

Глава 3

Динамика материальной точки

3.1 Способы описания движения материальной точки

Перейдём теперь к описанию движения, весьма многогранного физического понятия. Что такое движение с точки зрения **уже имеющегося описания мира математической конструкцией**, даже не пространством аффинной связности, а только многообразием?

Всем точкам мира приписаны координаты в каждой из допустимых систем координат. Речь может идти об описании свойств выбранной части мира (в текущем приближении **материальной точки**) либо с точки зрения системы отсчёта (всех координат для неё возможных), связанной именно с этой частью мира, порождаемой ею, либо с точки зрения системы отсчёта (и всех соответствующих координат), порождаемой **другой** частью мира. В классических приближениях, в которых части мира, содержащие цепочки больших событий, мы рассматриваем как материальные точки, массивным телам поставлены в соответствие времени подобные линии, одномерные подпространства в пространстве-времени, с которыми жёстко связаны временные

масштабы, (мнимо)единичные касательные к базовой линии контравариантные векторы.

Другая часть мира — другая линия. Представление о движении при таком идеальном взгляде “со стороны” эквивалентно простой констатации факта **не совпадения линий**, различия их координат. Описание движения сводится к установлению координатного описания подпространств, соответствующих интересующим нас линиям.

Таким образом, способ описания движения, выглядящий простейшим, сводится именно к получению координатного описания каждой точки интересующей нас линии (траектории материальной точки) в каждой конкретной системе координат. Если группа допустимых преобразований координат определена полностью для всех точек в области пространства-времени, то достаточно иметь такое описание линии в одной произвольной системе координат. Однако, за этой кажущейся простотой спрятаны серьёзные проблемы.

Одна из них, это проблема выбора той системы координат, в которой описание линии выглядит наиболее просто. Казалось бы, это одна из тех систем координат, соответствующих некоторой системе отсчёта, масштабы времени в которой базируются именно на этой линии. Одна из систем координат, соответствующих системе покоя рассматриваемой материальной точки. Координаты линии в ней простейшие — все пространственные равны нулю, а время меняется так, чтобы масса (энергия) покоя материальной точки оставалась постоянной.

Верно. Локально, в малой окрестности базовой материальной точки и для описания **самой этой материальной точки** это лучший подход. Но! Нам ведь нужно описание не единственной **нашей** линии, а многих других, всех тех, которые связаны с интересующими нас материальными точками (другими выделенными частями мира). Описание, по сути своей **не локальное**, мы хотим превратить в локализованное описание движения не совпадающих с нашей базовой материальной точкой массивных частиц относительно выбранной нами системы отсчёта в любой

точке области, там где нет ни нас, ни наших измерительных приборов. Именно для этого нам требуется распространение свойств масштабов с некоторой базовой линии на всю область. Требуется их самосогласованность. В этом смысл определения единой системы отсчёта, позволяющей ввести координаты, хотя бы теоретически, всюду в области. Для того, чтобы мы могли описать **относительное движение материальных точек друг относительно друга** хотя бы в первом приближении как функции координат в какой-то определённой координатной системе. И этим сделать **не локальные** соотношения локализованными.

Для множества разных материальных точек описание в не очень хорошо выбранных системах отсчёта, даже если этот выбор кажется для нас естественным, или, более того, навязанным нам миром, может оказаться весьма сложным. Примером из истории физики может служить сравнение двух систем описания Солнечной системы, мира планет — система Птолемея и система Коперника. Важность революции в нашем мировоззрении, произошедшей в результате принятия системы Коперника трудно переоценить. А построение системы Коперника фактически связано именно с выбором наиболее удобной для понимания взаимного движения Солнца и планет базовой системы отсчёта. Очень многое непонятное ранее стало прозрачным, ясным. При этом система Птолемея базировалась именно на наших реальных возможностях — все наблюдения, касающиеся движения Солнца и планет **жёстко привязаны** к нашей планете Земля. И в самом общем смысле, с точки зрения равноправия всех координатных систем, всех точек зрения, возможных при описании мира, обе системы, и Коперника, и Птолемея абсолютно равноправны. Вот только описания мира в этих системах отнюдь не эквивалентны *с точки зрения их ясности*.

Хорошо, выбираем в каждом случае **самую удобную** систему координат, ту в которой описание взаимного движения интересующих нас тел выглядит наиболее просто. Но и здесь есть подводные камни. В случае двух тел, двух материальных точек, сделать это довольно просто. Есть **две** группы привелигирова-

ных систем координат, каждая группа связанная со своей материальной точкой, как базовой. Со своей группой инерциальных систем отсчёта. А вот при большем числе участников взаимного движения проблемы нарастают как снежный ком. Хорошо, если одна из “материальных точек” имеет массу, во много раз превышающую остальные. Как в случае Солнечной системы. Тогда имеется возможность выбрать приближение, в котором взаимным влиянием остальных можно пренебречь. Или рассматривать последовательные приближения, учитывая их влияние как малые дополнительные параметры.

А если все участники движения имеют сравнимые массы? Метод последовательных приближений уже становится трудно применимым из-за того, что нельзя выделить превалирующее влияние какой-то одной материальной точки, полагая влияние остальных малыми параметрами. Но это скорее технические проблемы описания. А есть и принципиальная.

При использовании системы координат, базирующейся на **реально недоступных нам материальных точках**, нам придётся работать не с реально реализуемыми нами масштабами, а с нашим идеальным представлением о том, как они “где-то там” могут быть реализованы. Ведь, чтобы **гарантировано иметь** систему координат всюду в области нам необходимо **реально произвести измерения в каждой точке** этой области. А вот это нам не доступно принципиально. Причём не только в той части континуума, где материальных точек нет, и вообще невозможно иметь хоть какие-то прототипы масштабов для проведения измерений. Но и там, где возможно имеются удалённые от нас материальные точки, где в принципе такие прототипы есть. Провести измерения в этих местах мы тоже не можем, потому что нас с нашими базовыми (реализуемыми и воображаемыми масштабами) там тоже нет. Вот поэтому описание континуума возможно только на основании идеальных представлений о согласованных друг с другом локальных описаниях, образующих совместно глобальную (в пределах некоторой области пространства-времени) систему координат. Систему координат.

нат, соответствующую некоторой группе **локально** инерциальных систем отсчёта.

Как видно из предыдущих глав, решаем мы эту проблему с помощью стандартизованного, сначала простейшего, а потом расширенного до более общего представления о свойствах систем отсчёта. На этом этапе акцент описания движения смещается с описания линий в произвольных системах координат на описание линий в их более ограниченном подмножестве, в группе координат, соответствующих нашему выбору базовых систем отсчёта и принятому способу распространения таких локальных систем на непрерывные области пространства. И здесь на арену выходит наше подразделение возможностей пространства-времени как континуума связывать все события (в классическом приближении траектории всех материальных точек) в единое целое на отдельные, инвариантные в нашем описании составляющие — физические поля.

Ещё один важный момент, ограничивающий возможности нашего описания движения. Все соотношения, которые мы имеем на данный момент, являются локализованными, привязанными к точке. Они **могут** изменяться при смещении от точки к точке в пространстве-времени, а значит и в процессе существования материальной точки. Поэтому мы, по необходимости, опираемся **на локализованные, дифференциальные** соотношения, а значит для установления траекторий материальных точек в любых системах координат имеем только дифференциальные уравнения. Которые требуется решить. Иногда это простые уравнения, иногда очень сложные.

Какие же дифференциальные соотношения мы можем положить в основу описания движения? Сформулируем их сначала для самого общего случая, для произвольных допустимых систем координат.

Основное дифференциальное уравнение, которому в наших описаниях мира пространствами аффинной связности обязаны подчиняться **все без исключения** линии существования материальных точек называется уравнением **геодезической** ли-

нии. Оно формулируется как условие на ковариантную производную от касательного к линии существования материальной точки вектора по скалярному параметру, определённого на этой линии:

$$\frac{D}{ds_0} \frac{dx^i}{ds_0} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x^i}{ds_0^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds_0} \frac{dx^k}{ds_0} = \frac{d^2 x^i}{ds_0^2} + \bar{\Gamma}_{jk}^i \frac{dx^j}{ds_0} \frac{dx^k}{ds_0} = 0. \quad (3.1)$$

Уравнение записано мною в так называемой **канонической** форме, соответствующей некоторым требованиям на выбор скалярного параметра на данной линии. При рассмотрении линии как одномерной непрерывности соотношение между единицей измерения, производящей координату на линии в общей системе координат, и единицей измерения, производящей координату во внутренней, фиксированной по отношению к преобразованиям внешних координат, одномерной системе координат, **обязано быть линейным**. В качестве скалярного канонического параметра использовано **собственное** действие s_0 на линии существования материальной точки и этим гарантируется линейность такого соотношения в наших стандартизованных координатах.

Это соотношение следует из самого базового смысла процедур измерений, применяемых нами для приписывания любых систем координат миру как континууму. Оно записывает “сохранение” масштаба с точки зрения его собственного существования. Вопрос этот подробно рассмотрен в первом томе этой книги ([1]§3.10) и здесь к его обсуждению я во всех деталях возвращаться не буду. Однако, классичность рассматриваемых приближений, точнее вытекающая из принятых для них предположений сингулярность объекта связности на и только на линиях существования материальных точек сказывается на уравнении (3.1). Я уже упоминал о наличии такого влияния в §1.4 и обещал коснуться его рассмотрения подробнее.

Речь идёт о весьма важном для классических приближений свойстве геодезических, связанных именно с существованием материальных точек. Линии существования материальных точек

являются геодезическими **не только в полной связности**, требующейся для описания мира в данной области, но и **во внешней для данной линии связности**. Т.е. для той части связности, которая получается **исключением сингулярных компонент, обязанных своим существованием наличию на этой линии данной конкретной материальной точки**.

Показать это можно довольно просто. Во первых, отметим, что в уравнение геодезической входит только симметричная часть связности. Сингулярная её часть является тензором. Не трудно установить, например с помощью метода, описанного в [9], что **регулярную** составляющую произвольной симметричной связности можно сделать **нулём в произвольной точке континуума** выбором подходящих **локальных** регулярных координат. В уравнении геодезической останется влияние только самой материальной частицы, **на базе которой и определён локальный вектор масштаба времени**, от которого касательный вектор может отличаться только постоянным всюду на траектории коэффициентом, обычным действительным числом. Причём, определён нами этот вектор не абы как, а в жёстком соотношении пропорциональности с единицей внутреннего скалярного параметра, действия s_0 , так чтобы коэффициент их связывающий, масса покоя, был постоянным всюду на линии существования этой материальной точки. Так что обычная производная от касательного вектора по каноническому скалярному параметру (в нашем случае по собственному действию) равна нулю, если исчезает регулярная связность в этой точке. Как результат, условие геодезичности **в этой точке** требует равенства нулю и вклада сингулярной части связности. Обнуление регулярной части симметричной связности можно проделать **для всех точек** линии существования материальной точки. Т.к. вклад сингулярной части связности является **тензором**, то он будет равен нулю на **всей** траектории материальной точки **всегда**, независимо от выбранной нами системы координат. Локальной ли, глобальной — не важно. Т.е. из уравнения геодезической его можно исключить, только внешнюю (регулярную) связность следует прини-

мать во внимание. Что мы и хотели увидеть¹.

Для классических приближений это очень существенное свойство, облегчающее понимание наших результатов. В физике обычно принято говорить, что свойства полей, создаваемых каким-либо источником, изучаются с помощью **пробных частиц, не изменяющих само поле, в которое они помещены**. Какие это в реальности частицы — не уточняется. Не изменяют, и точка. Здесь мы видим, что **любые частицы**, рассматриваемые в приближении **материальных точек**, могут рассматриваться нами как пробные. Но, конечно, только до тех пор, пока точечность (пространственная) таких частиц является достаточно хорошим приближением. Так что всё то, что мы можем получить из изучения геодезических линий в полях уже рассмотренных нами источников — массивных точек как источников гравитационного поля, заряженных точечных массивных частиц — будет соответствовать описанию движения реальных частиц. В той степени, в которой справедливы наши приближения. Добавление на место времени подобных геодезических произвольных материальных точек не будет изменять поле самих этих источников. Хотя, естественно, общее поле связности в области будет изменяться. Обращаю ваше внимание на то, что всюду далее в этой главе связность является **внешней** для той материальной точки, движение которой мы пытаемся описать. Специальных обозначений для такой связности, отделённой от главной части, индуцированной данной **пробной** частицей, я вводить не буду.

В полном соответствии с изложенным выше (и с нашими исходными методами определения реперов локальных масштабов) траекториями всех материальных точек в **их инерциальных** системах отсчёта будут **прямые** линии. Что в физике формулируется как первый закон Ньютона (или закон инерции Галилея)

¹Важно понимать, что это свойство описания строго верно только для классических приближений. В квантовых приближениях исчезает возможность (и необходимость) связывать с линиями существования элементарных частиц сингулярности в коэффициентах аффинной связности. На первый план выходит полная согласованность связности мира как целого и её локальных проявлений в виде свойств данной выделенной цепочки событий.

— тело сохраняет свою скорость и направление движения, если на него не действуют никакие силы. У нас это просто сохранение масштаба, определённого с помощью специального выбора событий на пространстве существования материальной точки в его особой, **собственной системе покоя**, выделенной фиксацией линейности соотношения между **собственным действием (как образом числа событий)** материальной точки и её **собственным временем**. Коэффициент пропорциональности называется массой покоя. О движении как расширении понятия покоя становится возможным говорить в результате объединения в одну выделенную группу всех систем координат, связанных **линейными** преобразованиями, сохраняющими различие в смысле временной и пространственных координат (мнимое число и действительные числа). Полная группа таких линейных преобразований включает в себя повороты масштабов в плоскости двух любых координат и изменения начала отсчёта, т.е. сдвиги вдоль любых осей координат. Эта группа носит название группы Пуанкаре. Название **инерциальные** системы отсчёта жёстко привязано к этим соглашениям, подразумевает их выполнение. Первый закон Ньютона фактически тоже постулирует существование таких, инерциальных систем отсчёта. Так же как и принятые нами ранее формулировки их определения.

Прямые при переходах между системами координат в рамках группы инерциальных систем отсчёта остаются прямыми вследствие линейности преобразований. Для произвольных координат эти соглашения формулируются как констатация геодезичности линии существования пробной частицы.

Все мы со школы привычны к трём законам Ньютона, которые описывают в классической физике движение материальных тел. Как мы видим, первый закон, он же закон инерции Галилея, лежит в основе и нашего описания мира средствами геометрии, с помощью последовательного сопоставления миру как континууму, непрерывности, математической конструкции “пространство аффинной связности”, “пространство-время”. Вот только во всех формулировках физики, начиная с Галилея и Ньютона, это

свойство мира, определяемое как **Закон Природы**. Постулат, полученный обобщением опыта и далее не подвергаемый поискам иных доказательств или объяснений своего существования. А здесь мы приходим к этому же постулату, но как к **врождённому, неустранимому свойству ЛЮБОГО описания мира с помощью ИЗМЕРЕНИЙ**, т.е. с помощью сопоставления элементам мира **чисел**. Свойству, которое обеспечено тем, что мы **всегда можем** выбрать единицы в процедурах измерения, формирующих описание мира числами, так, чтобы этот постулат был справедлив. Причём формулировка этого постулата действительна во **всех возможных системах координат**.

