировавшейся феноменологической теории о свойствах вещества.

Первая группа понятий формирует представление о предмете теории и ограничениях её применения в описании вещества. По сути дела, совокупностью этих понятий устанавливается то *приближение к описанию мира*, в котором можно применять методы термодинамики. Заметьте, речь идёт о дополнительных ограничениях к общим ограничениям классических описаний мира. Приближение термодинамики является в определённом смысле кентавром. Оно рассматривает выделенные количества вещества, с одной стороны, как некий объём **сплошной среды**, и, с другой стороны, как совокупность некоторого **конечного** числа **частиц этого вещества**, как совокупность материальных точек, массы которых определяются видом вещества. Точнее, именно массы выделяемых термодинамикой частиц являются определяющим вид данного вещества параметром. Я имею здесь ввиду молекулярную или атомную массу (вес) каждого конкретного вещества. Именно она является главной характеристикой вещества для термодинамики.

Довольно ясно, что здесь имеется явное противоречие, противоречие отождествления непрерывного с дискретным, которое снимается точно также, как мы это сделали в самом начале этого тома — число частиц полагается настолько большим, что для термодинамики её основные феноменологические величины можно рассматривать как **непрерывные**. Так что предметом термодинамики являются те количества вещества, которые содержат очень большое число частиц. Какое это "очень большое" число? На этот вопрос отвечает одно из **характеристических чисел** термодинамики — постоянная Авогадро, $N_A = 6.022140857(74) \cdot 10^{23}$моль$^{-1}$. Это число **определяет** количество молекул или атомов вещества в одном **моле**. Здесь заложена тавтология, т.к. сам моль, как единица количества вещества, определён требованием равенства в нём числа частиц именно числу Авогадро [13]. Однако, изначально число это было получено экспериментально, как число частиц (атомов) углерода в 12 граммах этого вещества. Много позже, после создания таблицы Менделеева и квантовой механики, и формирования представлений о строении атомных ядер, стало понятно, что масса моля для каждого вещества определяется как число граммов, равное его молекулярной или атомной массе, выраженной в единицах атомной массы. Поскольку единицы атомной массы определены как 1/12 массы атома углерода, а масса атома углерода **почти равна** массе его ядра, состоящего, в основном, из 12 нуклонов (протонов и нейтронов), то число Авогадро, полученное для углерода, точно также работает и для других веществ. Ведь массы атомов всех веществ определяются, главным образом, массами их ядер, которые всегда содержат целое число нуклонов. Влиянием наличия разных изотопов одного и того же вещества и дефектом масс нуклонов, образуюших ядро, в приближениях термодинамики обычно пренебрегают.

Достаточно взглянуть на число Авогадро, чтобы понять, что

[13] В настоящее время число Авогадро фиксировано принудительно и полагается теоретической постоянной. Соответственно, такая единица количества вещества как моль определена через число Авогадро и атомную массу вещества. При таком подходе противоречий в определении нет.

"большое число частиц" для термодинамики набирается уже для не слишком маленьких долей молей любого вещества.

Вторым условием на применение соотношений термодинамики является ограничение только такими количествами вещества, которые находятся или в состоянии **термодинамического равновесия**, или близки к нему. Тогда говорят о **термодинамической системе**.

Состояние термодинамического равновесия понятие феноменологическое, и, поэтому, определённое не очень чётко. Из большого числа опытов следует, что всякая термодинамическая система, достаточно хорошо изолированная от внешнего мира, при неизменных во времени условиях приходит в состояние термодинамического равновесия. Это состояние характеризуется **неизменностью термодинамических параметров** системы. По сути дела, именно на неизменности этих макропараметров, таких, например, как температура, и базируется представление о термодинамическом равновесии.

Если бы методы термодинамики могли применяться только к строго равновесным системам, то пользы от них было бы мало. Однако, они вполне работают именно при описании **изменений** термодинамических (макро) параметров систем, при условии, что они изменяются **достаточно медленно**, так что весь процесс можно приближённо рассматривать как последовательный переход системы через состояния термодинамического равновесия. Как постепенное изменение со временем параметров, характеризующих эту систему. Естественно, при этом подразумевается, что все изменения в термодинамической системе происходят **при изменении внешних условий**, в которых система находится. Именно для таких процессов и сформулированы **начала термодинамики**, составляющие существо этой феноменологической теории. По сути дела, в такой форме эта теория говорит именно о **взаимодействии** термодинамических систем с внешним, окружающим их миром. Взаимодействии с такими же термодинамическими системами, (тогда подразумевается, что окружающий мир в данном случае тоже рассматривается как сплошная среда), или с системами механическими, описываемыми только с позиций динамики (например, поршень паровой машины). Такой подход полностью находится в русле рассмотрения нами мира в классических приближениях. Ведь само понятие материальной точки, с которого мы начали описание классических приближений, можно тоже рассматривать как крайний, предельный случай термодинамической системы. Но такой случай, когда наличием у термодинамической системы именно соответствующих параметров можно пренебречь. А окружающий мир тоже сводится к предельному случаю "пустоты". Вы спросите, когда же это можно сделать? На тех расстояниях от термодинамической системы, по сравнению с которыми её размеры (объём) становятся пренебрежимо малыми, и в окружающем её пространстве нет других таких систем.

"Начала" термодинамики являются условиями на **изменение** как термодинамических параметров вещества выделенной термодинамической системы, так и внешней для неё части мира, взаимодействие с которой принимается во внимание. Термодинамических параметров имеется два вида. Одну группу составляют такие, которые являются **одинаковыми для всей системы**, одними и теми же для любой её выделенной части. К ним относятся температура $T$ и давление $P$. Их ещё называют иногда *интенсивными или неаддитивными* параметрами. Другая группа образована *аддитивными или экстенсивными* параметрами, такими, что их величины **пропорциональны объёму выделенной части** системы. К таким параметрам относятся, например, внутренняя энергия и энтропия. С развитием термодинамики, с распространением её методов и на открытые (т.е. допускающие обмен веществом с окружающим миром) системы, Гиббсом было введено представление о **термодинамических потенциалах** системы. К ним относятся внутренняя энергия, энтальпия, свободная энергия и другие формы энергии, которые часто вводятся для описания некоторых конкретных случаев. Немного особняком стоят такие параметры системы как объём $V$ и масса выделенного этой системой вещества.

Объём является понятием геометрическим, но в контексте термодинамики он становится **изменяемым свойством** термодинамической системы, её аддитивным параметром. В рамках приближения евклидова **вмещающего, не изменяющегося** пространства такой подход вполне обоснован. То, что не описывается евклидовой геометрией вынесено в физику. Масса, как я уже много раз говорил, является в классических приближениях внешним параметром для всякой теории. Однако, масса, или чаще используемая вместо неё плотность, тоже могут рассматриваться в термодинамике именно как термодинамические параметры системы. Если масса в этом случае будет аддитивным параметром, то плотность является интенсивным.