А два остальных закона Ньютона? Есть ли для них место в нашем описании?

Что касается третьего закона, равенства действия противодействию, то в рассматриваемых нами приближениях материальных точек, окружённых только континуумом, т.е. “в бесконтактных” приближениях, о нём говорить не приходится. Просто потому, что в его точном смысле речь идёт о соотношениях не для отдельной материальной точки, а для системы тел, и, возможно, внешнего для них поля. Этот закон легко формулируется для случая непосредственного контакта тел, имеющих массу. При его распространении на взаимодействие материальных точек, разделённых пространством, возникают определённые трудности. В частности, например “сила Лоренца” (о которой, естественно, Ньютон не имел представления, а мы ещё не ввели), не может быть включена в этот “закон” напрямую. Формулировки этого закона мы немного коснёмся в §3.4.

А вот второй закон, говорящий об изменении импульса тела под действием сил, его место в нашем описании обсудить требуется.

- Во-первых, я хочу обратить ваше внимание на то, что при описании траекторий материальных точек как геодезических линий мы **необходимо** говорим об изменении (или постоянстве) касательного к траектории вектора, т.е. поведения **первых** производных координат тела в пространстве

времени. Реально мы определяем только **вторые** производные этих координат. Эти производные описывают **возможное** отклонение ситуации, отклонение векторов масштабов, формирующих наше описание с помощью процедур измерений от базового предположения о их всеобщей неизменности, равенства самим себе всюду и всегда, принимаемого за основу. Наши уравнения, описывающие движение тел, автоматически являются уравнениями **второго порядка** в смысле порядка входящих в них производных. Не больше, и не меньше. Наличие производных следующих порядков можно бы допустить в каких-то особых случаях, имеющих для нас какой-то специальный интерес. Как описание дополнительных условий на ситуацию. Но при нашем подходе к локальному описанию с помощью **линейных** приближений всех соотношений, с перемещением **всех возможных нелинейностей в функциональную зависимость исследуемых величин** (в данном случае, координат материальной точки) как **максимально общем способе накрытия любых возможностей**, это, вообще говоря, не требуется.

- С учётом сказанного выше, должно быть понятно, что никаких иных “законов движения”, “вторых”. “третьих” и т.д. в нашем описании материальных точек **не требуется**. Пока мы уверены, что в нашем распоряжении имеется система координат, **гарантированно** описывающая континуум пространства-времени, и нам **известна его связность**, то всё, что нам нужно для описания **положения материальных точек** в пространстве-времени, т.е. их взаимного движения, выражающегося в несовпадении траекторий, уже содержится в уравнениях соответствующих им геодезических линий.

Почему же Ньютону пришлось постулировать наличие второго закона? О чём он говорит? А пришлось это сделать потому, что ни то, ни другое (описание системы координат и известной для неё связности) нам **никем не гарантированы**, и уж, тем

более, и то и другое вместе. Кроме того, из нашего обычного, не обработанного наукой опыта пришло понятие силы, воздействующей (с нашей помощью, или без неё) на предметы (части мира), приводящей к тем или результатам. Вот это понятие, “сила” было формализовано И.Ньютоном (совместно, конечно, с другими исследователями) так, чтобы можно было последовательно описать результаты её **действия** на выделенные части мира. Заметьте, в классической физике понятия “силы”, “энергии”, “импульса” (силы!), “массы” и “действия” определяются **совместно**, как **совокупность понятий**, неразделимо завязанных друг на друга.

Это в представленном здесь построении описания мира понятие “действие” является исходным, определяемым через ещё более фундаментальное понятие “событие”. Далее, к нему оказываются привязаны понятия “градиента действия” (вдоль линии существования цепочки событий), понятие системы покоя и массы покоя, как особого значения градиента действия для особой процедуры измерений. Последние два понятия переносятся нами как **исходные** постулаты в классические приближения. Как понятия, сохраняющие фундаментальный смысл и при утере связи между событиями и действием. Утере, сопровождающей сделанный нами предельный переход от цепочки дискретных событий к непрерывной линии событий.

А вот в классическом построении физики как описания мира эти понятия **вторичны**. Импульс **силы**. Энергия (по крайней мере, её часть) — работа **силы**. Масса — коэффициент пропорциональности между **силой** и **изменением импульса силы**. Действие **силы**.

И связан этот перенос акцентов с тем, что без опоры на **подсчёт элементарных событий** в истории материальной точки нет реальной возможности фиксировать постоянный для этой точки базовый масштаб, единицу собственного времени. В классических приближениях все моменты существования материальной точки полагаются событиями.

Сила. Мы нуждаемся в определении этого, весьма важного в

классической физике понятия через уже введённые нами понятия. Сделать это проще всего именно через определение второго закона Ньютона. О чём он говорит в применении к приближению материальной точки? Для наших целей нам вполне годится формулировка Ньютона:

- Изменение количества движения (импульса) тела пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

В четырёхмерной формулировке СТО импульс материальной точки (произведение её массы на трёхмерную скорость) объединяется с её энергией в единый **контравариантный** четырёхмерный вектор энергии-импульса $p^i = -im_0c \cdot dx^i/dl$. А изменение всего этого четырёхмерного вектора записывается локально как его производная **по скалярному каноническому параметру, определённого на линии существования материальной точки**². В СТО это метрический параметр l , величина, определяемая через метрический тензор, считающаяся скаляром всегда, в любой системе координат, пропорциональным собственному времени на линии существования материальной точки. Именно эта производная приравнивается четырёхмерной силе, тоже рассматриваемой как четырёхмерный контравариантный вектор. Таким образом, второй закон Ньютона для четырёхмерного пространства-времени формально записывается так:

$$\frac{d}{dl}p^i = F^i \quad (3.2)$$

Введённое здесь обозначение F^i для производной вектора энергии-импульса по метрическому параметру l на траектории материальной точки в Специальной Теории Относительности называют четырёхмерным вектором **силы**. И полагают, что сила

²Напоминаю, что мы используем мнимую четвёртую координату вместо действительного времени. Обычно же используют все координаты действительные и нужные знаки несёт в себе метрика. Поэтому здесь появился коэффициент $-i$.

эта порождается внешним для материальной точки миром. Соответственно, будучи вектором, она либо равна нулю для данной материальной точки всегда, в любой системе координат, в которой описывается выделенная область пространства-времени, либо не равна. Это общепринятое сегодня в классической физике обобщение на ситуацию больших скоростей силы, введенной Ньютоном для случая малых скоростей, т.е. физики нерелятивистской. Естественно, здесь преобразования координат, для которых сила остаётся вектором, по умолчанию ограничены только той группой, которой соответствует сам формализм СТО — группой преобразований Пуанкаре (обычные ортогональные повороты в пространстве, преобразования Лоренца и сдвиги начала отсчёта). Группой линейных преобразований координат³. При выходе за пределы этой группы понятие силы должно быть уточнено. Как — вы сможете увидеть ниже. Уточнение это в нашем описании мира и в Общей Теории Относительности явным образом различается.

Заметьте, **определения** для вектора силы в СТО нет. Её выражения всякий раз записываются в теории из тех или иных дополнительных соображений. Что содержится в этом соотношении, фактически используемом классической физикой как постулат, обобщение второго закона Ньютона на релятивистский случай? А содержится здесь определение двух величин сразу. И одно дополнительное соглашение. Определяемые величины — это вектор энергии-импульса материальной точки и сила, представляющая внешний для этой точки мир. При этом неявное соглашение подразумевает обязательное существование локально инерциальной системы отсчёта, **для которой и записано это определение**. Определение вектора энергии-импульса можно также рассматривать как постулат **обязательного** существования для любой пробной частицы некоторой **скалярной** величины, массы покоя m_0 . Объединение массы покоя и касательного

³Не следует впадать в заблуждение из-за того, что скорость входит в коэффициенты преобразований Лоренца нелинейно. Линейность преобразования подразумевает линейную зависимость от координат, а не от параметров преобразования.

к траектории вектора (четырёхмерной скорости dx^i/dl) в единый комплекс представляется результатом обобщения опытных данных. Никаких иных причин для этого классическая физика не имеет и не предлагает. Кроме, конечно, необходимости каким-то образом включить в постулат о связи импульса и силы возможность отследить изменение положения тела. Но почему именно так — ответ один — так требует опыт.

Причина выделения массы и силы в разные понятия сугубо бытовая, она возникает ещё до оформления физики как науки. Человек прикладывает силу чтобы переместить некий груз, изменить его положение. Разный груз — разная сила. А перемещение, как изменение положения может быть одинаковым. Груз один и тот же, а при приложении разного усилия результирующее перемещение тоже будет разным. Вот эти простые факты находят своё отражение в способе формулировки второго закона Ньютона. Уже потом начинается уточнение определений и уясняется, что таким образом созданы проблемы, что одно без другого невозможно определить точно.

У нас исходным понятием с самого начала является вектор энергии-импульса. Но вектор ковариантный, $p_i = i\partial_i s_0$. А это отнюдь не тоже самое, что и контравариантный вектор, постулируемый в классической физике. Однако, мы уже показали (§2.2), что в классических приближениях при наличии метрического тензора любому ковариантному вектору можно поставить во взаимно однозначное (по метрическому тензору как **стандартной структуре**, определённой для каждой точки пространства-времени) соответствие также и контравариантный вектор. Формально это будет вектор $p^i = g^{ik} p_k$. Мы показали также, что для вектора энергии-импульса, связанного с **любой** материальной точкой, в том числе и с пробной, дуальный ему в метрических пространствах контравариантный вектор оказывается пропорциональным вектору четырёхмерной “скорости”, точнее **касательному к траектории материальной точки** вектору dx^i/dl . Это соотношение пропорциональности записывается следующим об-

разом:

$$p^i = m_0^2 c^2 \frac{dx^i}{ds_0} = -i m_0 c \frac{dx^i}{dl}. \quad (3.3)$$

На что нам следует обратить внимание в этом соотношении? На следующие вещи:

- Левое равенство может быть определено не только для метрической связности, но и для любой связности, если в ней выделена метрическая часть. Вектор dx^i/ds_0 является касательным к траектории материальной точки всегда, т.к. s_0 в классических приближениях определён нами как истинный **канонический** скалярный параметр, связанный с существованием любой материальной точки. И это соглашение не зависит от той связности, которая имеется в рассматриваемой области континуума.
- Правое равенство, а вместе с ним и всё соотношение, в точности справедливо только тогда, когда l является настоящим скалярным **каноническим** параметром для траектории. А это строго верно **только для чисто метрических связностей**. Если связность отличается от метрической, то выделив метрическую часть в ней мы всё ещё можем **использовать** метрический параметр l как **скалярный но, в общем случае, не канонический**. А значит правая часть равенства уже не будет точным соотношением.
- Форма связи контравариантной версии вектора энергии-импульса с касательным к траектории вектором в точности совпадает с постулатами как нерелятивистской физики Ньютона, так и СТО, но у нас может (и обязана) рассматриваться как **необходимое свойство нашего способа описания мира, а не как некий Закон Природы**.

Более того, эта форма является точной отнюдь не всегда, если касательный вектор вычисляется не с помощью канонического скалярного параметра.

Из выше сказанного следуют вполне определённые выводы. Для областей с чисто метрической связностью в глобально инерциальных системах отсчёта соотношения

$$\frac{d}{dl}p^i = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{cd\tau}p^i = 0, \quad \frac{d}{dl}p_i = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{cd\tau}p_i = 0 \quad (3.4)$$

являются прямым следствием геодезичности траектории материальной точки, следствием соотношения (3.1). При этом их можно также рассматривать и в обратном направлении — как **причину необходимости описывать линии существования материальных точек геодезическими в нашем подходе к описанию мира как непрерывности**. Для произвольных систем координат (при чисто метрической связности) первое уравнение можно и следует переписать в такой же форме как и уравнение геодезической:

$$\frac{D}{dl}p^i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dl}p^i + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dl}p^k = 0 \Rightarrow \frac{d}{dl}p^i = \mathbb{F}_I^i. \quad (3.5)$$

Эта форма справедлива уже для любых систем координат, поскольку изменение вектора записано через ковариантную производную. А “сила” $\mathbb{F}_I^i$ здесь является просто **обозначением**. Обозначением некоторого комплексного, синтетического для нашего способа описания мира понятия. Причём мы имеем явное выражение для силы, как произведения связности, контравариантного вектора импульса и касательного к траектории в данной точке вектора:

$$\mathbb{F}_I^i = -\Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dl}p^k. \quad (3.6)$$

Обратите внимание, что в отличие от классической физики Ньютона и Эйнштейна, мы не вводим понятие силы как нечто внешнее, требующее дополнительного определения. Мы даём **определение этого понятия через базовые, уже введённые ранее структуры**, используемые нами для описания мира. Через структуры его геометрического образа. И здесь хорошо видно, что понятие это, даже в наиболее элементарной его форме, является **собирательным** образом, включающим в себя разные геометрические структуры описания.

О чём нам может сказать новая, общая форма для изменения **контравариантной версии вектора энергии-импульса вдоль траектории**, вдоль линии существования материальной точки?

1. Это специфическая формулировка первого закона Ньютона, закона инерции Галилея, в которой участвует **масса покоя** материальной точки. Да, она может не учитываться, т.к. правая часть соотношения равна нулю и всякий скалярный коэффициент в левой части может быть удалён. Но! В этой формулировке ясно видно, что масса покоя в первый закон может быть помещена совершенно безболезненно для того, чтобы явным образом показать его **справедливость для произвольной массы покоя**. И включение массы не является формальным. Оно перемещает совершенно естественным образом акцент с изменения касательного вектора на изменение контравариантной формы вектора энергии-импульса. А это не простое введение произвольного скалярного коэффициента. Объединение массы покоя и касательного к траектории вектора в единый объект соответствует духу наших изначальных постулатов — совместному определению единицы собственного времени и массы покоя материальной точки. По сути дела, совместно определённая постоянность касательного вектора (масштаба собственного времени) и градиента собственного действия увязываются в единственном соотношении.
2. Форма эта прямо отсылает нас к формулировке **второго закона Ньютона** в двух видах:
 - Это формулировка второго закона Ньютона для инерциальных систем отсчёта в частном случае равенства нулю внешних сил.
 - Это формулировка второго закона Ньютона, позволяющая понять и описать ясным образом **силы инерции**. Т.е. “**фиктивные**” в классической физике

силы⁴, которые в классическом изложении физики вводятся в рассмотрение для того только, чтобы расширить применение второго закона Ньютона на все возможные системы отсчёта. Ведь в основе своей он сформулирован только для инерциальных систем отсчёта. **И для не инерциальных систем отсчёта не является справедливым.** А в нашей формулировке и по самому своему смыслу силы инерции вообще перестают быть фиктивными, т.е. произвольно добавляемыми. Они изначально отражают необходимость учёта отличия реперов масштабов в разных процедурах измерений. Зависимость связности, описывающей континуум, от **нашего выбора** способа его описания.

Мы привели уравнение сохранения для вектора энергии-импульса в его контравариантной форме к виду, соответствующему второму закону Ньютона. Именно такой вид привычен в классической физике Ньютона, в которой не делается разницы между контравариантными и ковариантными векторами. Базировались мы на соотношении (3.3), но отметили при этом, что справедливость его правого равенства имеет место только если метрический параметр l на траектории является каноническим. Что верно только для чисто метрической связности в области, содержащей материальную точку. А значит все приведённые соотношения при неметрической связности нуждаются в модификации. В то же время, уже в первом томе этой книги показано, что абсолютная (ковариантная) производная ковариантной (исходной) формы вектора энергии-импульса необходимо сохраняется вдоль траектории материальной точки просто из-за её “двойственности” с касательным к траектории вектором. И условие это справедливо во всех возможных приближениях, и классических, и квантовых. И для любого вида связности в рассматриваемой области. Поэтому полезно иметь наши соотношения, представляю-

⁴Я поставил в кавычки слово “фиктивные” потому, что, хотя так принято их называть иногда в классическом изложении физики, они вполне себе физические, явным образом проявляющиеся на опыте.

щие второй закон Ньютона, и для базовой, ковариантной формы вектора энергии-импульса.

Соотношение (3.5) превращается в

$$\frac{D}{dl}p_i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dl}p_i - \Gamma_{ji}^k \frac{dx^j}{dl}p_k = 0 \Rightarrow \frac{d}{dl}p_i = \mathbb{F}_i^I, \quad (3.7)$$

в котором “сила” представлена уже **ковариантным** выражением

$$\mathbb{F}_i^I = \Gamma_{ji}^k \frac{dx^j}{dl}p_k. \quad (3.8)$$

Можем ли мы на основании этих замечаний утверждать, что второй закон Ньютона нам вовсе не требуется как отдельный постулат, а прямо следует из первого закона? Можем, но пока только частично. Да, в конце концов на этом пути мы явно придём к полноценному утверждению такого сорта. Но сейчас мы пока явным образом можем описать только силы инерции.

Заметьте. В нашем описании появилось то, что в классической физике носит название “силы”. Пока только в весьма специфической форме, в форме “силы инерции”. Следует ли комплексы (3.6,3.8) **всегда** интерпретировать как некоторые силы, силы инерции, которые равны нулю в координатах, соответствующих инерциальной системе отсчёта и отличаются от нуля в других местных системах координат? В принципе, это можно делать. Однако, такой прямой трактовкой мы можем внести в наше описание слишком много ненужного, усложняющего. Дело в том, что связность, даже в глобально евклидовом пространстве может отличаться от нуля при переходе в систему координат с помощью преобразования, зависящего от точки **произвольным** образом. Например, после преобразования координат, нелинейного только в пространственной части, и/или с внесением какой-либо странной нелинейной зависимости единицы времени от точки на траектории. И всё это будет отражаться в таких системах координат отличием от нуля “силы”, представленной соотношениями (3.6,3.8). Даже в системе покоя материальной точки. Но к описанию движения будет иметь весьма косвенное отношение,

только как искусственное искажение траекторий материальных точек. Нас же силы, в том числе силы инерции, интересуют на самом деле только как причина и индикатор изменения траекторий материальных точек **при обязательном сохранении локального стандартизованного описания систем отсчёта, связанных с этими материальными точками**. А это сразу ограничивает наше рассмотрение преобразованиями не к произвольным допустимым координатам, а только к таким, которые

- сохраняют структуру локального репера как целого
- и сохраняют времени подобный характер масштаба вдоль траектории, масштаба локального времени.

Да и сам масштаб обязан выбираться так, чтобы некий параметр материальной точки, масса покоя, **оставался на траектории постоянным**.

Достаточно ясно, что это ограничение означает использование всюду в области лишь той части всех допустимых преобразований, которые входят в группу Пуанкаре, с параметрами, возможно непрерывно зависящими от точки в области. Только для совокупности систем отсчёта, полученных из базовой инерциальной с помощью таких преобразований, комплекс (3.6,3.8) имеет смысл рассматривать как образ сил инерции. Только в этой группе систем отсчёта мы можем говорить об их **движении друг относительно друга. Об относительном движении систем отсчёта**, но не придуманных произвольно, а связанных к некоторым материальным точкам каждая. И этой своей обусловленностью позволяющих описывать также и само относительное движение соответствующих материальных точек, порождающих эти системы отсчёта.

О каких параметрах преобразований, зависящих от точки в области при этом идёт речь? Можно говорить о локальных смещениях пространственных координат начала отсчёта (как функциях времени!) и об углах поворотов в двумерных поверхностях. Но только в двумерных поверхностях, образованных одной из пространственных координат и, обязательно, временной. Этим

все возможные параметры, определяющие локализованное преобразование Пуанкаре, описывающее движение, исчерпываются. Довольно очевидно, что если речь пойдёт именно о движении, например, о поворотах в поверхностях $\{x^\alpha, x^4 = \mathbf{i}ct\}$, то в качестве такого параметра нам будет гораздо удобнее рассматривать локальную скорость $v^\alpha = dx^\alpha/dt$, а не соответствующий угол в локальном преобразовании Лоренца. Более подробно мы рассмотрим всё, что при этом касается сил инерции в §3.3, а пока продолжим рассмотрение вопроса о понятии силы с наиболее общих позиций.

Спросим себя, можно ли, и каким именно способом, расширить применение соотношений (3.5, 3.7) с частного случая **чисто метрических** связностей, присутствующих в рассматриваемой нами области, на случай **произвольных** связностей, отличающихся тем или иным способом от метрической.

Силы инерции классической физики в нашем описании соответствуют **отличию связности на траектории материальной точки от нуля**, появляющемуся из произвольности выбора глобальной системы координат. С учётом замечаний о движущихся системах отсчёта, сделанных выше, “произвольно выбранные координаты” стоит заменить на “произвольно движущиеся системы отсчёта”. При этом мы явно избежим ненужных нам усложнений в описании мира, а всё, что действительно требуется, учтём. В евклидовом пространстве нулём во всех точках области связность может быть сделана выбором одной из стандартизованных систем отсчёта. Такие системы отсчёта в физике мы называем инерциальными (глобально).

Если связность пространства-времени метрическая, но не евклидова, т.е. если метрика отличается от евклидовой, её компоненты являются функциями точки, то это можно сделать только в локально инерциальных координатах и только на заданных траекториях, а не во всех точках области. Соответственно, связанные с этими траекториями стандартизованные системы отсчёта мы называем локально инерциальными.

А если связность даже не метрическая? Вся ли связность мо-

жет быть обращена таким образом в нуль хотя бы на траектории материальной точки? Нет, только её часть. Только симметричную часть связности можно сделать нулевой на заданной линии подходящим выбором системы координат.

Кроме того, если связность отличается от метрической, то **в локально инерциальных системах отсчёта** ковариантная производная вдоль линии существования материальной точки по **скалярному** параметру l для контравариантной формы вектора энергии-импульса, записанной через dx^i/dl , **не будет равна нулю**. Даже если связность чисто симметричная и на траектории выбором координат сделана нулевой. По простой причине — метрический параметр l в этом случае, оставаясь скалярным параметром, перестаёт быть **каноническим**, перестаёт быть пропорциональным действию: $ds_0 \neq m_0 c dl$ (m_0 по-прежнему рассматривается как постоянная величина!). И соотношения (3.5, 3.7) превращаются в соотношения

$$\frac{D}{ds_0} \frac{dx^i}{ds_0} = 0, \quad \frac{D}{dl} p^i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl} p^i = \mathbb{F}_I^i + \mathbb{F}^i. \quad (3.9)$$

$$\frac{D}{ds_0} p_i = 0, \quad \frac{D}{dl} p_i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl} p_i = \mathbb{F}_i^I + \mathbb{F}_i. \quad (3.10)$$

Траектория материальной точки **перестаёт быть геодезической в метрической связности**, оставаясь геодезической в полной связности. Вектор $p^i = -i m_0 c \cdot dx^i/dl$ тоже перестаёт сохраняться на траектории материальной точки. Однако, в наших руках остаются все те же базовые уравнения сохранения для масштаба времени и градиента действия. Но, поскольку мы продолжаем записывать все наши соотношения в классических системах отсчёта, используя метрику и метрический интервал l , для учёта изменения производных наших величин по метрическому интервалу мы вынуждены ввести дополнительные обозначения $\mathbb{F}^i$ и $\mathbb{F}_i$. Ввести в рассмотрение некие “силы”, появляющиеся даже в инерциальных системах отсчёта (и в локальных, и в глобальных тоже), если полная связность не является метрической. Явный вид этих величин, их выражение через коэф-

фициенты аффинной связности и/или порождаемые связностью тензоры мы определим позже.

Почему же мы и в случае неметрических связностей продолжаем акцентировать внимание на $\frac{d}{dl}p^i$, $\frac{D}{dl}p^i$, $\frac{d}{dl}p_i$, $\frac{D}{dl}p_i$, а не на ковариантной производной от касательного вектора dx^i/ds_0 , производной координат по гарантировано каноническому скалярному параметру? Или на соответствующих производных для ковариантного вектора энергии-импульса? Ответ прост — *все наши стандартизованные системы отсчёта, привязанные к частицам, имеющим массу покоя, остаются точно также привязанными к тому способу, которым мы определяем пространственные единицы посредством единицы времени и постулата независимости скорости света ни от места, ни от направления*. Мы принудительно ограничиваем себя группой локальных преобразований Пуанкаре. В этой группе систем отсчёта метрический параметр dl остаётся **относительным** инвариантом. Причём **единственным, который мы можем определить** (в соответствии с нашими соглашениями) прямым измерением, через изменение координаты времени на траектории существования материальной точки. Да, было бы правильно использовать собственное действие на траектории материальной точки в качестве скалярного параметра. Потому, что только параметры, отличающиеся от действия постоянным множителем являются каноническими. Теми, для которых все уравнения, связанные с геодезичностью траектории являются наиболее простыми. Но **в классических приближениях мы не можем измерять собственное действие непосредственно**. Ведь для действия в классических приближениях прямое определение через подсчёт числа **элементарных** событий нам недоступно. Действие в классических приближениях мы **вычисляем** через dl , массу покоя (являющуюся произвольно заданным внешним параметром!) и свойства полей, дополнительных к полю метрики (если они имеются). Как именно учитываются эти дополнительные к метрической связности поля будет описано ниже, в следующих параграфах этой главы, посвящённых описанию движения

в неметрических полях связности — электромагнитном поле и поле кручения.

Чем соотношение (3.9) отличается от второго закона Ньютона, записанного уравнением (3.2)? Тем, что сразу явно учитывает и силы инерции, которые в формулировке (3.2) отсутствуют и должны быть добавлены специально — ведь там речь идёт только об инерциальных системах отсчёта, а это соотношение мы записали для любых систем координат. Хотя и будем, в основном, ограничиваться применением только локально инерциальных. Эта часть “сил”, силы инерции, не является тензором при тех преобразованиях координат, которыми мы ограничились — при преобразованиях из локализованной группы Пуанкаре между локально инерциальными системами отсчёта, привязанными к произвольно движущимся материальным точкам. И, уж тем более, при расширении преобразований до произвольно допустимых. А вот та часть “сил”, которую мы обозначили через $\mathbb{F}^i$ или $\mathbb{F}_i$ при преобразованиях из локализованной группы Пуанкаре является тензором. Относительным тензором, точно также как сам метрический тензор. Они будут **отличаться от нуля даже в локально инерциальных системах отсчёта**, в наших **стандартизованных** системах отсчёта, базирующихся на соглашениях о способе выбора пространственных единиц измерения.

При расширении же группы преобразований координат, от сохраняющей тензорный характер метрики до произвольных допустимых, эти “силы” перестают преобразовываться как тензор. Однако, для нашего описания это не критично. Ведь описание относительного движения материальных точек мы принудительно приводим всегда к нашему стандартизованному описанию — описанию в локально инерциальных системах отсчёта.

Что же мы получили? А получили мы утверждение, что в нашем образе пространства-времени как пространства аффинной связности **нет нужды в отдельном, втором законе Ньютона для описания движения материальных точек**. Этот “закон” является следствием всё того же базового требования геодезичности траектории всякой материальной точки (и сохра-

нения удельного вектора энергии-импульса вдоль неё), записанного для специфического выбора скалярного параметра на траектории. Т.е. мы получили, что этот закон природы, сформулированный ранее как обобщение опыта, является **необходимым следствием нашего способа описания мира выбранными средствами**.

То, что классическая физика называет “настоящими, внешними силами”, является образом той части связности, которая отличается от чисто метрической. И уж, конечно, от евклидовой. От связности, которую можно обнулить **глобально** выбором подходящей системы координат, подходящей глобальной процедуры измерения. Метрическая часть связности при этом находится на особом положении, при её выделении в отдельное рассмотрение возможно ассоциировать с остальной частью связности “настоящий” вектор силы (конечно, относительный, вектор только при локально лоренцевых преобразованиях), переводя действие метрической части связности на относительное движение материальных точек при его выражении в терминах “сил” в разряд сил инерции. Но осуществимо это **только локально**, поскольку глобально сделать это совершенно невозможно вследствие сингулярностей, связанных в классических приближениях с самими материальными точками. Заметим, что **при надлежащем выборе скалярного параметра** на траекториях материальных точек **все силы, и не метрические тоже, можно включить в понятие “сил инерции”**. Конечно, также только **локально**, как **внешние** силы на самих траекториях материальных точек. И именно это существенно отличает как силы гравитации, так и другие от “обычных” сил инерции, которые можно обнулить глобально выбором подходящей системы отсчёта. Просто потому, что у них нет сингулярного источника, они являются проявлением выбора системы отсчёта, не связанной линейно с системами отсчёта, порождаемыми той материальной точкой, движение которой мы хотим описать.