Феноменологические (т.е. являющиеся обобщением огромного числа опытных данных) законы, которым обязаны подчиняться **все термодинамические системы**, называют **началами термодинамики**. Таких законов обычно выделяют три:

**Первое начало термодинамики** формулируется как утверждение, что вся теплота $\delta Q$, полученная термодинамической системой идёт на увеличение её внутренней энергии $dU$ и на возможно производимую этой системой работу над внешним миром $\delta A$:

$$\delta Q = \delta A + dU. \tag{4.29}$$

Это не что иное как формулировка закона сохранения энергии применительно к термодинамике[14]. Через $dU$ здесь обозначено изменение внутренней энергии системы. Т.к. эта величина характеризует именно состояние системы, то её изменение мы обозначили как полный дифференциал некоторой функции, аддитивного термодинамического параметра системы. Работа $A$ является для системы внешним параметром, поэтому её изменение мы обозначили символом $\delta$, также как изменение количества теплоты.

[14]Исторически именно развитие термодинамики было одним из истоков понимания того, что энергия существует в разных формах (с точки зрения разных феноменологических описаний мира), которые могут только превращаться друг в друга.

При этом положительными полагаются работа, **совершённая системой**, и теплота, **поступившая** в систему.

Смысл понятия "работа" достаточно ясен. Как правило, речь идёт о механической работе — чаще всего о работе при перемещении чего-то. Например, при изменении объёма системы совершаемая ею (или над нею) работа пропорциональна одному из интенсивных параметров системы, давлению: $\delta A = PdV$. Собственно, именно из этих соображений и было сформулировано понятие "давление" для термодинамических систем.

Понятие "теплота" гораздо более расплывчато. Фактически, в рамках феноменологической термодинамики это понятие определяется только как "некая энергия, **изменяющая температуру** системы". Если температура, интенсивный параметр системы, повысилась, то в систему "поступила теплота". И наоборот.

С этим расплывчатым понятием связано **второе начало термодинамики**. Все опытные факты настойчиво говорят, что при контакте двух термодинамических систем с разной температурой тепло **самопроизвольно** передаётся от более нагретого тела к менее нагретому. Это общее утверждение было формализовано довольно загадочным образом — оказалось, что для всякой термодинамической системы **можно ввести** ещё один характеризующий эту систему **аддитивный** параметр $S$, названный **энтропией**, изменение которого (*полный дифференциал, т.к. параметр определяется именно как функция состояния системы*) записывается как отношение изменения **поступившего** в систему тепла к её температуре:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \tag{4.30}$$

С введением энтропии удалось показать, что эволюция любой термодинамической системы может быть **полностью** описана с использованием всего лишь трёх параметров — температуры $T$, внутренней энергии $U$ и энтропии $S$. Два из которых можно полагать независимыми. При этом второе начало термодинамики формулируется как утверждение, что для любой **изолированной** термодинамической системы эволюция через состояния термодинамического равновесия происходит только при условии постоянства или роста энтропии.

В **третьем начале термодинамики**, которое часто называют теоремой Нернста, речь идёт о поведении энтропии при предельном уменьшении температуры системы. Утверждается, что для температуры, параметра напрямую связанного с **количеством теплоты**, имеющимся в системе, *индикатора этого количества*, должен существовать предел, соответствующий **теоретическому представлению об отсутствии в системе тепла**, и этот предел можно принять за абсолютный нуль для температуры[15]. Теорема Нерста говорит, что при приближении температуры системы к абсолютному нулю её энтропия перестаёт зависеть от каких бы то ни было термодинамических параметров и, также как и температура, имеет конечный предел. Значение энтропии при абсолютном нуле обычно полагают равным нулю. Как и два первых начала, это утверждение является **обобщением опытных данных**, не смотря на то, что его и называют теоремой. Это теорема, *выведенная из опыта, а не из*

[15] То, что мы для определения температурной шкалы можем выбрать любую удобную нам единицу измерения, и любое начало отсчёта, не отменяет необходимое свойство пропорциональности параметра “температура” некоему подразумеваемому нами “количеству теплоты”, накопленному термодинамической системой. Вот эта пропорциональность и определяет специальную, выделенную **абсолютную шкалу температуры**. Её называют шкалой Кельвина. Для этой шкалы остаётся свобода в выборе единицы измерения, называемой традиционно “градус”. Градус Кельвина и градус Цельсия совпадают. Исторически, шкала Цельсия появилась раньше шкалы Кельвина. В ней за нуль выбрана точка замерзания воды, а за 100 градусов — точка кипения при атмосферном давлении. Это определение плохо воспроизводимо. В шкале Кельвина второй опорной точкой выбрана тройная точка воды (лёд, вода и пар находятся в равновесии). Отстоит она от абсолютного нуля температуры на 275.15 градуса Кельвина. Такое странное число выбрано для того, чтобы градус Кельвина совпадал с градусом Цельсия. Но, т.к. первый теперь определён точнее, то уже второй считается равным градусу Кельвина. Начало отсчёта абсолютной шкалы Кельвина оказывается строго фиксированным, т.к. “количество теплоты”, имеющееся в системе, **не может быть отрицательным**. Но, в пределе, может считаться нулём. В термодинамике так принято считать *по определению*. А на вопрос, почему это *должно быть* так, отвечает уже статистическая физика.

*абстрактных аксиом.*

Термодинамика имеет развитый аппарат, позволяющий изучить поведение многих термодинамических систем оставаясь только в рамках её собственных понятий. Естественно, с привлечением понятий механики там, где речь идёт о разных видах работы. Однако, используемые в термодинамике понятия в определённом смысле оторваны от других понятий физики. В большей или меньшей степени, но оторваны. Особенно загадочным было (и до некоторой степени всё ещё остаётся) понятие об энтропии, понятие далеко отстоящее от нашего непосредственного опыта.

Эта ситуация всегда была мало удовлетворительной. И одним из важнейших шагов в развитии физики, как науки, оказалось объединение понятий термодинамики и динамики материальной точки. Точнее, вывод базовых понятий термодинамики из свойств материальной точки как **синтетических, обобщающих** понятий. Понятий, возникающих как способ описания общих свойств больших количеств материальных точек. Параметров, описывающих **общие** свойства больших количеств материальных точек **как совокупностей**. О таких количествах материальных точек, объёдинённых какими-либо условиями (например, находящихся в некотором выделенном объёме трёхмерного пространства), часто принято говорить как об “ансамблях частиц”. Температура (как и многие другие аналогичные характеристики) является способом описания именно ансамблей частиц. Это понятие не может, не должно применяться к самим частицам в тех случаях, когда их следует рассматривать индивидуально. Даже если этих частиц много. У частицы нет температуры, давления и т.д. Всё, что есть, это вектор энергии-импульса. Ну и его составляющие, конечно (масса и скорость). Температура, давление и пр. являются величинами, характеризующими **распределения** по тем или иным значениям вектора энергии-импульса составляющих ансамбль материальных точек.