Локально можно обнулить все “настоящие силы”. Но нужно ли? Ведь мы совсем не случайно опираемся при описании мира

не на произвольные системы координат, а на стандартизованные. Стандартизованные с помощью классической метрики, с помощью чётко описанных соглашений о выборе пространственных масштабов на базе временного. Да, мы всё стараемся формулировать в самом общем виде. Но с опытом-то все результаты расчётов сравниваем в стандартизованных системах координат. Локальных, привязанных к каждой точке континуума, но стандартизованных. Причиной является то, что пространственные масштабы мы всегда определяем посредством временного, и никогда напрямую. Даже если мы привыкли думать, что пространственные линейки у нас первичны. Можно сделать такие определения максимально общими, но нужно ли? Для всей области мы также уже ввели согласование всех локальных стандартизованных систем координат с помощью описания зависимости метрического тензора от точки в области. Зависимость эта в физике описывается полем гравитации, и является главным⁵ неустранимым результатом наличия в области событий, представленных в классических приближениях материальными точками. И поэтому поле гравитации мы относим именно к настоящим силам. Да, их можно устранить **локально**, на траекториях **пробных** материальных точек. Но не на траекториях тех материальных точек, которые являются базовыми для глобализованных систем отсчёта. Там они вовсе сингулярны и потому не устранимы. Но ведь то же самое мы можем сделать вообще со всеми введёнными нами силами, подходящим выбором локализованного описания. Таким образом, к связности, порождающей силы инерции нам следует относить только ту её часть, которую можно занулить **глобально, во всей области**. И вся она сосредоточена **всегда** в метрической части связности. Поэтому при рассмот-

⁵Точнее, **неустранимым остатком**, обязанным своим существованием тому, что наличие большого числа материальных точек в области, может **в среднем** нивелировать создаваемые ими неметрические части связности, но не может никоим образом нивелировать присутствие в области событий, которое мы в нулевом приближении учитываем как их общую массу. Просто потому, что событиям, а значит и массам, в нашем описании соответствуют не отрицательные числа.

рении возможного функционального вида связности за основу взята именно её метрическая часть. Поэтому особый упор делается на поведении ковариантных производных относительно метрической части связности, а не относительно её полной версии. И все уравнения для описания возможных дополнительных свойств континуума (электромагнитного поля и поля кручения) уже записаны у нас явным образом с помощью метрики.

При таком подходе вклад в “силу” всех рассмотренных нами полей, кроме гравитации, описывается относительно тензорными величинами. С которыми можно связать также такие относительные понятия как “вектор силы”, “напряжённость поля сил”. Поле гравитации стоит немного особняком. Оно входит в относительную тензорную структуру, в метрический тензор как стандартизованная составляющая. Ну и сама эта структура является относительным тензором, т.е. тензором только в ограниченной группе систем отсчёта, и описание гравитации в этой группе вводится нами специальным образом, как стандартизованная функция. Поэтому применение термина “сила” в случае гравитации требует чуть более специального рассмотрения.

3.2 Вариационный принцип для движения материальной точки

В предыдущем параграфе, как и в первом томе этой книги, да практически везде и в этом томе, в качестве базовых, исходных соотношений для линии существования материальной точки я использовал уравнение геодезической в его каноническом виде, как условие **сохранения в процессе её существования** масштаба времени, основанного на событиях в её истории. Образом этого масштаба служит касательный к траектории вектор, отнесённый к специальному каноническому параметру (действию), строго пропорциональному числу событий на линии существования. Ещё я опирался на комплиментарное к уравнению геодезической условие сохранения вектора градиента этого канонического параметра, действия — ковариантного вектора энергии-

импульса.

Однако, при рассмотрении вопросов интерпретации поля связности как описания физических полей, для получения ограничивающих вид этих полей уравнений основной упор был сделан на принципе стационарности действия в области. Принципе, гарантирующем независимость числа событий в рассматриваемой области от возможных вариаций в описании.

Сейчас я хочу продемонстрировать явным образом, что принцип стационарности действия можно положить в основу описания и применительно к движению материальной точки точно таким же образом, как и в случае полномерной области. Т.е. условие геодезичности и условие **стационарности действия на любом отрезке линии существования материальной точки между фиксированными концами (событиями) при вариации связности между ними** полностью взаимозаменяемы. Из первого следует второе, и наоборот.

Сначала рассмотрим вопрос с самых простых, исходных позиций. Достаточно очевидно, что, если мы фиксируем два события в истории материальной точки, между которыми имеется некоторое число других событий, то только те описания существования этой материальной точки вместе с остальным миром, *в которых это промежуточное число остаётся одинаковым*, будут подходящими. Независимо от того, какое приближение мы используем — квантовое, в котором это число конечное, или классическое, в котором события полагаются непрерывными, а значит их число **предполагается бесконечным на любом отрезке** линии существования материальной точки. И в том, и в другом случае мы заменяем само число событий некоторой “длинной”, мерой непрерывности, обеспечивающей неизменность порядка в череде этих событий. Мы делаем это с помощью умножения числа событий на некий идеальный непрерывный промежуток между **двумя или тремя событиями**. Промежуток, являющийся естественным образом минимальной долей получающейся **непрерывности**, которую мы называем действием. Мы помещаем упорядоченный ряд событий в эту непрерыв-

ность. И теперь можем вести речь о неизменности величины действия вдоль отделённого участка траектории материальной точки. Не обращая внимание на исходное противоречие “конечное-бесконечное” число событий в нашем приближении. Бесконечное число точек появляется у действия, а число событий мы можем продолжать считать конечным. Требование стационарности, одинаковости числа событий, формулируется как неизменность, стационарность отрезка действия на этом участке для всех допустимых описаний мира при всех возможных вариациях структур, фиксирующих описание.

Точно также, коль скоро мы в качестве **предпочтительного** способа измерения этой самой “длины”, действия используем единицу, жёстко связанную с **фиксированным** количеством элементарных событий, то при таком способе измерения длины и сама единица, и касательный к траектории контравариантный вектор, получаемый идеализацией (предельным переходом) этой единицы, а также число событий приходящихся на единицу длины (ковариантный градиент действия) обязаны быть **абсолютно (ковариантно)** постоянными вдоль траектории. Т.е. независимыми от конкретного вида связности, созданной остальным миром на самой этой траектории. И утверждение это должно формулироваться независимо от способа приписывания координат как точкам траектории, так и всем точкам области, её содержащим. Мы допускаем использование в нашем описании координат отличных от предпочтительных, связанных с ними нелинейно. Поэтому речь идёт об абсолютных (ковариантных) производных этих двух связанных с материальной точкой векторов. Производных, учитывающих все такие возможные нелинейные зависимости. Об их обязательном равенстве нулю, а значит о ковариантной неизменности этих векторов вдоль траектории. *Об их сохранении.* Название “геодезическая линия” связывают с сохранением касательного вектора вдоль траектории. Но, как мы видим, сохраняется и двойственный ему удельный ковариантный вектор, градиент действия, которое является **для траектории материальной точки** естественным каноническим пара-

метром. В геометрии, как идеальной дисциплине, в любой точке области и в любом направлении можно определить некую геодезическую. С точки зрения физики, как описания мира, это означает только, что пока мы не привязали эту идеальную конструкцию к неким конкретным процедурам измерений, её создающим, то имеется полная свобода в этом вопросе. И только конкретизация допустимых, в той или иной степени **реализуемых нами** процедур измерения ставит в соответствие существованию в рассматриваемой части мира некоторой материальной точки (цепочки событий, связанных отношениями причина-следствие) математическое понятие геодезической.

Какое из этих двух утверждений — уравнение геодезичности траектории материальной точки или стационарность действия на любом её заданном отрезке — брать за формообразующую основу нашего геометрического описания мира — вопрос только удобства, простоты применения для получения результата.

Столь же ясно, что и принцип стационарности действия в ограниченной области точно также возникает из его стационарности при вариациях способа её описания на любом отрезке траектории материальной точки. Отрезке, вырезанном этой областью. Ведь само это действие области формируется заключёнными в ней отрезками линий существования материальных точек. Но, так как в области может существовать больше чем одна материальная точка, то для этого случая принцип стационарности оказывается имеющим преимущество. Ведь отслеживать одну величину для области всегда гораздо легче, чем несколько траекторий. Да и результат получается имеющим существенно большую общность — он применим к любым конкретным положениям траекторий материальных точек в выделенной полномерной области. Поэтому при изучении условий для физических полей, являющихся в нашем описании образом вмещающей события непрерывности, основной упор был сделан на этом принципе.

Но вот для случая описания движения материальной точки в физических полях некоторое преимущество получает опо-

ра на уравнения, связанные с геодезичностью траектории. На уравнения сохранения основы всех процедур измерения — канонического касательного вектора (отнесённого к каноническому параметру) как образа базовой единицы времени, и требование сохранения энергии-импульса. Как в “линейной” форме сопряжённого с касательным вектором ковариантного вектора, так и в “распределённой по полномерной области” форме тензора энергии-импульса.

Связано это с трудностью правильного определения действия на траектории материальной точки через геометрические структуры в описании мира в классических приближениях. Ведь число событий в единицу времени в системе покоя для всех материальных точек в классических приближениях оказывается полностью оторванным от геометрии, является для теории внешним параметром. Поэтому действие вдоль траектории в классических приближениях может быть только **вычислено** с использованием двух составляющих — массы покоя и **правильно выбранного** канонического скалярного параметра.

Но как именно мы должны определить нужный нам канонический скалярный параметр, отличающийся от действия на множитель, равный массе покоя, **через связность или производные от неё тензоры**? Представляется достаточно очевидным то, что в нашем способе описания мира сам канонический параметр на траектории материальной точки, т.е. собственное действие, может быть ассоциирован с любой такой траекторией только как результат интегрирования вдоль этой траектории какой-то структуры, порождённой связностью. Просто потому, что ничего иного в нашем описании мира пространством-временем не имеется.

Да, мы опираемся на события. Но что такое “события” с точки зрения пространства-времени как идеализированной математической идеи? Это особые точки в континууме пространства-времени. Их особенность в чём? В особенностях связности как функции, имеющейся в каждой выделенной области. В тех свойствах связности как функций, которые позволяют нам **считать** такие

точки. Мы ведь напрямую опираемся именно на этот факт — само существование материальных точек мы описываем линиями **сингулярности** именно связности. В классических приближениях непрерывными линиями сингулярностей. В этих приближениях мы можем считать такие линии, но не отдельные события. А что станет с этими линиями, если мы перейдём к квантовым приближениям? К приближениям, в которых мы уйдём от непрерывности событий в истории частицы, которую в классических приближениях мы рассматривали как материальную точку? Если, конечно, мы будем по-прежнему использовать для описания мира идею непрерывного пространства-времени?

А мы будем это делать. По простейшей причине — нам нужно **единое** описание мира, такое, чтобы все приближения к образу мира были **совместимыми**, чтобы нам было совершенно ясно, каким образом они переходят друг в друга. Так что и в квантовых приближениях, когда события в истории частицы будут дискретными, в нашем распоряжении останутся и область континуума, в которой находятся эти события, и векторы репера, **идеализированные** образы масштабов, и связность, **как набор функций, определённых в каждой точке этой области**, описывающий изменения в векторах репера. Как в тех точках, где есть события, так и в тех, где их нет. Событий нет, но, тем не менее, там подразумевается **существование идеального образа**, как контравариантного вектора масштаба времени, так и дуального ему ковариантного вектора градиента действия. Градиента **канонического скалярного параметра**. Градиента, значение которого вдоль **любой допустимой непрерывной** линии, соединяющей некоторый набор событий, мы полагаем вектором энергии-импульса выделенной в области частицы. В нём фиксирована дискретная часть, число событий в выбранную единицу времени на выбранном отрезке существования частицы. Но сам-то канонический параметр обязан быть непрерывным, такой же функцией точки на возможной траектории. И эта функция не может быть произвольной, она обязана быть жёстко обусловлена тем, что определяет геометрию области. Т.е. должна

быть обусловлена связностью в области. Связностью, определённой на каждой возможной траектории. Определённой чем? Всем миром, в котором мы выделили конкретную цепочку событий (**мы, или сам мир, тем что собрал эти события в отдельимую в себе цепочку — не важно**). Т.е. связностью на тех непрерывных линиях, которые могут объединить дискретные события в связную цепочку. А что тогда представляет, выделяет сами события на этих линиях? Если в классических приближениях нам требовалось признать обращение в бесконечность определённых коэффициентов в связности, то здесь будет достаточно гораздо меньшей “особости”. Например, достаточно будет принять **периодичность** коэффициентов связности вдоль каждой возможной траектории и связать её с событиями, описывать их как те точки, где эта периодическая часть связности принимает одни и те же значения. Более того, наш способ определения времени, определения прототипа масштаба времени, базирующийся на счёте событий и превращении этого дискретного ряда в непрерывность посредством умножения на фиксированный кусочек непрерывности (постоянную Планка) требует именно такой ассоциации, именно такого условия на связность как способ согласования идеализированных образов масштабов и в области, и на линиях в этой области.

В таких приближениях исчезнет разделение связности на “внешнюю” и “собственную”. Она вся станет “внешней”, а лучше сказать, единой. Поскольку коэффициенты связности являются в определённом смысле *распределениями*, удельными величинами в области⁶, то в квантовых приближениях собственное действие вдоль каждой **возможной** траектории частицы, согласованной со всем остальным миром будет интегралом от некоторой комбинации коэффициентов связности. И это действие, как скалярный параметр вдоль траектории, должно также описывать некую периодичность, связанную именно с этой частицей. В сле-

⁶Обратите внимание на то, что у коэффициентов связности один контравариантный и **два** ковариантных индекса. Так что, в их геометрическом смысле превалирует *удельность*, связанная с определением ковариантности.

дующем томе мы увидим это явно⁷.

Из самых общих соображений достаточно легко догадаться, какая же комбинация коэффициентов связности может рассматриваться как градиент *распределённого в области* действия. Ведь в этом случае речь может идти только о градиенте скалярной плотности. А ковариантные градиенты скалярных плотностей при нелинейной зависимости коэффициентов связности от точки в области обязательно включают в себя, кроме обычной производной ещё и свёртку связности Γ_j . И ничего больше. Поэтому, если **всё** в области определяется остальным миром, **согласовано** с локальными характеристиками данной цепочки событий, то и обычная производная (градиент) действия обязана иметь выражение именно через эту свёртку.

А что же мы можем сделать сейчас, работая в классических приближениях? С одной стороны, мы можем напрямую опираться на результаты, полученные в квантовых приближениях. А там мы явно увидим, что собственное действие является интегралом от некоторой части свёртки связности.

Мы можем пойти и немного иным путём, опираясь только на уже принятые нами соглашения, и на тот момент, что искомым нами канонический параметр, собственное действие материальной точки и в классических приближениях будет интегралом от некоторой, изначально неизвестной нам комбинации коэффициентов **внешней** для материальной точки связности. Рассматривая это требование как условие согласованности выделенной материальной точки и всего остального, внешнего мира.

Естественно, нам будет удобно идти тем же путём последовательного усложнения связности, последовательного принятия во внимания всех тех свойств реперов, которые нам требуются для согласованного описания мира как континуума. Поскольку опять речь будет идти о согласии в описании области и линии, содержащейся в этой области, то опираться нам придётся не отдельно на линейную форму собственного действия, а на обе его

⁷Если в момент, когда вы читаете этот том, следующего тома ещё нет, то данный вопрос подробно описан также в уже изданной ранее книге [2].

формы — и линейную, и распределённую в полноценной области, т.е. на плотность действия.

Первый шаг на этом пути мы сделали, введя классическую метрику и определяемый через неё интервал. Именно метрический интервал стал первым приближением к искомому каноническому параметру (после умножения на массу покоя) в нашем геометрическом описании мира. Точным в случае чисто метрической связности. Как мы подробно рассмотрели в предыдущей главе, этот случай соответствует полному отсутствию электромагнитного поля и поля кручения в рассматриваемой области. Единственное физическое поле, присутствие которого полностью описывается вычисленным таким образом действием — это поле гравитации. И, конечно, этот случай соответствует также и отсутствию каких-либо физических полей в рассматриваемой области. Точнее, пренебрежению каким-либо влиянием внешнего мира на выделенную материальную точку, кроме учёта наличия самих событий, описываемого величиной массы покоя. Внешнего для геометрии параметра в наших текущих приближениях.

Поскольку метрику в области мы принудительно вводим как набор регулярных функций точки, то и сама метрика, и метрическая часть связности, свёртка которой сводится к градиенту логарифма метрической плотности (заметьте, именно к *градиенту* некоторой функции), а описание событий остаётся внешним к геометрии области, то в приближении чистой гравитации (или полного отсутствия внешних для рассматриваемой материальной точки полей) мы не можем опираться на эту свёртку связности. Вместо этого вклад в канонический скалярный параметр метрической связности (т.е. вклад собственно метрики) мы ввели особым образом, напрямую.

Требование каноничности скалярного параметра на траектории это ещё и требование геодезичности самой траектории, требование исчезновения вариации действия при варьировании условий, определяющих траекторию. Как в форме линейного интеграла, так и в форме интеграла по всей области.

Вспомним выражение для плотности тензора энергии-им-

пульса материальной точки (2.30) и запишем с его помощью собственное действие в некоторой области, содержащей только эту материальную точку⁸:

$$\begin{aligned} s_0 &= -\mathbf{i} \int \mathbf{g}_{ik}(x) \mathfrak{T}_0^{ik} d^4x = \\ &= \mathbf{i} \int \mathbf{g}_{ik}(x) m_0 c \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3) \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^k}{dl} d^4x. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Метрику в области мы считаем набором известных функций координат. Именно для того, чтобы обратить ваше внимание на этот факт я явным образом указал эту зависимость скобками у метрического тензора в приведённом выражении, хотя обычно это просто предполагается по умолчанию.

Достаточно ясно, что этот функционал по области явным образом редуцируется до функционала по одномерной линии, т.к. δ -функции убирают интегрирование по пространственной части области и остаётся только интегрирование по временной координате $x^4 = \mathbf{i}ct$. Таким образом, функционал собственного действия в области принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} s_0 &= \mathbf{i} \int \mathbf{g}_{ik}(x) m_0 c \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^k}{dl} dx^4 = \\ &= - \int \mathbf{g}_{ik}(x) m_0 c^2 \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^k}{dl} dt = m_0 c \int dl. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Нам нужны соотношения, определяющие траекторию движения материальной точки при таких условиях, при известной метрике (а значит, и метрической связности) в области. Получить их мы можем легко из тех же соображений, которые были ведущей нитью всего нашего построения описания мира. Действие области обязано быть стационарной величиной при вариациях нашего описания. Что мы можем варьировать в данном случае? Только **зависимость метрического параметра l и соответствующую зависимость координат траектории частицы**

⁸По сути дела, мы сейчас пройдем в обратном направлении тот путь, который использовали для определения вида главной части тензора энергии-импульса материальной точки.

от точки области. Причём концы траектории в области остаются фиксированными. Тогда, согласно (1.4), получаем условие на связь между координатами и метрическим параметром, т.е. условие, определяющее траекторию материальной точки в области с зависящей от точки области метрикой:

$$\frac{d^2 x^m}{dl^2} + g^{km} (\partial_i g_{jk} - \frac{1}{2} \partial_k g_{ij}) \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl} = 0. \quad (3.13)$$

Это уравнение, учитывая тождественное соотношение

$$\begin{aligned} g^{km} \partial_i g_{jk} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl} &= g^{km} \partial_j g_{ik} \frac{dx^j}{dl} \frac{dx^i}{dl} = \\ &= \frac{1}{2} g^{km} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik}) \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

и, вспоминая (2.20), приводим к стандартному виду для уравнения геодезической в метрической связности

$$\frac{\tilde{D} dx^m}{dl} \frac{dx^m}{dl} = \frac{d^2 x^m}{dl^2} + \tilde{\Gamma}_{ij}^m \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl} = 0. \quad (3.15)$$

Для случая неметрических связностей подобные выкладки мы проделаем позже.

На примере плотности тензора энергии-импульса единственной материальной точки рассмотрим одно из важнейших общих свойств этой введённой нами структуры, характеризующей распределение действия в области по отношению к классической метрике. Вычислим ковариантную относительно метрической связности **дивергенцию**, **расходимость** этой плотности.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_i \mathfrak{T}_0^{ik} &= -m_0 c \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3) \frac{dx^i}{dl} \tilde{\nabla}_i \frac{dx^k}{dl} \\ &\quad - m_0 c \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3) \frac{dx^k}{dl} \tilde{\nabla}_i \frac{dx^i}{dl} = \\ &= -m_0 c \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3) \frac{\tilde{D} dx^k}{dl} \frac{dx^k}{dl}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Очевидно, что в случае чисто метрической связности это выражение обращается, вследствие (3.15), в нуль. Как и должно

быть для согласованного описания. Ведь, как я уже писал ранее, установленная нами связь (2.64) между метрическим тензором Риччи и тензором энергии-импульса требует обращения в нуль метрической дивергенции последнего всегда, поскольку соответствующая ему дивергенция структуры из компонент тензора Риччи обращается в нуль вследствие тождеств Бианки.

При наличии в области неметрической части связности мы сможем использовать это требование на метрическую дивергенцию **полного** тензора энергии-импульса и полученное только что соотношение (3.16) для определения уравнения движения материальной точки, не опираясь напрямую на уравнение геодезической в полной связности.

3.3 Неинерциальные системы отсчёта

Начнём изучение “сил” с понятия о силах инерции. В том смысле, который мы этим силам приписали выше — базирясь на возможности устранить их **глобально** хотя бы в некоторой полноценной области выбором подходящей системы отсчёта.

Для того, чтобы понять, что такое силы инерции в чистом виде и каким образом они изображаются в нашем описании мира, рассмотрим идеальный предельный случай — чисто евклидово пространство. Т.е. метрика представлена полноценным тензором g_{ik} , который в декартовых координатах принимает значения, равные δ_{ik} всюду в рассматриваемой области пространства-времени. А связность в этой системе отсчёта всюду в области равна нулю. Займёмся описанием **движения материальной точки** в таком стерильном приближении. Приближении полного отсутствия событий, формирующих аффинную связность в данной области. События на траектории существования самой материальной точки мы при этом не рассматриваем как источник **внешней** для них связности. Как я уже не раз об этом говорил, в силу сингулярного характера, порождаемая самой частицей часть связности **на линии существования именно этой материальной точки** имеет тензорную структуру и не даёт

вклада в уравнение **именно её геодезической**. В классических приближениях самодействие отсутствует.

Это значит, что мы пока описываем ситуацию с точки зрения **гипотетически возможной системы отсчёта**, а не с точки зрения какой-либо реальной. Просто потому, что в любой реальной системе отсчёта **обязана иметься хотя бы одна материальная точка в начале её пространственных координат**, на базе которой и определяется её временной масштаб, порождающий с помощью принятых нами постулатов о распространении электромагнитных волн пространственные масштабы. На базе постулатов о свойствах классической метрики.

В реальном мире некоторым приближением к такому идеальному случаю можно считать описание движения тела в практически пустом пространстве, в области весьма удалённой от каких-либо иных массивных тел. Тогда внешнюю связность можно с большой степенью точности полагать чисто евклидовой (т.е. нулевой в местной инерциальной системе отсчёта), а искажение полной связности вследствие наличия нашего **пробного** тела в нашем описании на траекторию **именно этого тела** не влияет. А если мы вспомним сделанные нами ранее оценки поправок к компонентам классической метрики по сравнению с их евклидовыми (единичными) значениями для обычных в нашем окружении массивных тел (см. конец §2.6), то легко прийти к выводу, что и в большинстве таких случаев мы вполне можем с хорошей точностью полагать метрику чисто евклидовой.

Прежде чем перейти к изучению собственно сил инерции нам необходимо хорошо разобраться с описанием движения в группе **инерциальных систем отсчёта**, порождаемой нашей материальной точкой. Начнём с определения группы декартовых систем координат, содержащих **систему покоя нашей частицы**. В системе покоя положение нашей частицы, её **траектория в пространстве-времени** описывается простейшими соотношениями:

$$\{x^\alpha\} = 0, \quad x^4 = i\tau. \quad (3.17)$$

Изменяется только одна координата — x^4 , определяемая нами

стандартным образом через собственное время τ . Остальные, пространственные координаты на траектории неизменны. Их мы сделали равными нулю, поместив начало пространственной части системы отсчёта на нашу классическую частицу. Начало отсчёта времени может быть выбрано в произвольный момент истории существования нашей пробной частицы. Единица времени выбрана так, чтобы **масса покоя**, характеристика в классическом приближении **внешняя** для любой пробной частицы была **постоянна во времени**. Её конкретное значение всё ещё не фиксировано до конца, т.к. указанному условию удовлетворяют все масштабы времени, связанные с одним произвольно выбранным масштабом e^4 линейным соотношением $e^{4'} = k \cdot e^4$ с ограничением на коэффициент k : это **действительное безразмерное число** $\neq 0$. Пространственные единицы для всех трёх направлений нами выбраны одинаковыми и такими, чтобы для всякой точки в области, окружающей нашу частицу было справедливо соотношение

$$l^2 = -g_{ij}x^i x^j = c^2 \tau^2 - \sum_{\alpha=1,2,3} (x^\alpha)^2 = const \quad (3.18)$$

при преобразованиях **внутри группы инерциальных систем отсчёта с приписанными им декартовыми координатами**. Т.е. внутри группы систем координат, связанных друг с другом и описанной нами системой покоя группой преобразований, состоящей из **четырёхмерных поворотов с углами поворотов, не зависящими от точки**, возможно дополненной группой сдвигов начала координат также на одинаковые для всех точек области величины. Скорость света c нами тоже фиксирована всего лишь как постоянная не нулевая величина с точностью до произвольного не нулевого коэффициента, позволяющего выбирать разную, но одинаковую для всех направлений пространственную единицу. Таким образом, эта система отсчёта, система покоя нашей материальной точки определена, кроме указанной выше свободы в выборе единиц времени и расстояния, ещё и с точностью до произвольных допустимых чисто пространственных ортогональных поворотов стандартного репера.

Для её геометрического описания пригодны любые системы координат из совокупности, описанной выше. В допустимые координаты, соответствующие этой системе отсчёта (системе покоя) мы включим также (с необходимой осторожностью) и сингулярные в пространственной части координаты, такие как полярные сферические и цилиндрические, использование которых в ряде случаев может существенно облегчить понимание возникающих соотношений.

Соотношение между дифференциалом метрического скалярного параметра на линии существования материальной точки и дифференциалами смещений вдоль этой линии весьма просто — $dl = cd\tau$. В этой системе отсчёта (т.е. во всех ей соответствующих координатах) нашей материальной частице сопоставляются (описывают её движение относительно системы отсчёта) три полноценных (с учётом того что **вмещающее** пространство-время евклидово, а значит чисто метрическое) вектора — контравариантный касательный к траектории вектор $dx^i/dl = \{0, 0, 0, \mathbf{i}\}$, ковариантный вектор энергии-импульса $p_i = \mathbf{i}\partial_i s_0 = \mathbf{i}\partial_i(m_0 cl) = \{0, 0, 0, m_0 c\}$ и контравариантная версия вектора энергии-импульса $p^i = \mathbf{g}^{ij}p_j = \{0, 0, 0, m_0 c\}$. Из наших определений необходимо следует, что эти векторы удовлетворяют следующим уравнениям:

- уравнению геодезичности траектории, являющемуся условием на поведение вдоль неё касательного вектора

$$\frac{D}{dl} \frac{dx^i}{dl} = \frac{d}{dl} \frac{dx^i}{dl} = \{0, 0, 0, \frac{d}{d\tau} \mathbf{i}\} = 0;$$

- двум уравнениям, следующим из уравнения геодезичности и каноничности действия на траектории как скалярного параметра, записывающим сохранение на траектории энергии-импульса (наше исходное определение массы покоя как постоянной величины)

$$\frac{D}{dl} p_i = \frac{d}{dl} p_i = \{0, 0, 0, \frac{d}{cd\tau} m_0 c\} = 0 \Leftrightarrow m_0 = const, c = const$$

и

$$\frac{D}{dt}p^i = \frac{d}{dt}p^i = \{0, 0, 0, \frac{d}{cd\tau}m_0c\} = 0 \Leftrightarrow m_0 = const, c = const$$

Описанную выше свободу изменения координат в системе покоя нашей материальной точки мы рассматриваем как преобразования координат **в рамках одной и той же системы отсчёта**. При полном сохранении всех принятых нами соглашений у нас остаётся также возможность описания ситуации с точки зрения систем отсчёта, **движущихся относительно этой системы покоя прямолинейно и с постоянной скоростью, не превышающей скорость света**. Эти системы отсчёта **выделены среди всех возможных** тем, что преобразования между ними сохраняют различный смысл единиц времени и расстояния. Сохраняют ту форму записи, которая отражает принципиальную разницу между непосредственно определяемым нами масштабом времени (мнимым числом координаты, соответствующей времени) и определяемыми условием (3.18) уже через масштаб времени единицами расстояния (т.е. действительными числами пространственных координат). Это означает, что в такой группе, группе инерциальных систем отсчёта все наши соглашения относительно **стандартного** вида метрического тензора ($g_{ik} = \delta_{ik}$, при ограничении только декартовыми координатами), а значит и полного репера масштабов (т.е. условие 3.18) остаются выполненными. Преобразования между такими системами отсчёта остаются линейными, и, по сути дела, являются расширением группы ортогональных пространственных поворотов посредством включения в неё также и поворотов в плоскостях, объединяющих любую из пространственных координат с временной.

Выберем в этой группе инерциальных систем отсчёта такую, в которой **наша материальная точка движется** с некоторой постоянной скоростью. Пусть для простоты при этом меняется только координата x^1 . Переход в эту систему из нашей системы покоя описывается поворотом на мнимый угол в плоскости $\{x^1, x^4\}$. В такой системе отсчёта положение нашей части-

цы, её **траектория в пространстве-времени** описывается уже немного более сложными соотношениями:

$$\{x^\alpha\} = 0, \alpha = 2, 3; \quad x^4 = \mathbf{i}ct \quad \text{и} \quad x^1 = v \cdot t. \quad (3.19)$$

Изменяются две координаты — координата x^4 , определяемая нами стандартным образом через время в этой системе отсчёта t , которое уже не совпадает с собственным временем τ нашей материальной точки, и координата x^1 , по направлению которой в этой системе движется наша частица. Скорость этого движения $dx^1/dt = v$. Остальные пространственные координаты на траектории неизменны.