Такой подход к пониманию природы температуры, давления и других аналогичных характеристик вещества стал возможен только после признания того факта, что все виды вещества, все типы сплошных сред на самом деле **не являются** сплошными, непрерывными средами, в которых **любые, сколь угодно малые их частицы эквивалентны друг другу по всем свойствам**. В результате сформировалась гибридная форма описания вещества как сплошной среды. С одной стороны, такие **коллективные** характеристики сплошной среды, как температура, давление, внутренняя энергия и другие, рассматриваются как **непрерывные функции** координат точки, пространственных и временной, в рамках представлений о вмещающем вещество пространстве как о евклидовом. С другой стороны, вещество рассматривается как совокупность очень большого числа материальных точек, заполняющих некоторый объём в этом пространстве. И два этих подхода, два разных приближения объединяются в единое классическое приближение, применяются одновременно, с помощью представлений о статистике и вероятностях **микросостояний**, порождающих **макросостояние** рассматриваемого выделенного трёхмерного объёма вещества. Исторически, вопросами определения макросостояний вещества на базе различных представлений о возможных микросостояниях занимается специальный раздел физики, носящий название **статистическая физика**.

Главной идеей статистической физики является представление о том, что все термодинамические параметры, характеризуют только макросостояние вещества как сплошной среды. А каждому такому макросостоянию может соответствовать некоторое, очень большое, или даже бесконечно большое число микросостояний ансамбля частиц. При этом описание мира **отказывается** от слежения за историей **каждой** частицы в ансамбле, как мы делали это при описании динамики материальной точки или, даже, твёрдого тела и динамики жидкости. Вместо этого, во главу угла ставится определение **вероятности** того, что сколько-то частиц имеют заданное значение вектора энергии-импульса в рассматриваемый момент времени. Само собой, предполагается, что вероятность того, что любая из частиц имеет всегда какой-то **вполне определённый** вектор энергии импульса (нам не известный по простой причине — частиц слишком много и уследить за ними мы не можем) равна единице. *Вероятность возможности того или иного описания области мира появляется как инструмент, признающий невозможность точно отследить эволюцию каждой выделяемой в этой области её малой части, но позволяющий описать саму эту область в среднем, приближённо, с помощью новых, обобщённых для области параметров.* При этом **всё ещё допускается** сама возможность описать эволюцию во времени любой конкретной выделенной части области (частицы вещества) **точно**.

Микросостояния системы, состоящей из $N$ частиц [16] того или иного вида характеризуются текущим, имеющимся в данный момент времени конкретным распределением **плотности вероятности** того, что каждая из частиц имеет некоторое значение того или иного физического параметра. Или он попадает в бесконечно малый интервал значений, если может меняться непрерывно. Параметра, свойственного именно отдельно взятой частице из ансамбля. Фактически, это может быть только скорость (её модуль или компоненты), или её импульс, или энергия. Ведь иных характеристик у материальных точек нет (в классических приближениях).

Конечно, при таком подходе возникает не одно гибридное классическое приближение, а целый их класс, зависящий от тех предположений, тех видов ограничений, которые накладываются на свойства составляющих вещество частиц. Эти ограничения (касательно свойств частиц, составляющих вещество) могут постепенно сниматься, вплоть до перехода от классических приближений к квантовым. При этом вещество как целое всё ещё может рассматриваться как сплошная среда. Сейчас мы не бу-

[16] Если частицы полагаются классическими, то речь идёт о классической статистической физике. В ином случае в дело вступает квантовая статистика, которая отличается от классической. Даже для большого числа частиц результаты, полученные с помощью квантовых представлений о микросостояниях, могут давать параметры макросостояний, отличающиеся от тех, которые даёт классическая статистика.

дем рассматривать все возможности на этом пути, а остановимся на некоторых самых важных деталях самого простого такого гибридного приближения — приближения идеального газа.

В этом приближении составляющие вещество частицы рассматриваются как идеальные материальные точки, всё возможное взаимодействие между которыми сводится только к упругим соударениям. Для некоторого фиксированного объёма идеального газа, находящегося в полном термодинамическом равновесии и в покое, как целое, при отсутствии каких-либо иных внешних для этой системы сил (или других влияний внешнего мира), распределения плотности вероятности составляющих его частиц иметь ту или иную скорость в заданном направлении, или импульс, или модуль скорости, или кинетическую энергию были получены Д.К.Максвеллом и заслуженно носят его имя. При этом важнейший параметр термодинамической системы, её температура, был **однозначно связан** с величиной средней кинетической энергии молекул или атомов идеального газа.

Основой всей этой группы распределений является распределение плотности вероятности для частицы иметь скорость в заданном интервале для определённого, фиксированного направления. При этом важным, определяющим моментом служит то, что в трёхмерном евклидовом пространстве при указанных выше условиях нет выделенного направления, все они равноправны. А значит сама плотность вероятности от выбора направления зависеть не может. Результатом является то, что распределение плотности вероятности для компоненты скорости $v^{\alpha}$ обязано быть **нормальным**, т.е. экспоненциальным распределением Гаусса. Вывод этого результата Максвеллом весьма прост, но я не буду его здесь приводить. Хочу только отметить, что его можно, в принципе, предвосхитить из чисто математических соображений. В математике имеется так называемая *центральная предельная теорема*, которая говорит, что если число элементарных событий, имеющих те или иные (самые разные) плотности вероятности реализоваться становится **достаточно** большим, то итоговая плотность вероятности **стремится с ростом числа**

**событий к нормальному распределению**.

Нормальное распределение (Гаусса) для плотности вероятности случайной величины $x$ выглядит следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (4.31)$$

Здесь через $\mu$ обозначено **математическое ожидание** случайной величины (т.е. наиболее вероятное её значение), а через $\sigma$ — её **стандартное отклонение** или **вариация** (в интервал $\{\mu - \sigma, \mu + \sigma\}$ случайная величина попадает в 68% случаев её реализации). Коэффициент перед экспонентой получен из требования нормировки. Вероятность для случайной величины иметь хоть какое-то значение обязана равняться единице: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Сравнение распределения (плотности вероятности) Максвелла для скоростей, которые имеют частицы идеального газа в некотором направлении с приведённым выше нормальным распределением позволяет говорить, что это одна и та же плотность вероятности, только с конкретными параметрами — наиболее вероятное значение скорости в этом (любом) направлении равно нулю, и квадрат стандартного отклонения пропорционален температуре и обратно пропорционален массе отдельной частицы, $\sigma^2 = kT/m$ :

$$f(v^\alpha) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m(v^\alpha)^2}{2kT}}. \qquad (4.32)$$

Если с равенством нулю наиболее вероятной скорости в каком-либо направлении всё ясно —термодинамическая система как целое находится в покое по принятым нами условиям, то вопрос о том, что следует понимать под стандартным отклонением для распределения таких скоростей требует внимательного обсуждения. Точнее, нужно уяснить, что нам может дать знание квадрата этого стандартного отклонения.