Более общий случай произвольного направления движения в пространстве легко получить с помощью чисто пространственных ортогональных поворотов пространственной части репера на нужные углы (действительные). Очевидно, что траектория материальной точки во всех инерциальных системах отсчёта всегда будет прямой линией, описываемой набором **линейных** функций координат вида $\{x^\alpha = v^\alpha \cdot t + x_0^\alpha, \quad v^\alpha = dx^\alpha/dt\}$, x_0^α — начальные положения (при $t = 0$) материальной точки, которые могут появиться при сдвигах начала отсчёта в различных инерциальных системах. Достаточно ясно, что сама такая система отсчёта, т.е. та **гипотетически возможная** частица (материальная точка), на базе которой она построена, движется относительно системы покоя рассматриваемой нами материальной точки равномерно и прямолинейно со скоростью $v_{\text{co}}^\alpha = -v^\alpha$.

Напомню вид линейного ортогонального преобразования, связывающего систему покоя нашей материальной точки и рассматриваемую нами инерциальную систему отсчёта. Системе покоя соответствуют штрихованные координаты и $A_i^{i'} = \partial_i^{i'}$:

$$A_i^{i'} = \begin{pmatrix} \cos \mathbf{i}\varphi & -\sin \mathbf{i}\varphi \\ \sin \mathbf{i}\varphi & \cos \mathbf{i}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \mathbf{i} \sinh \varphi \\ -\mathbf{i} \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Материальная точка, покоящаяся относительно штрихованной системы координат в $x^{1'} = 0$, имеет скорость $v = c \cdot \tanh \varphi$ в направлении x^1 относительно нашей системы координат. Т.е.

угол поворота и соответствующая ему скорость связаны однозначно и являются взаимозаменяемыми параметрами этого преобразования. Коэффициенты **линейного** ортогонального преобразования между этими системами, которые можно определить как стандартные тригонометрические функции угла поворота φ в плоскости $\{x^1, x^4\}$ (гиперболические синус и косинус) связаны со скоростью следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\sinh \varphi &= \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \\ \cosh \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Как я уже много раз говорил ранее, преобразование (3.20), представляет собой вполне обычный ортогональный поворот. Только, поскольку это поворот в плоскости двух координат, имеющих разный смысл — в плоскости, объединяющей действительную и мнимую координаты — угол поворота является мнимым. Такой поворот на мнимый угол является ничем иным, как хорошо известным преобразованием, носящим название преобразования Лоренца.

Выпишем все интересующие нас векторы, полноценные и не очень, описывающие движение нашей материальной точки. Для полного понимания всех соотношений нам потребуется выражение для дифференциала метрического скалярного параметра через дифференциалы смещения **вдоль линии существования материальной точки** в нашей новой системе отсчёта. Запишем его для случая произвольного направления движения через компоненты трёхмерной скорости:

$$\begin{aligned}dl &= \sqrt{-g_{ik}dx^i dx^k} \\ &= \sqrt{c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \\ &= cdt \sqrt{1 - \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{c^2 dt^2}} \\ &= cdt \sqrt{1 - (v/c)^2},\end{aligned}\tag{3.22}$$

т.к. $\frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{dt^2} = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = v^2$. При выборе направления движения только по одной координате итоговая формула не изменяется, просто в общей **трёхмерной** скорости все компоненты, кроме одной, равны нулю.

Касательный к траектории вектор (при движении только вдоль координаты x^1) теперь имеет вид

$$dx^i/dl = dx^i/(cdt\sqrt{1-(v/c)^2}) = \\ \{v/(c\sqrt{1-(v/c)^2}), 0, 0, \mathbf{i}/\sqrt{1-(v/c)^2}\}.$$

Контравариантная версия вектора энергии-импульса записывается в этой системе отсчёта следующим образом:

$$p^i = -\mathbf{i}m_0c \, dx^i/dl = \\ \{-\mathbf{i}m_0v/\sqrt{1-(v/c)^2}, 0, 0, m_0c/\sqrt{1-(v/c)^2}\}.$$

Соответственно, ковариантный вектор энергии-импульса в компонентах выглядит также:

$$p_i = g_{ik}p^k = \\ \{-\mathbf{i}m_0v/\sqrt{1-(v/c)^2}, 0, 0, m_0c/\sqrt{1-(v/c)^2}\}.$$

Если мы введём в рассмотрение ещё и “неполноценный вектор” трёхмерной скорости (далее под скоростью всегда подразумевается этот вектор) $v^\alpha = dx^\alpha/dt$, $v = \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha/dt dx^\beta/dt}$, являющийся вектором в полном смысле только в рамках систем координат, получаемых для данной системы отсчёта чисто пространственными преобразованиями, то можем переписать приведённые выше соотношения для контравариантных векторов в случае произвольного направления движения так:

$$\frac{dx^i}{dl} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \{v^\alpha/c, \mathbf{i}\}, \\ p^i = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \{-\mathbf{i}m_0v^\alpha, m_0c\}.$$

С учётом того, что в наши соотношения помимо постоянных величин m_0 и c вошли лишь столь же **постоянные** трёхмерные компоненты скорости v^α , достаточно очевидно выполнение записанных в инвариантной форме уравнений геодезичности траектории нашей уже **движущейся** материальной точки и сохранения вектора энергии-импульса в процессе этого движения. Сейчас нам интересно только посмотреть какой вид принимает уравнение сохранения энергии-импульса в приближении малых скоростей, $v/c \ll 1$. Чтобы увидеть, во что превращаются наши соотношения в том приближении, в котором сформулированы законы Ньютона.

При обычных для нас скоростях соотношение $v/c \ll 1$ выполняется с очень хорошей точностью. Скажем, для почти десяти скоростей звука, при $v = 3$ км/сек, $v/c \approx 10^{-5}$. И $(v/c)^2 \approx 10^{-10}$. Для таких скоростей с очень хорошей точностью $\sinh \varphi \approx v/c$ и $\cosh \varphi \approx 1 + \frac{1}{2}(v/c)^2$. При этих условиях преобразование Лоренца (3.20, 3.21) может быть записано как

$$A_i^{j'} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} & \mathbf{i} \frac{v}{c} \\ -\mathbf{i} \frac{v}{c} & 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Это преобразование, после пренебрежения в нужных местах малыми величинами v/c и $(v/c)^2$, превращается в преобразование Галилея:

$$\begin{pmatrix} x^{1'} = & x^1 & -vt \\ t' = & & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 = & x^{1'} & +vt' \\ t = & & t' \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Заметьте, что преобразование Галилея, помимо прочего, перестаёт быть *поворотом*, а превращается в аналог локализованного во времени *смещения* начала пространственных координат.⁹ Вектор энергии-импульса в этом приближении, после разложения в ряд Тейлора по малому параметру v^2/c^2 функции

⁹Это замечание достаточно важно не только при описании относительного движения материальных точек, но и для понимания очень многих моментов в описании мира там, где речь касается вращения (тел, или систем отсчёта) и, возможно, кручения. **Всякое движение при его рассмотрении в сопутствующей системе покоя и какой-то иной, необходимо**

$(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}v^2/c^2$, в котором мы оставили только первый поправочный к единице малый член, выглядит следующим образом:

$$p_i = p^i = \{-i m_0 v^\alpha, \frac{1}{c}(m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2})\}. \quad (3.25)$$

Пространственные компоненты нашего вектора энергии-импульса в точности совпадают с обычным для приближения Ньютона определением трёхмерного вектора импульса. Конечно, с учётом наших соглашений о различном смысле чисел, выражающих пространственные и временную координаты, из-за которых появился фактор $-i$. А вот четвёртая компонента требует более подробного анализа. Фактор $1/c$ появился из-за того, что мы используем в качестве четвёртой координаты не “время в его собственных единицах”, а “время, пересчитанное в пространственные единицы”. Скажем, секунды для переменной t мы умножением на скорость света превращаем в сантиметры. Соответственно, четвёртая координата при этих соглашениях выражается в “мнимых” сантиметрах. Так что в качестве четвёртой компоненты нашего вектора энергии-импульса мы фактически используем E/c , где E будет уже обычной энергией, в привычных единицах классической физики. Но и эта энергия тоже отличается от привычной в физике Ньютона кинетической энергии материальной точки. Отличается наличием постоянной для любого движения

вносит в связывающие их преобразования координат помимо “поворотов” репера ещё и локализованные (т.е., в общем случае, разные для разных точек траектории) сдвиги начала отсчёта координат.

Кроме того, как мне кажется, именно то, что преобразования Галилея по своему смыслу являются преобразованиями **сдвига** начала **пространственной части репера** на величины, зависящие от времени, создаёт иллюзорную уверенность в существовании **пространства, как отдельной, цельной сущности, во времени**. Отсюда вырастает также и представление об “эволюции” Вселенной (рассматриваемой как **целое**) во времени. Поэтому очень важно осознавать, что **всякое движение**, с любой, даже самой незначительной скоростью, следует понимать **локально, в точке**, как **поворот, а не сдвиг**. Сдвиг является уже итогом **реализованного перемещения**, пусть и бесконечно малого.

материальной точки составляющей, пропорциональной массе покоя этой точки. В физике Ньютона эта составляющая игнорировалась. Всё внимание было обращено на поведение её зависящей от скорости движения переменной части, кинетической энергии $E_k = \frac{m_0 v^2}{2}$. Той части энергии тела, которая напрямую ассоциируется с его движением относительно других тел (точнее, относительно связанных с другими телами *систем отсчёта*). Только после разработки СТО стало понятно, что и покою материальной точки соответствует энергия $E_0 = m_0 c^2$. Знаменитая формула Эйнштейна, которая в нашем описании появилась не как “закон природы”, а как самая естественная запись принятых нами с самого начала соглашений в выбранном способе описания мира.

Нужно добавить следующее. Поскольку энергия покоя никак не зависит от времени в системе отсчёта, в которой материальная точка движется с той или иной скоростью, а при малых скоростях само время в разных системах отсчёта фактически не зависит от скорости согласно (3.24), и его с хорошей степенью точности можно полагать **одним и тем же** для таких **разных, движущихся друг относительно друга** систем отсчёта, то уравнение сохранения энергии-импульса при малых скоростях распадается на два **независимых** уравнения сохранения. Уравнение сохранения трёхмерного импульса

$$\frac{d}{dt} p^\alpha = -i m_0 \frac{d}{dt} v^\alpha = 0 \quad \text{и} \quad (3.26)$$

уравнение сохранения **кинетической** энергии материальной точки

$$\frac{d}{dt} E_k = \frac{d}{dt} (m_0 v^2 / 2) = 0. \quad (3.27)$$

Т.е. в приближении малых скоростей мы имеем полное соответствие с динамикой материальной точки Ньютона в рамках группы инерциальных систем отсчёта (при отсутствии сил, действующих на эту материальную точку).

Теперь мы можем, наконец, перейти к рассмотрению наших соотношений в системах отсчёта, более общих, чем глобально

инерциальные. В системах, в которых в динамике Ньютона необходимо учитывать особые силы, силы инерции. При этом мы всё ещё не отказываемся от использования максимально стандартизованных координат. Таких координат, которые обусловлены нашими возможностями измерять что-то с помощью **внутренних** для пространства-времени реперов масштабов. Эти стандартизованные реперы у нас всегда привязаны к линиям существования некоторых материальных точек и организованы с помощью принятых нами соглашений о распространении света. Так что речь по-прежнему пойдёт только о системах отсчёта, пусть и гипотетических (т.е. обладающих предписанным нами свойством отсутствия какого-либо влияния на окружающий континуум), но при этом **всегда**, в принципе, базирующихся на движущихся (т.е. имеющих не совпадающие линии существования) друг относительно друга материальных точках. Просто одно, достаточно произвольное, ограничение на такое движение мы снимем — скорость относительного движения таких систем отсчёта теперь не обязана быть постоянной. И движение не обязано быть поступательным, т.е. прямолинейным. Скорость может меняться вдоль траектории материальной точки, как по величине, так и по направлению. “Группа” таких систем отсчёта уже не может называться группой (глобально) инерциальных систем отсчёта. Её следует называть группой **локально** инерциальных систем отсчёта. Это такие системы отсчёта, из которых в каждый момент существования некоторой материальной точки можно перейти в её систему покоя с помощью **локализованных** преобразований Лоренца. Т.е. таких ортогональных поворотов, параметры которых — углы либо скорости — могут **изменяться непрерывно в допустимых пределах** с изменением локального времени. Кроме того, такие ортогональные повороты непрерывно продолжаются и на всю рассматриваемую область пространства-времени, содержащую движущиеся друг относительно друга материальные точки. Это означает, что локально, с каждой точкой области связаны как наш полный стандартизованный репер, так и стандартизованный экземпляр метрического тензора (в систе-

мах координат, полученных с помощью этого репера). Причём, среди таких локально инерциальных систем отсчёта всегда имеется некоторая подгруппа, для которой стандартизация обеспечена **вдоль всей траектории** материальной точки **сразу**. Естественно, для каждой материальной точки это своя подгруппа систем отсчёта. Именно эти подгруппы и являются ядрами групп инерциальных систем отсчёта, генерируемыми каждая своей материальной точкой.

Существование локально инерциальных систем отсчёта для любой материальной точки гарантировано как с точки зрения физики, тем что существование прототипов масштабов собственного времени именно в таком виде постулировано нами в классических приближениях, так и с точки зрения геометрии, рассматриваемой как идеализированное описание поведения масштабов. Как я уже упоминал ранее, для **любой геодезической в произвольной** связности **можно** построить связанные с ней геодезические координаты, которые и становятся ядрами групп инерциальных систем отсчёта. Т.е. местными системами покоя, порождающими соответствующие группы инерциальных систем отсчёта за счёт указанного выше расширения допустимых для них координат.

Будем снимать наши ограничения на скорость движения материальной точки относительно выбранной системы отсчёта постепенно. Сначала рассмотрим случай чисто поступательного движения, но с переменной скоростью. Для простоты опять возьмём движение материальной точки только вдоль оси x^1 в декартовой системе координат. Только скорость v в (3.19) теперь уже не является постоянной во времени величиной: $v = v(t) \neq const$. Таким образом, рассматриваемая нами система отсчёта и порождающая её материальная точка двигаются относительно нашей материальной точки прямолинейно с переменной скоростью $v_{co} = -v$.

Коэффициенты в преобразованиях из данной системы отсчёта в систему покоя материальной точки (3.20, 3.21) и обратно становятся зависящими от положения, от координат как на

траектории материальной точки, так, вообще говоря, и во всём пространстве-времени. А значит, производные коэффициентов этих преобразований, т.е. **вторые** производные старых координат по новым (и наоборот) в нуль не обращаются. Эти величины становятся некоторыми *не нулевыми* функциями точки в рассматриваемой области. Для наших целей пока будет достаточно отслеживать эту функциональную зависимость только вдоль траектории.

Что в результате изменяется в характеризующих каждую точку области величинах, и, главное для нас сейчас, каждую точку траектории при переходе в такую систему отсчёта из инерциальной? Конкретно, из системы покоя рассматриваемой материальной точки, и из всех остальных инерциальных систем, входящих в порождаемую ею группу. Самое главное это то, что связность, тождественно равная нулю всюду в области для глобально инерциальной системы отсчёта, порождаемой материальной точкой, перестаёт быть равной нулю опять же всюду в области и, в первую очередь, на траектории материальной точки для рассматриваемой системы отсчёта. Даже для чисто евклидова пространства-времени. Ведь она преобразуется следующим образом:

$$\Gamma_{jk}^i = \partial_{i'}^i \partial_j^{j'} \partial_k^{k'} \Gamma_{j'k'}^{i'} + \partial_{i'}^i \partial_{jk}^{2i'}. \quad (3.28)$$

Второй член в этом соотношении в нашей системе отсчёта уже не будет нулём, несмотря на то, что пространство-время мы полагаем евклидовым в этой области. Здесь, как и раньше, штрихованные координаты соответствуют системе покоя нашей материальной точки, т.е. инерциальной, в которой связность равна нулю всюду, что ведёт к исчезновению первого члена в (3.28).

Преобразование из системы покоя в нашу систему имеет локально точно такой же вид, как и наоборот. Всё отличие состоит в знаке угла поворота, или, как видно из (3.21), в знаке скорости $v = v^1 = dx^1/dt$.

Вычислим ненулевые компоненты Γ_{jk}^i в точке $\{x^\alpha = 0, x^4 =$

$\mathbf{i}ct = 0\}$. Имеем

$$\partial_{jk}^{2i'} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^j} A_k^{i'}.$$

Переменными являются только компоненты $A_1^{1'} = A_4^{4'}$ и $A_1^{4'} = -A_4^{1'}$. Все остальные компоненты преобразования координат постоянны, и равны либо нулю, либо единице.

Необходимые нам производные легко вычисляются. Я не буду загружать текст выкладками для произвольных допустимых скоростей, т.к. хочу здесь лишь выявить полное согласие вида получаемых сил инерции с теорией Ньютона. Поэтому ограничусь приближением $v \ll c$, в котором эти производные вообще тривиальны и в нуль не обращаются всего две вторые производные:

$$\frac{\partial}{\partial x^4} A_4^{1'} = -\frac{\partial}{\partial x^4} A_1^{4'} = \frac{1}{c^2} \frac{dv}{dt}. \quad (3.29)$$

При нашем выборе направления движения и в приближении малых скоростей “вектор” сил инерции имеет всего одну значимую компоненту

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_I^1 &\approx -\Gamma_{44}^1 \frac{dx^4}{dl} (-\mathbf{i}m_0 c) \frac{dx^4}{dl} \approx \\ &\approx -\partial_{1'}^1 \frac{\partial}{\partial x^4} A_4^{1'} \cdot \mathbf{i}^2 \cdot (-\mathbf{i}m_0 c) = \\ &= -\mathbf{i}m_0 \frac{1}{c} \frac{dv}{dt}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

и выполнение уравнения (3.5) становится очевидным, т.к. слева и справа стоит одно и то же выражение. Однако, имея ввиду, что нашей целью является повторение модификации второго закона Ньютона для неинерциальных систем, нам следует переписать (3.5) в рассматриваемом нами случае через скорость относительного (локального, в выбранной нами точке) движения двух наших систем v_{co} :

$$\frac{d(m_0 v)}{dt} = -m_0 \frac{dv_{\text{co}}}{dt} = \mathbb{F}_{\text{ип}}, \quad \mathbb{F}_{\text{ип}} = \mathbf{i}c\mathbb{F}_I. \quad (3.31)$$

Это стандартное выражение для силы инерции в прямолинейно ускоряющейся системе отсчёта, принятое в физике Ньютона как постулат. А значит, введённое нами выражение для сил инерции через коэффициенты связности работает правильно.

Достаточно ясно, что наш выбор направления **поступательного** движения ускоренной системы отсчёта не является принципиальным и (3.31) можно просто переписать для произвольного направления движения, т.к. и скорости $v^\alpha, v_{\text{co}}^\alpha$, и сила инерции $\mathbb{F}_I^\alpha$ являются полноценными векторами относительно группы **линейных, чисто пространственных** преобразований координат в рамках какой-либо системы отсчёта. В том числе, относительно группы ортогональных пространственных поворотов. Произвольное направление движения можно получить после преобразования из этой группы, с коэффициентами преобразования, не зависящими ни от времени, ни от точки в пространстве. Все входящие в (3.31) величины имеют контравариантный индекс равным единице. Поскольку при указанных условиях они преобразуются совершенно одинаково, то эта формула для произвольного направления движения выглядит так:

$$\frac{d(m_0 v^\alpha)}{dt} = \text{ic} \mathbb{F}_I^\alpha = -m_0 \frac{dv_{\text{co}}^\alpha}{dt} = \mathbb{F}_{\text{ин}}^\alpha. \quad (3.32)$$

В такой форме это уравнение будет справедливым при любом направлении ускоренного прямолинейного движения системы отсчёта относительно материальной точки.

Выражение для силы инерции перестаёт быть таким простым, если мы выберем, используя **только допустимые преобразования в пространственной части репера**, такую систему отсчёта, в которой наша материальная точка **может менять направление своего движения**. Т.е., если зависимость её пространственных координат от времени в этой системе отсчёта будет описываться уже не прямой линией. Рассмотрим такой случай, переходя последовательно от одной системы отсчёта к другой, делая на каждом этапе акцент на принимаемых нами изменениях в точке зрения на описание движения нашей материальной точки. Будем также предполагать, что делая соответ-

ствующие преобразования координат, мы не выходим за рамки приближения малых скоростей движения (приближения Ньютона).¹⁰

Начнём с перехода в систему отсчёта, мало отличающуюся от уже рассмотренной нами прямолинейно (поступательно) ускоренной системы отсчёта. Чтобы не плодить слишком много штрихов в наших обозначениях, сохраним за этой системой отсчёта те же самые обозначения. Это не должно привести к путанице потому, что отличия новой системы отсчёта от предыдущей минимальны. Всё отличие будет состоять только в положении начала отсчёта пространственной части репера. Пусть, для определённости, в новой системе координат наша материальная точка имеет координату $x^1 = r$, а не $x^1 = 0$. Причём величина r не зависит от времени. Т.е. это не изменяющаяся во времени координата нашей материальной точки, а только одно её конкретное значение в заданный момент времени ($t = 0$). Что изменится в математических объектах, описывающих в этой системе отсчёта движение нашей материальной точки?

Все представленные выше соотношения для трёхмерных векторов и все **локализованные** преобразования координат останутся неизменными во всём, кроме того факта, что справедливы они будут не для точки $\{x^\alpha = 0\}, \alpha = 1, 2, 3$, а для точки $x^1 = r, \{x^\alpha = 0\}, \alpha = 2, 3$. Это же верно и для компонент вычис-

¹⁰Не надо думать, что если мы манипулируем только пространственными координатами, то не можем нарушить условий приближения малых скоростей. Простой пример — в полярных (пространственных) координатах сместите начало отсчёта на достаточно большую величину и получите любую желаемую *линейную* скорость вашей пробной частицы, движущейся перпендикулярно ведущему к началу отсчёта радиусу при вполне допустимой скорости (угловой) поворота направления на неё. В том числе, можно получить и линейную скорость, превышающую скорость света. Ясно, что это фикция, обязанная своим появлением использованию **не реализуемой реально никакими доступными нам средствами** системы отсчёта. Поэтому, вообще говоря, нам следует также всегда внимательно рассматривать и подобные ограничения на допустимые преобразования координат, а не только очевидные ограничения для поворотов Лоренца, связанные с необращением в нуль определителя матрицы преобразований. Не все сдвиги согласуются с нашим стандартным способом описания мира.

ленной нами аффинной связности Γ_{jk}^i и силы инерции $\mathbb{F}_{\text{ин}}^\alpha$.

А вот преобразования Галилея (3.24), связывающие новую систему отсчёта с локальной системой покоя нашей материальной точки изменятся явным образом:

$$\begin{pmatrix} x^1 = & x^1 & -vt - r \\ t' = & & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 = & x^1 & +vt' + r \\ t = & & t' \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Почему я говорю о новой *системе отсчёта* а не о другой *системе координат, соответствующей той же самой системе отсчёта*? Дело в том, что мы должны всегда помнить, что наши **в принципе реализуемые** системы отсчёта, даже гипотетически возможные, могут опираться только на наличие в начале их пространственных координат некоторой материальной точки, обеспечивающей своим нахождением там в “состоянии покоя” базовый масштаб времени, из которого с помощью соглашений о стандартной структуре метрического тензора строятся остальные, пространственные векторы полного репера масштабов. **Каждая линия существования материальной точки в континууме порождает свой набор систем отсчёта.** Поэтому, даже если в рассматриваемой как начало отсчёта пространственной точке и нет материальной, имеющей массу покоя точки, то *возможность* её туда поместить обязательно подразумевается. А значит, речь идёт именно об изменении системы отсчёта, а не о простом преобразовании координат в той же самой системе отсчёта.

Величину смещения начала отсчёта r мы сознательно не фиксируем, оставляя её свободным параметром.

Этот первый шаг нужен нам для того, чтобы легко сделать следующие, но он также позволяет сформулировать некоторое, достаточно общее утверждение обо **всех** неинерциальных системах отсчёта, движущихся **прямолинейно (поступательно) с произвольным ускорением относительно системы покоя некоторой выделенной материальной точки:**

- Сформулированные выше уравнения движения (второй закон Ньютона в модификации для неинерциальных систем

отсчёта) для любой материальной точки (любой массы покоя) и соответствующие выражения для силы инерции (поступательной) справедливы для **всех** положений такой материальной точки в пространстве (для всех пространственных координат) в таких неинерциальных системах, введённых для некоторой области пространства-времени.

Этот факт в классической физике рассматривается как свойство пространства, формализуемое в виде понятия о его **однородности**. Инвариантности описания точек пространства по отношению к произвольным сдвигам систем отсчёта. Это слишком сильное утверждение, справедливое лишь для малых областей и только в рассматриваемом нами сейчас приближении малых скоростей при отсутствии какого-либо учёта влияния материальной точки, принятой за базу отсчёта, на связность в окружающей её области. Как должно быть понятно из нашего рассмотрения, причиной являются не свойства пространства как такового, а свойства нашего способа описания мира, базирующегося всегда на стандартизованных системах покоя, привязанных к материальным точкам.

Силу инерции $\mathbb{F}_{\text{ин}}^\alpha$, обязанную своим существованием поступательному ускоренному движению некоторой системы отсчёта относительно системы покоя рассматриваемой материальной точки часто называют *переносной силой инерции*.

Теперь перейдём к специальным пространственным координатам, которые мы уже использовали в §2.6 при получении решения Шварцшильда для гравитационного поля покоящейся материальной точки. Это будут сферические полярные в пространственной части координаты: $\{ x^{1''} = r, x^{2''} = \theta, x^{3''} = \phi, x^{4''} = x^4 = \mathbf{i}ct \}$.

Новые пространственные координаты выражаются через ста-

рые нелинейным образом:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \\ \theta &= \arccos \frac{x^3}{r} \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{x^1}{x^2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Точно также и обратное преобразование записывается с помощью нелинейных функций:

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin \theta \cos \phi \\ x^2 &= r \sin \theta \sin \phi \\ x^3 &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Угол ϕ отсчитывается от оси x^1 в направлении оси x^2 в плоскости $\{x^1, x^2\}$, а угол θ от оси x^3 в направлении той же плоскости.

Квадрат бесконечно малого интервала через компоненты метрики в новой системе координат записан выражением (2.46), а сами компоненты метрики и не нулевые компоненты аффинной связности, представлены в (2.47). Но это **только та их часть, которая обусловлена нелинейностью преобразования пространственных координат для инерциальной системы отсчёта, в которой связность нулевая**,

Наша исходная система отсчёта **не инерциальная**, и мы уже знаем, что вследствие этого в связности обязаны появиться дополнительные не нулевые составляющие, помимо тех которые обязаны своим существованием нелинейности пространственной части преобразований. А значит, вообще говоря, нам следует переписать эту таблицу, приняв во внимание ускоренное движение нашей пробной материальной точки и те дополнительные нелинейности, которые вносит специальный выбор пространственного репера **вместе с этим движением**. Т.е. нам нужно внести как в компоненты классической метрики, так и в компоненты связности, представленные в таблице, поправки, обязанные своим происхождением ускоренному движению нашей системы отсчёта относительно системы покоя нашей пробной материальной

точки. Поправки, вызванные **нелинейностью коэффициентов преобразования, обусловленной зависимостью траектории материальной точки от времени.**

Однако, для нас сейчас целью является не детальное описание всех возможных сил, появляющихся вследствие нашего выбора системы отсчёта, а всего лишь демонстрация соответствия определённого нами способа вычисления этих сил тем стандартным силам инерции, наличие которых постулируется в динамике Ньютона. В приближении малых скоростей, конечно.¹¹ Силу инерции, связанную с поступательным относительным движением систем отсчёта мы уже продемонстрировали. А основные такие силы, обязанные своим появлением *изменению направления* движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчёта можно получить даже без учёта этих дополнительных поправок к коэффициентам связности.

Заметьте, что на этом шаге речь идёт именно о выборе удобных нам координат **в той же самой системе отсчёта.** Я использовал ранее в качестве параметра, сдвигающего начало отсчёта по оси x^1 , то же самое обозначение, которое используется для одной из новых координат, радиуса. Надеюсь, вполне понятно, что никакой путаницы не должно возникнуть, т.к. в новых координатах именно значение радиуса r и соответствует смещению начала отсчёта нашей системы отсчёта относительно той материальной точки, движение которой мы описываем. Более того, новые координаты делают также явной **не существенность** нашего выбора смещения именно по координате x^1 .

Пусть начала отсчёта углов выбраны так, что при $t = 0$ наша материальная точка находится также, как и раньше, в точке $x^1 = r$, $x^2 = x^3 = 0$, т.е. $\phi = 0 \pm 2\pi$, $\theta = \pi/2 \pm \pi$. Рассмотрим один из простейших, но важных случаев движения, когда со временем меняется только одна координата нашей материальной точки — угол ϕ — т.е. в этой точке в этот момент времени $v^r = v^\theta = 0$, и

¹¹На самом деле, они уже и в динамике Ньютона **вычисляются**. Фактически теми же самыми методами, что и используемые нами здесь. Только без апелляции к связности, поскольку в те времена, когда их определили, о связности, как математическом понятии, ещё не было и речи.