Величина $\sigma^2$ позволяет вычислить среднеквадратичное значение самой случайной величины. Для нормального распределения (4.31) $< x^2 >= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \sigma^2 + \mu^2$. Акцент на этой характеристике случайной величины, её среднеквадратичном значении, отнюдь не случаен. Поскольку у нас сейчас идёт речь о скорости, то, как мы хорошо знаем, в нерелятивистском приближении квадрат *модуля* скорости отдельной частицы даёт нам (при умножении на $m/2$) её кинетическую энергию. Т.е., определяя среднеквадратичную скорость в ансамбле частиц, мы фактически определяем **среднюю по ансамблю кинетическую энергию**. У нас имеется среднеквадратичная скорость для движения только по одному из трёх возможных направлений. Однако, т.к. по условию все направления равноправны, то это означает, что все три таких скорости одинаковы, поскольку одинаковы стандартные отклонения скоростей. Система координат у нас стандартизованная, значит все три базисных орта, а значит и скорости в этих направлениях взаимно ортогональны. Следовательно, $< v^2 >= \sum_{\alpha=1,2,3} < (v^\alpha)^2 >$. Все три наиболее вероятные скорости, или их математические ожидания $\mu^\alpha$ в нашем случае равны нулю. Значит $< (v^\alpha)^2 >= \int_{-\infty}^{+\infty} (v^\alpha)^2 f(v^\alpha) dv^\alpha = \sigma^2$. Поэтому мы можем полагать, что для рассматриваемого распределения по скоростям средняя кинетическая энергия частицы идеального газа

$$< E_{\text{кин}} >= \sum_{\alpha=1,2,3} < E^\alpha_{\text{кин}} >= \frac{m}{2} \sum_{\alpha=1,2,3} < (v^\alpha)^2 >= \frac{m}{2} 3\sigma^2.$$

Средняя по ансамблю частиц их кинетическая энергия — это динамическая, фундаментальная и вполне понятная нам **общая, единая** характеристика **именно ансамбля частиц как целого**. Интенсивный параметр всего ансамбля частиц.

Для термодинамических систем мы ввели похожее феноменологическое понятие — это понятие называется “температура”. И мы можем, даже обязаны, признать, что температура идеального газа и средняя энергия составляющих его частиц, по крайней мере, пропорциональны. Причина такого вывода состоит в том, что имеется огромное количество опытов, утверждающих тот факт, что кинетическая энергия может превращаться в теплоту, а значит изменять температуру вещества.

Таким образом, соотношение

$$\frac{3}{2} kT = 3 < E^\alpha_{\text{кин}} >= 3 \frac{m}{2} < (v^\alpha)^2 >= 3 \frac{m}{2} \sigma^2, \tag{4.33}$$

формализующее такую пропорциональность, является **определением** абсолютной (потому что нуль этой величины соответствует нулю, отсутствию кинетической энергии частиц) температуры $T$ термодинамической системы (в случае идеального газа) с позиций статистической физики. С позиций описания идеального газа как совокупности большого числа частиц, движущихся с разными скоростями, но объединённых внешними условиями в единую термодинамическую систему. Систему, находящуюся в термодинамическом равновесии. Т.е. имеющую не изменяющееся во времени макросостояние, описываемое средними по микросостояниям параметрами. Наличие коэффициента $\frac{3}{2}$ перед $kT$ обусловлено историческими причинами, о которых я немного скажу ниже.

Коэффициент $k$ называют **постоянной Больцмана** и он фактически является ничем иным как соотношением между двумя разными единицами для измерения кинетической энергии, принятыми в разных разделах физики самостоятельно ещё тогда, когда полностью отсутствовало понимание того, что речь идёт в них об одной и той же величине, рассматриваемой с разных позиций.

Ведь измеряем мы температуру в собственных единицах, градусах Кельвина. А кинетическую энергию мы измеряем в других единицах, джоулях или эргах, которые, в свою очередь, являются комплексами более фундаментальных для нас единиц — килограммов (граммов), метров (сантиметров) и секунд. А сейчас мы знаем также, что и эти единицы мы, в конце концов, должны и можем свести к единственной непосредственно определяемой нами единице времени.

Поэтому значение постоянной Больцмана, также как и значение постоянной Авогадро, первоначально было получено экспериментально, как отношение двух чисел, результатов измерения методами механики и методами феноменологической термодинамики одного и того же количества энергии. Естественно, с некоторой степенью неточности. Однако, в настоящее время её значение просто фиксировано, взято наилучшее измеренное и постулирован её смысл как **свободно выбранного** теоретически постоянного коэффициента. Таким образом несколько изменено (точнее, сделано далее независимым от принятого ранее определения) определение градуса Кельвина для шкалы абсолютной температуры.

Статистическая физика идеального газа позволяет легко понять происхождение, природу не только такого параметра термодинамических систем, как абсолютная температура, но и большинства других термодинамических параметров. Точно также становится ясным и прозрачным смысл давления и внутренней энергии. Давление тоже явлется интенсивным макропараметром, средним по ансамблю частиц газа **импульсом** его частиц. Поскольку у нас имеется полная изотропия направлений движения частиц в газе, постольку давление тоже имеет такую же изотропию. То, что давление и температура являются для термодинамики **отдельными** интенсивными параметрами является следствием разделения единого вектора энергии-импульса частиц на две кажущихся независимыми величины — импульс и энергию — результатом нерелятивистского приближения в нашем описании вещества. Внутренняя энергия как аддитивный параметр термодинамики естественным образом возникает при рассмотрении полной кинетической энергии, запасённой в веществе "по частям", в том или ином выделенном объёме, содержащем разное количество частиц.

Намного сложнее обстоит дело с пониманием природы и смысла последнего важнейшего аддитивного параметра термодинамики — энтропии вещества $S$. Для всех трёх выше перечисленных параметров, $T, P, U$, мы имеем методы их измерения, и, таким образом, можем непосредственно убедиться в правильности их интерпретации статистической физикой. Для энтропии вроде бы это не так. Этот параметр в феноменологической термодинамике получен как теоретическое следствие совокупности опытных данных. Причём рассуждения, ведущие к признанию необходимости существования такого параметра термодинамической системы достаточно длинны и не очень легко поддаются анализу

— что, откуда и почему.

Важнейший шаг на пути понимания природы энтропии был сделан Л.Больцманом. К сожалению, это достижение[17] стоило выдающемуся учёному нервов, здоровья, и, в конечном счёте, жизни... Больман связал энтропию термодинамической системы с вероятностью микросостояний $W$, совместимых с её макросостоянием:

$$S = k \ln W. \tag{4.34}$$

Постоянная $k$ в этой формуле та самая постоянная Больцмана, и входит в неё без дополнительных коэффициентов. Именно поэтому появляется коэффициент $3/2$ (точнее, $1/2$ для каждой степени свободы) в (4.33) перед $kT$.

Эта формула высечена на надгробьи Л.Больцмана... Казалось бы, цель в понимании природы энтропии достигнута. Однако, остаётся ещё, по крайней мере, пара немаловажных вопросов:

1. Почему именно вероятность микросостояний определяет энтропию?
2. Почему нужно брать логарифм от этой величины?

Вид формулы прост, но природа её происхождения из базовых свойств материальных точек не очевидна. Вероятность того или иного микросостояния — это свойство ансамбля, а не самих частиц. Конечно, имеется несколько вполне понятных выводов этой формулы, основанных на ряде предположений, используемых в процессе выводов. Вот только они в большой степени формальны и не позволяют увидеть непосредственную связь энтропии с чем то базовым для динамики материальной точки, как это имеет

[17] Конечно, дело было не конкретно в этой формуле, а в борьбе двух систем взглядов на природу вещества. Одну сторону можно грубо определить как представителей убеждённости в бесконечной делимости вещества без изменения принципиальных свойств его частиц. Другую — как учёных, развивающих направление "атомистики", деление вещества на составляющие, разделённые "пустым" пространством. И полагающих допустимым отличие свойств атомов от свойств формируемого ими вещества.

место, например, в случае температуры, давления и внутренней энергии. Поэтому вокруг энтропии было и остаётся очень большое число спекулятивных рассуждений разного рода. Попробуем и мы изложить некоторые соображения, может быть полезные для понимания природы энтропии.

Начнём немного издалека, с вопроса — а какую размерность имеет энтропия? Не ту размерность, которая следует из принятых способов измерения в феноменологической термодинамике, а ту, которая получится при приведении всех единиц к основам измерений, которым мы следуем в этой книге.

Из второго начала термодинамики, (4.30), следует, что энтропия по своему смыслу **безразмерное** число, поскольку её изменение вводится как отношение **двух видов представления одной и той же сущности, энергии**. Противоречит ли этому выводу формула (4.34)? Ни в коей мере. Постоянная Больцмана число безразмерное, вероятность микросостояний тоже просто число, не имеющее отношения к выбору единиц измерения для пространства-времени.

Теперь зададимся вопросом — что положено в основу **нашего описания** мира здесь, в этой книге? Ответ прост — это безразмерная в нашем описании величина, действие. Если смотреть глубже, то действие у нас выступает как классическая замена ещё более фундаментального понятия — **числа событий**.

Попробуем рассматривать энтропию как феноменологический параметр, связанный каким-то образом с числом событий определённого рода, происходящих в термодинамической системе в состоянии термодинамического равновесия. О какого рода событиях может идти при этом речь? Примем во внимание, что

- Термодинамика имеет дело с кинетической энергией частиц, составляющих вещество, со способами описания их **движения друг относительно друга**.

- Этот тип движения **обязательно** подразумевает **столкновения** частиц друг с другом. Может быть и иные виды **взаимодействия** частиц можно включить в эту теорию, но этот момент для нас сейчас не существенен.

Следует признать, что если нет столкновений, то нет и термодинамики, в этом случае мы находимся при абсолютном нуле температуры.

- А что такое "столкновения частиц"? Это **события**. События, **дополнительные** к тем событиям, которые имели бы место, если бы частицы не сталкивались.

- Много ли этих, "*термодинамических*" событий происходит, например, в обычных для нас объёмах идеального газа?

  Имеются оценки числа столкновений одной молекулы газа с другими его молекулами в единицу времени. При нормальных условиях (атмосферное давление и $T = 273K$) они дают примерно $10^9 - 10^{10}$ соударений в секунду. В одном моле газа $N_A \approx 6. \cdot 10^{23}$ молекул или атомов. В результате, число таких событий можно оценить примерно в $10^{34}$ событий на моль в секунду. Огромное число, которое вполне можно заменить, по аналогии с тем, как мы ввели действие для материальной точки, на **непрерывный экстенсивный** параметр, характеризуюший именно **состояние** термодинамической системы. Параметр, аналогичный средней внутренней энергии.

  С ростом температуры пропорционально растёт количество теплоты в системе и количество событий такого вида.

  Энтропия?

При такой интерпретации связь энтропии как синтетической характеристики термодинамических систем с одним из элементарных параметров формирующих систему материальных точек, кинетической составляющей их **действия**, становится вполне очевидной и естественной. Также становятся понятными затруднения в её интерпретации. Ведь и на базовом уровне материальных точек в классических приближениях мы сопоставляем их траекториям действие **не измерением, а вычислением**. Отметим, что по самому своему смыслу, параметр, пропорциональный числу событий указанного вида, при условии **не уменьше-**

**ния** количества вещества в рассматриваемой изолированной от внешнего мира системе, может только расти со временем. Это ведь события, их число очевидным образом связано с идеей времени (точнее, наоборот — время мы определяем через события), и число это со временем может только увеличиваться. А значит, для термодинамических систем эволюцию во времени можно вполне рассматривать как эволюцию при росте энтропии, не обращаясь к самому времени непосредственно. Такой подход к описанию эволюции термодинамических систем можно довольно часто увидеть в соответствующих разделах физики.

Интерпретация энтропии как макропараметра, пропорционального числу "термодинамических событий" в выделенном объёме вещества позволяет нам получить качественное представление и о причинах появления логарифмической зависимости в формуле (4.34). Правда, для этого нужно выйти за рамки классического приближения. В книге [2] показано, что состояние элементарной частицы описывается с помощью матрицы ("вектора состояния"), вклад в которую действия $s$, накопленного на траектории существования частицы к текущему моменту определяется множителем вида $\exp \mathbf{i}s$. Точно такой же множитель ассоциируется с частицей и в формализме интегралов по траекториям, разработанным Р.Фейнманом.

Энтропия, как сугубо классическое понятие, соответствует наиболее вероятному состоянию ансамбля частиц, его "макросостоянию". Определить макросостояние на базе микросостояний можно только как результат некоторой статистической обработки состояний элементарных частиц. В эти подробности я вдаваться не буду, так как в настоящий момент их механизм совершенно не ясен, слишком много этапов от элементарных частиц через ядра, атомы, молекулы к стастистике частиц в макротелах. Однако, один момент, для нас здесь важный, можно с уверенностью отметить. Как бы не выводилось итоговое "среднее" состояние и его действие для ансамбля элементарных частиц, такое действие останется **показателем экспоненты** в вероятности среднего, макросостояния. Вот и получается, что чтобы иметь энтропию как величину, пропорциональную действию, необходимо взять от этой итоговой вероятности натуральный логарифм.

При такой интерпретации энтропии появляется более основательная база и для так назваемой “эргодической гипотезы”. Гипотезы, отождествляющей усреднение по сугубо статистическим состояниям системы с усреднением по времени. Ведь события в физическом смысле не могут быть оторваны от времени, они есть само время. А что такое “события” в математической статистике? Там времени нет и тени. Но в физике применяем-то мы этот раздел математики **всегда к реальным событиям**. Вот и в термодинамике речь должна идти о реальных событиях. А значит должна работать эргодическая гипотеза. Не в той форме, как она была высказана Больцманом, но в исправленной — “объём” состояний системы в статистической интерпретации обязан быть равным “объёму” реальных событий.

Конечно, рассуждения эти качественные, но, по моему мнению, в современном понимании смысла энтропии статистической физикой не хватает именно качественной части. С формальной стороной выводов формулы Больцмана всё, более менее, в порядке.

Здесь, наверное, стоит добавить ещё только одно замечание. Какое значение следует приписывать энтропии при абсолютном нуле температуры? Рассмотрение энтропии как параметра, пропорционального только кинетически обусловленной части событий в системе требует принять это значение равным нулю. Но если несколько расширить смысл этого параметра (возможно, иногда так будет удобнее), включив в него **все события**, то это значение следует принять пропорциональным произведению массы покоя вещества на время его существования. Соотношение совершенно такое же, как между кинетической энергией материальной точки и её полной энергией в нерелятивистской физике. Масса покоя у частицы есть, но в нерелятивисткой физике никакой роли не играет.

Что ещё нужно отметить? Совершенно ясно, что термодинамика и статистическая физика объединяют класс очень многих, в разной степени перекрывающихся **классических приближений** в описании вещества. Более того, в силу изначальной гибридности статистической физики, в таких приближениях могут вполне эффективно учитываться частично и квантовые эффекты. Что важно с точки зрения понимания физики как единой конструкции, единой системы взглядов, служащей для описания реального мира? Важно то, что на этом пути мы действительно получили единство в физике. Ограниченное в силу ограниченности тех или иных приближений, но единое именно как система.

И важным моментом в этой системе является появление определённой иерархии в базовых понятиях. В основе лежат величины, результаты измерений, характерные для материальных точек. Но в определённых приближениях **обязательно** появляются синтетические понятия, иногда вполне измеримые своими процедурами измерений, иногда введённые сугубо теоретически, но служащие для описания мира гораздо лучше, чем самые базовые. И поэтому нам необходимые. Такие как понятие силы, температуры, давления, внутренней энергии, энтропии. И многие, многие другие, которых я здесь не касался.

Важно также то, что путь от чистого, математически самосогласованного описания мира пространствами аффинной связности, с которого мы начали эту книгу, самым естественным образом согласуется с уже построенным зданием классической физики. Просто на определённых этапах гораздо удобнее уйти с этого точного пути на методы, использующие более приближённые, оторванные от чистой геометрии синтетические понятия. Не теряя, впрочем, связи с самыми основами описания мира.

## 4.6 Электромагнитное поле в сплошной среде

В предыдущих параграфах этой главы мы вели, в основном, речь об описании **динамических** свойств вещества, рассматриваемого как сплошная среда. Даже в термодинамике все её параметры оказались сведены с помощью статистической физики именно к динамическим свойствам составляющих вещество частиц.

Только в одном случае у нас зашла речь о поле, которое мы связываем с континуумом, а не с веществом как набором особых материальных точек в этом континууме. Я имею ввиду то, что в случае описания вращения абсолютно твёрдого тела как целого оказалось необходимым связать с занимаемой им областью пространства-времени некоторое дополнительное к метрическому (евклидову) поле связности — поле кручения. Но и в этом случае дополнительное поле появилось, скорее, как мало существенное уточнение геометрии области, не влияющее на описание вещества в ней. Мало существенное в силу малости компонент поля кручения в нерелятивистском приближении. Это поле весьма специфичное, имеющее вектор кручения равным нулю, и потому явным образом стоящее в стороне от главной линии проявления дополнительных к метрической связности компонент, выражающейся в отличии в области от нуля полного тензора Максвелла $F_{ij}$ (или какой либо его инвариантно выделяемой части). Тензора, обязанного своим существованием именно отличию от нуля свёртки связности $\Gamma_j = \Gamma^k_{jk}$, одной из двух инвариантно выделяемых составляющих которой является и вектор кручения.

В рассматриваемых здесь классических приближениях мы на долю геометрической части описания мира оставили только тривиальную составляющую связности — евклидову, нулевую в инерциальных системах отсчёта связность, полагая возможным распространить её на всю область, занимаемую сплошной средой. Остальные составляющие связности, включая отличие её метрической части от евклидовой, мы **вынесли в физику полей**. Полей гравитации, электромагнитного, и, возможно, кручения. Если поле гравитации заведомо мало для обычных для нас количеств вещества и, в большинстве случаев, влиянием наличия такого поля у каждой его частицы на состояние самой сплошной среды можно пренебречь[18], то остальные поля факти-

[18]Конечно, имеются случаи, например, в астрофизике, когда учёт гравитации (само гравитации) становится определяющим для описания рассматриваемой сплошной среды. Но здесь я не пытаюсь рассмотреть все возможности, а только хочу осветить *особые способы*, которые приняты в физике

чески ответственны за структуру самой сплошной среды. Именно они определяют вариативность связей между составляющими вещество частицами и, в конечном итоге то, какое приближение нам требуется для описания того или иного конкретного тела — приближение твёрдого (абсолютно, или не очень) тела, приближение жидкости (не сжимаемой или сжимаемой), приближение газа (идеального и совсем не идеального) и т.д.

Все эти вопросы являются предметом огромного количества особых, часто мало пересекающихся даже в терминологии, разделов физики и химии. И их обсуждение здесь, в этой книге, не входит в мои задачи. Максимум, что я хочу, это указать пути, на которых те понятия, которые мы положили выше **в основания физики**, могут превратиться во все те понятия, которые свойственны, являются необходимыми для всех остальных составляющих имеющегося здания физики, как совокупности всевозможных её разделов. Причём только самые начала таких путей, в самых простых приближениях. Только для того, чтобы было ясно, что построенные нами основания действительно являются фундаментом всей остальной физики.

По этой причине остановимся здесь на самом простейшем способе описания электромагнитного поля в сплошной среде. При этом для простоты мы не будем разделять вклады свёртки симметричной части связности и кручения, поскольку в той части, которой мы коснёмся, их описание совершенно идентично.

Все системы отсчёта, полученные нами с помощью процедур измерения, базирующихся на представлении об абсолютно твёрдом теле, как реализации пространственных масштабов, и идеальных часах, идущих совершенно одинаково во всех точках описываемой области пространства-времени, принадлежат к группам локально инерциальных систем отсчёта, связанных с “группами” твёрдых тел, так или иначе движущихся друг относительно друга. Преобразования координат, выводящие из этих

при описании полей, *дополнительных к метрическому*, в сплошной среде. А учёт само гравитации, точнее, коллективного гравитационного поля больших количеств материальных точек, ничем особым от описания гравитационного поля отдельной материальной точки не отличается.

групп, допустимы, но мы их не рассматриваем. Т.е. сейчас наше описание мира ограничено только стандартизованными системами координат. Более того, мы ограничимся рамками единственной локально инерциальной группы систем отсчёта, и, поэтому, можем говорить просто об инерциальных системах, к тому же движущихся друг относительно друга с малыми по сравнению со скоростью света скоростями (нерелятивистских), не усложняя геометрическую часть нашего описания. Но помня, каким образом мы можем это делать в случае нужды.

При таких условиях разделение компонент тензора $F_{ij}$ на *трёхмерные* векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (второй из них аксиальный), как это представлено в (2.108), становится инвариантно возможным. Ранее я упоминал, что при этом общие инвариантные уравнения для электромагнитного поля можно представить как две пары уравнений для этих векторов. Тождества (2.91) записываются в этих обозначениях как пара уравнений

$$\begin{aligned} div\mathbf{H} &= 0 \\ rot\mathbf{E} + \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Сравните четвёртое уравнение в (2.93) с первым в (4.35), и три первых уравнения там же со вторым здесь.

Уравнения (2.92) превращаются в пару уравнений, связывающих напряжённости электрического и магнитного полей с их источником, четырёхмерным вектором тока[19]. Этот вектор тоже распадается на две независимых в нерелятивистском приближении величины — плотность трёхмерного вектора тока $\mathbf{J}$ и плотность заряда $\varrho = e\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3) \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{\mathfrak{J}}^k = \{\mathbf{J}, \mathbf{i}\varrho\}$. В этих обозначениях уравнение (2.92) будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} div\mathbf{E} &= \varrho \\ rot\mathbf{H} - \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{J}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

[19]Напомню, что в таком приближении плотность скаляра преобразуется точно также как и сам скаляр. Плотности всех тензоров преобразуются как сами тензоры. Поэтому между этими величинами в физике, погружённой в евклидово пространство, различия обычно не делают. Соответственно, плотность вектора и сам вектор в такой форме уравнений Максвелла считают взаимозаменяемыми.

В классической физике часто вместо тока $\mathbf{J}$ используется ток $\mathbf{j} = \{ev^{\alpha}\}, \quad \mathbf{j} = c\mathbf{J}$.

Эти две пары уравнений у нас являются следствиями базовых геометрических соотношений и справедливы для материальных точек в "пустом" континууме, вакууме. Конечно, только при указанных выше ограничениях на выбор систем координат, соответствующих стандартизованным системам отсчёта.

В сплошной среде следует ожидать, что характеристики электромагнитного поля могут каким-то образом отличаться от своих значений в вакууме. Однако, при указанных ограничениях на выбор систем отсчёта, это всё ещё должны быть два трёхмерных вектора, один обычный для электрической части поля, и второй аксиальный, описывающий свойства магнитной части поля. Ведь в текущем приближении они по-прежнему остаются инвариантно (только в этом приближении) разделёнными. Обозначим их, соответственно, как $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$. Каким уравнениям будут подчиняться эти векторы?

В феноменологической теории, развитой ещё в работах Максвелла[20], эти уравнения формально полностью совпадают с уравнениями (4.35) и (4.36), после формальной замены $\mathbf{E}$ на $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ на $\mathbf{B}$.[21] И если выполнение первой пары достаточно очевидно — ведь характеристики вещества никак не входят в это уравнение, да и мы-то теперь знаем, что это переформулировка **тождественных** для любого пространства аффинной связности соотношений, то вопрос о том, какой смысл имеют плотность зарядов $\varrho$ и плотность токов $\mathbf{j}$ в веществе, становится первостепенным.

На выяснение этого вопроса были затрачены огромные усилия, и нельзя сказать что на этом поле всё теперь совершенно ясно. Дело в том, что определение этих характеристик (для то-

[20] Исторически развитие теории электромагнетизма шло как раз в обратном направлении — от феноменологической теории в веществе к окончательной теории в вакууме.

[21] В литературе можно часто встретить обратные обозначения для магнитного поля — $\mathbf{B}$ вместо нашего обозначения $\mathbf{H}$ и наоборот. Следует обращать внимание, какая из этих величин соответствует случаю электромагнитного поля в вакууме.

го, чтобы *уравнения были справедливы!*) очень сильно зависит от свойств конкретного рассматриваемого вещества. А свойства эти изменяются чрезвычайно сильно, как от вещества к веществу, так и от условий, в которых это вещество (в смысле вида его атомов или молекул) находится. В твёрдом состоянии, в жидком, газообразном — это в грубом приближении. А дальше нужно учитывать температуру, давление и прочие макрохарактеристики конкретного состояния. Конечно, среди всего этого многообразия выделены определённые обобщающие подходы. Один из таких простейших подходов я приведу и здесь, не вдаваясь в его подробности.

В самом простом подходе полагают, что имеет место пропорциональность между характеристиками электромагнитного поля в веществе и вакууме:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\mathbf{H}, \tag{4.37}$$

где параметры $\epsilon$ (диэлектрическая проницаемость) и $\mu$ (магнитная проницаемость) для каждого вещества свои, и могут приниматься как постоянными, так и иметь какие-то дополнительные зависимости.

Что мне сейчас важно, на чём я хочу остановить ваше внимание? Важно то, что уже давно, начиная со стимулирующих работ Лоренца, довольно ясно, что все эти сложности можно (при должной тщательности и знании деталей процессов) преодолеть с помощью **статистического** подхода к описанию электромагнетизма в веществе как сплошной среде. Т.е. плотность зарядов $\varrho$ и плотность токов $\mathbf{j}$ в веществе можно рассматривать как некие **средние по ансамблю микросостояний** характеристики вещества. И величины $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ как макропараметры среды. Соотношение совершенно аналогичное соотношению между термодинамикой и статистической физикой. И достаточно очевидно, что вопросы правильного определения $\varrho$ и $\mathbf{j}$ в веществе неотделимы от определения его термодинамичеких характеристик.

Однако, в случае описания электромагнитного поля мы всё-таки имеем и важное для нас отличие от термодинамики. Отличие состоит вот в чём. В термодинамике параметры макросостояния это **новые синтетические понятия**. В электродинамике это скорее усреднённые определённым образом базовые понятия. И, как мы знаем, **чисто геометрические** понятия. Это позволяет нам взглянуть на ситуацию с точки зрения геометрии:

- *Феноменологическое описание электродинамики можно рассматривать и с позиции двух параллельных геометрических описаний области мира. Некая средняя геометрия, характеризующаяся простейшими описаниями метрической части связности (евклидова связность + гравитация) и неметрической части (среднее электромагнитное поле). И на её фоне, возможная, но неизвестная нам более точная геометрия (связность), принадлежащая некоторой совокупности возможных.*

"Истинная" геометрия может рассматриваться как в классических приближениях, так и в квантовых. Причём последнее очень часто является более предпочтительным. Почему я взял в кавычки слово "истинная"? Причина проста. Даже та геометрия (связность), которую мы сможем поставить в соответствие тому или иному **микросостоянию**, не может нами рассматриваться как истина в последней инстанции. Во-первых, в её определении нами всегда будут задействоваться те или иные **приближённые соглашения**. Во-вторых, переход к квантовым приближениям сам по себе связан с признанием того факта, что одному и тому же набору доступных нам экспериментальных данных о событиях соответствует **бесконечно много непрерывных континуумов**, содержащих эти события. Континуумов, отличающихся друг от друга именно конкретным видом связности. А только квантовое рассмотрение микросостояний может хоть в какой-то степени претендовать на "окончательность".

Я не буду здесь обсуждать дальше всевозможные вопросы, связанные как с характеристиками электромагнитных полей, существующих в веществе, так и с взаимодействием внешних полей с этим веществом. Единственный момент, который хочу затронуть (потому, что представление о его сути мне понадобится ниже), это понятие о *равновесном тепловом электромагнитном излучении.*

Тепловым излучением принято называть электромагнитные волны, испускаемые телами за счёт их внутренней энергии. При этом "внутренняя энергия" тела понимается в смысле его термодинамики. Таким образом, к тепловому относят не все виды излучения, испускаемого телами, а только те, которые можно рассматривать как статистический результат всевозможных процессов в теле, как определённый **макроскопический параметр**, характеризующий его **макросостояние**. Характеристики такого излучения зависят, в первую очередь, от степени нагрева излучающего тела, от его температуры, а значит и от аккумулированного им тепла, поэтому его и называют тепловым.

Как водится, в физике мы пытаемся понять суть явления, начиная с самых простых (или кажущихся таковыми) ситуаций, с каких-то упрощённых до отказа приближений. Термодинамика сформулирована в предположении о наличии в веществе **теплового равновесия**. Естественно, это приближение было расширено и на тепловое излучение. Так появилось представление о **равновесном тепловом электромагнитном излучении**. О тепловом электромагнитном излучении весьма специфического вида. При этом рассмотрение расширяется с описания состояния вещества на описание состояния системы "вещество + излучение", и предполагается, что все части этой системы находятся в состоянии равновесия, как по отдельности, так и друг с другом.

Реальные излучающие тела, как правило, весьма далеки от затребованных условий, поэтому было выработано представление об **идеальной** системе "вещество + излучение", этим условиям удовлетворяющей. Эту систему назвали **абсолютно чёрным телом**, и все теоретические выводы о характеристиках равновесного теплового излучения, вообще говоря, применимы только к абсолютно чёрному телу. Но, также как и в случае связи других чисто термодинамических параметров с распределением молекул по скоростям, распределение спектральной плотности излучения в зависимости от температуры, полученное теоретически для абсолютно чёрного тела, позволяет уловить главные (в смысле статистики) характеристики теплового излучения тел со свойствами, достаточно далёкими от свойств идеального абсолютно чёрного тела. При этом, чем лучше в излучении реального тела удаётся достаточно явно выделить часть спектра, соответствующую таковому для абсолютно чёрного тела, тем лучшим приближением к идеалу можно его рассматривать.

Поэтому в описании взаимодействия реальных тел с излучением можно приближённо выделять "подсистему" со спектром излучения близким к излучению абсолютно чёрного тела и "всё остальное", требующее специального, отдельного рассмотрения. Важным при этом становится понимание, что именно отличает именно такую, "статистически обусловленную подсистему". От абсолютно чёрного тела требуется *полное поглощение* всего падающего на него излучения.[22] Однако, имеется и второе требование — абсолютно чёрное тело **должно излучать вовне ровно столько, сколько поглотило**. Это и есть условие **равновесия** излучения и тепловых процессов в веществе.

При обсуждении модельных представлений об абсолютно чёрном теле обычно используют идею абсолютно зеркальных стенок, окружающих тело, и отражающих весь поток излучения тела обратно. Каким образом такого рода стенки, пусть даже в приближённом виде, могут реализовываться в реальном мире?

Ответ достаточно прост — абсолютно отражающих стенок не существует, однако именно та часть излучения, которая в тех или иных ситуациях может рассматриваться как находящаяся в **равновесии поглощение/излучение** с выделенным телом (внутри него и снаружи) и будет входить в связанную с ним статистическую подсистему "вещество + излучение", и характеристики этой части излучения можно описать статистически, приближённо, с помощью знаменитой формулы Планка:

$$\varepsilon_\nu(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^{-1}. \tag{4.38}$$

В этой формуле через $\varepsilon_\nu$ обозначена мощность излучения на еди-

[22] Именно поэтому его и называют **абсолютно чёрным**.

ницу площади в интервале частот $\{\nu, \nu+d\nu\}$, делённая на $d\nu$, т.е. это удельная по частоте и площади величина. И мощность эта полностью определяется температурой излучающего тела.

Именно в этой формуле в физике впервые появилась постоянная Планка $h$, заострив внимание на том факте, что электромагнитное излучение должно рассматриваться как **дискретный** набор “фотонов”. А в чём эта дискретность выражается в нашем описании применительно к электромагнитным волнам? В том, что с каждой такой волной связаны **два и только два** события, события излучения и поглощения, “волны” или “фотона” — вопрос терминологии. Заметьте, этим подчёркивается тот факт, что для теплового излучения вещества прилагательное “равновесное” означает **строгое равенство числа событий излучения и поглощения** в рамках системы “вещество + излучение”. Да, мы можем рассматривать в рамках этой системы и только первую составляющую — излучение, и только вторую — поглощение. При этом будем иметь право говорить о спектре излучения тела, или о спектре его поглощения. Но если мы тем или иным способом выделим во всём спектре электромагнитного излучения, имеющегося в системе “вещество + излучение”, его равновесную тепловую составляющую, то приведённое выше требование является обязательным свойством этой составляющей. Свойством, необходимо эту подсистему определяющим.