только $v^\phi = \frac{d\phi}{dt} \equiv -\omega$. Фактически, это означает, что в **окрестности этой точки** рассматриваемая неинерциальная система отсчёта **вращается относительно инерциальной системы, связанной с нашей материальной точкой** с *мгновенной угловой* скоростью ω в фиксированной плоскости ($\theta = \pi/2$).

В этом случае в момент времени $t = 0$ только одна из ненулевых компонент связности в (2.47), $\tilde{\Gamma}_{33}^1 \equiv \tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^r = -r \sin^2 \theta$ даёт вклад в силу инерции (3.6):

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_I^r &= -\tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^r \frac{d\phi}{dl} (-\mathbf{i}m_0 c) \frac{d\phi}{dl} = \\ &= -\mathbf{i}m_0 \frac{1}{c} r \omega^2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

С учётом $d/dl = d/(cdt)$ и в левой части (3.5), мы можем сказать, что на нашу материальную точку вдоль радиуса и в направлении его роста (т.е. в направлении от центра системы отсчёта) в плоскости вращения неинерциальной системы отсчёта действует сила $\mathbb{F}_{\text{цб}}^r = \mathbf{i}c\mathbb{F}_I^r = m_0 r \omega^2$. Силу эту принято называть центробежной.

В последующие моменты времени перестаёт быть нулевой и радиальная составляющая скорости v^r , поэтому будет нужно принимать во внимание дополнительные компоненты силы, обусловленные отличием от нуля $\tilde{\Gamma}_{31}^3 = \tilde{\Gamma}_{13}^3$. Вместе они дают силу Кориолиса $\mathbb{F}_{\text{кор}}^\phi = -2m_0 v^r \omega$, действующую в плоскости вращения и направленную в сторону, противоположную вращению. Аналогичные силы Кориолиса, уже за счёт вклада $\tilde{\Gamma}_{21}^3 = \tilde{\Gamma}_{12}^3$, появляются при наличии не нулевой компоненты скорости v^θ . Естественнo, все эти составляющие силы инерции будут присутствовать одновременно, если все компоненты скорости в заданной точке в пространстве-времени отличаются от нуля. А при зависимости скоростей от времени нужно добавить переносную силу инерции и компоненты, связанные с изменением угловой скорости¹².

¹²Обратите внимание, что выше я использовал вместо полной связности её метрическую часть. В евклидовом пространстве это одно и то же. Но для

3.4 Лагранжиан классической механики

Выше я опирался только на геодезичность траектории материальной точки, на соответствующее уравнение, описывающее локальное поведение связанных с траекториями векторов. Однако, классическая механика пытается описать также и нелокализуемые свойства систем материальных точек. И в приближении их малых относительных скоростей делает это достаточно успешно. При этом наиболее общим становится подход к описанию систем материальных точек не с опорой на их индивидуальные уравнения движения, а с помощью формализма Лагранжа, позволяющего рассматривать свойства таких частиц как по отдельности, так и при их объединении во **взаимодействующую** систему. Естественно, при принятии (явной фиксации) большого числа ограничений на свойства этих взаимодействий, на размеры системы и её отношений с окружающим миром.

Для того, чтобы хоть немного разобраться в этом вопросе, понять свойства и ограничения на применимость такого описания мира, обратимся к формулировке принципов классической механики с помощью анализа возможных в рассматриваемом приближении лагранжианов. В §3.2 я уже обсуждал те различия и совпадения в возможностях описания движения материальных точек, которые даёт нам опора или на геодезичность траекторий, или на стационарность действия, вычисленного через лагранжеву плотность. При этом лагранжева плотность была выбрана в форме полностью ковариантной, хотя и в приближении чисто метрической связности. Сейчас мы рассматриваем приближение в очень большой степени ограничивающее наш выбор стандартизованных систем отсчёта. Фактически, только преобразования Галилея разрешены в этом приближении. И именно в этом приближении была сформулирована классическая механика в терминах Лагранжа. Тот её вариант, в котором вместо законов Ньютона используется стационарность интегралов от нескольких

общего случая это важно, т.к. **все силы инерции являются порождением, манифестацией только метрической части связности.**

плотностей Лагранжа. Вид этих плотностей выбирается из ряда соображений симметрии и сообразно имеющейся совокупности опытных данных. Причём симметрии, принимаемые во внимание полагаются присущими **вмещающему пространству**.

Здесь мы можем взглянуть на эти методы немного с иных позиций. Связность *вмещающего* метрического пространства равна нулю тождественно всюду в области, вместе со своими производными. **Все без исключения скаляры, характеризующие само пространство-время равны нулю тождественно.** Нет никакой возможности описывать мир опираясь на варьирование лагранжевых плотностей вида (1.5). Что же остаётся? От чего могут зависеть лагранжевы плотности, если мы всё-таки хотим опереться на условие их стационарности? В нашем распоряжении остаётся только зависимость действия, как образа числа событий от координат на траекториях материальных точек. Сама эта зависимость и есть искомый функционал. Так что теми функциями, от которых он может зависеть теперь, в таком тривиальном приближении, являются его производные по координатам, формирующие вектор энергии-импульса. Ну и обратные им в некотором смысле функции — производные координат по каноническому скалярному параметру, действию. И, конечно, сами координаты траекторий, как функции действия. Всё. Чтобы ввести в рассмотрение также наличие внешнего мира, проявляющееся в действии “внешних сил” на материальные точки, входящие в систему, требуются дополнительные соображения.

В классической механике формализм Лагранжа заключается в том, что *интеграл по времени* от некоторой функции $L(x^\alpha, t, dx^\alpha/dt)$, зависящей от пространственных координат, времени и скоростей материальных точек, называемой лагранжианом, должен быть стационарным при вариациях тех величин, от которых он зависит (кроме времени). **Именно этот интеграл называют действием.** Это определение действия в классической механике. Условие стационарности действия записывается, естественно, уравнениями Эйлера-Лагранжа, которые в этом

случае принимают следующую форму ($v^\alpha = dx^\alpha/dt$):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Саму эту функцию (лагранжиан) при этом определяют (вводят в теорию), в основном, двумя способами. Один из них явно опирается на законы Ньютона и соответствующее им обобщение опытных фактов. При этом вначале формируется представление об импульсе материальной точки и её кинетической энергии (их определение через массу и трёхмерную скорость), представление о силах, изменяющих эти характеристики движения материальных точек, и только затем вводится понятие о лагранжиане, действии и его стационарности. Тоже как обобщение опытных фактов. Лагранжиан в простейшем случае нескольких **не взаимодействующих** материальных точек сводится к сумме их кинетических энергий. С учётом того, что это сумма сингулярных, сосредоточенных в отдельных *точках* пространства, функций масс и скоростей, вместо суммы можно рассматривать и интеграл по трёхмерной пространственной области от лагранжевой (скалярной) плотности. Поэтому лагранжиан классической механики для нас выглядит результатом частичного интегрирования полноценной, четырёхмерной лагранжевой плотности. Действие уже четырёхмерной области определяется как интеграл от этого лагранжиана по времени. Которое полагается единым для всей области. Этим интегрирование лагранжевой плотности завершается, и мы приходим к полному соответствию классического и нашего представления о действии как скалярной функции области. Почему следует выбирать лагранжиан именно так — никаких специальных соображений на таком пути его определения в классической механике не появляется. Просто построенная таким образом функция будет иметь такие-то свойства в силу законов природы.

Второй путь, естественно, тоже обобщающий опытные факты, во главу угла ставит именно понятие лагранжиана, некой функции координат точки (только пространственных!), времени как отдельного от координат понятия, и скоростей матери-

альных точек, т.е. величин, характеризующих изменение их пространственных координат со временем. Заметьте, пространство отделено от времени, существует во времени и это представление положено в саму основу формализма. При этом выражения для импульса и кинетической энергии, сил и законы Ньютона, описывающие связь между этими понятиями становятся следствиями базовых предположений о свойствах пространства, времени и соответствующего этим предположениям вида лагранжиана. Рассмотрим этот путь немного подробнее.

Для отдельной, не взаимодействующей ни с чем материальной точки, лагранжиан можно определить из следующих соображений. Зависимости от пространственных координат и времени в явном виде быть не должно, поскольку, как мы видели в предыдущем параграфе, их сдвиги не меняют описания материальной точки, а в классической механике это формулируется как однородность пространства и времени по-отдельности. В нашем распоряжении остаются только скорости материальной точки, как функции координат, характеризующие её движение. Свойство изотропности вмещающего пространства (а в нашем подходе то, что это точка в пространстве, все направления из которой равноправны, т.к. она ни с чем не взаимодействует) требует, чтобы скорость (трёхмерный вектор) входила в лагранжиан в таком виде, чтобы итог не зависел от направления. А это возможно только если функция, от которой зависит лагранжиан была скалярной функцией скорости (трёхмерной!). Единственная такая функция это квадрат модуля скорости, или, в более общем виде, $v^2 = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$. Т.е. лагранжиан L мы должны записать в виде некоторой функции только v^2 :

$$L = L(v^2).$$

Вариация лагранжиана по скорости $\delta L = \frac{\partial L}{\partial v^2} 2v\delta v$ должна быть полным дифференциалом по времени, что требует выполнения условия $\frac{\partial L}{\partial v^2} = \text{const.}$ Приравняв эту постоянную¹³ половине массы покоя, получаем в качестве лагранжиана кинетическую энер-

¹³Из общих соображений можно выбрать любую постоянную, но мы ведь

гию материальной точки. И, естественно, уравнения Эйлера-Лагранжа дают нам первый закон Ньютона (постоянство скорости свободной классической частицы как трёхмерного вектора). Ну и закон сохранения кинетической энергии свободной классической частицы в придачу.

Посмотрим теперь, насколько классический подход согласуется с развиваемым нами здесь. В нашем описании свободной материальной точки единственный локализованный скаляр, который можно для неё определить с помощью характеризующих траекторию величин — это инвариантная свёртка вектора энергии-импульса в его ковариантной форме с вектором бесконечно малого смещения вдоль траектории. Этот скаляр можно проинтегрировать вдоль неё и результат приравнять к накопленному материальной точкой действию. Которое, в свою очередь, должно быть стационарной величиной в нашем описании мира. Запишем этот скаляр, дифференциал которого представлен ниже в нескольких эквивалентных формах,

$$\begin{aligned}
 ds_0 &= \partial_i s_0 dx^i = \\
 &= m_0 c dl = m_0 c^2 d\tau = \\
 &= m_0 c^2 dt \sqrt{1 - v^2/c^2} \\
 &= -\mathbf{p}_i \frac{dx^i}{dl} dl,
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

в приближении малых скоростей. Проще всего нужное нам соотношение (интеграл по времени от лагранжиана) в приближении малых скоростей можно получить из предпоследней строчки выписанных соотношений:

$$s_0 = \int (m_0 c^2 - \frac{m_0 v^2}{2}) dt. \tag{3.38}$$

Оно также поясняет и появление в подинтегральной функции кинетической энергии рядом с энергией покоя — всё дело в том,

принимаем во внимание и опытные данные, а значит нам требуется, в конце концов, из вариации лагранжиана получить законы Ньютона. Кроме того, с материальной точкой связана всего одна постоянная, масса покоя. Выбирать не из чего.

что интегрирование производится по времени системы отсчёта, в которой точка движется, хотя следовало бы опираться на время в системе её покоя. Но в выбранном приближении течение времени предполагается независимым от скорости, а значит никакого специального времени для выделенной материальной точки мы ввести просто не можем. Для определения стационарности интеграла, т.е. при вычислении вариаций подинтегральной функции наличие в ней постоянной роли не играет, как не важен и знак зависящей от скоростей части этой функции. Ведь нас интересует только стационарность этого интеграла. Поэтому можно признать, что лагранжиан классической механики правильно описывает поведение свободной материальной точки в приближении малых скоростей и с точки зрения нашего описания мира.

Для системы не взаимодействующих частиц единый лагранжиан постулируется в классической механике как простая сумма индивидуальных. Далее, вводится представление об их суммарном взаимодействии, реализующемся в виде отличия всех траекторий от исходных прямых. Для его учёта в лагранжиан в виде отдельного слагаемого вводится некая итоговая функция, зависящая в первом приближении только от пространственных координат всех частиц (лагранжиан по-прежнему не может зависеть от времени напрямую):

$$L = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 - U(x_i^\alpha). \quad (3.39)$$

По сути дела, предположение о такой форме зависимости функции U от каких-либо переменных это выбор некоторого **приближения** в описании мира, не более того. Вполне разумного приближения, но возможность изменения вида такой функции должна иметься в виду при конкретных применениях такого способа описания мира. Сделав этот шаг, классическая механика переходит от описания отдельных материальных точек к описанию **системы**, состоящей из массивных классических частиц и некоторого **поля сил**, существующих в занимаемой системой области **трёхмерного пространства**. Поле сил в такой форме описывает **взаимодействие частиц друг с другом**.

Т.е. классическая механика переходит от чисто базовых, локализованных понятий к понятиям, дополненным синтетическими, имеющими смысл только как представление об усреднённых коллективных явлениях мира. Естественно, с этого момента связать эти синтетические понятия с базовыми представлениями о свойствах пространства-времени, представленных аффинной связностью, становится возможным только в весьма ограниченном, тоже усреднённом смысле. Да и эффективность описания таких частей мира именно чисто геометрическими средствами снижается очень заметно. Системы более общего вида рассматриваются если допускается, что та часть лагранжиана, которая описывает эффективное взаимодействие внутри системы классических частиц зависит также и от скоростей этих частиц.

На этом этапе в функцию U можно также без какой-либо потери общности включить и **внешнее** для системы частиц поле. Заметьте, то, что поле (внешнее, или суммарное эффективное внутреннее для системы частиц) не зависит от времени является **приближением**. Знак этой функции как отдельной составляющей лагранжиана выбран исходя из соображений, которые возникают уже при анализе результатов этого приближения, после введения в теорию понятия о **полной** энергии системы “частица-внешнее поле”, описываемой лагранжианом. Внешнее поле может быть, в принципе, описано средствами геометрии гораздо более точно, чем коллективное поле взаимодействующих частиц. Но классическая механика в своём базовом варианте не рассматривает такие поля с этих позиций. Пространство-время по-прежнему остаётся вмещающим, евклидовым и даже разделённым на отдельные пространство и время. А значит этот вид описания мира всё время остаётся в приближении малых скоростей массивных классических частиц, образующих рассматриваемые ею системы.

Это приближение можно немного уточнить, но только в части, касающейся внешнего поля. Функцию, его описывающую, можно полагать не зависящей от пространственных координат и скоростей частиц, входящих в выделенную систему. “Внешнее”

для системы поле. Оно определяет поведение системы, но сама система на него не действует. Система ведёт себя как “пробная частица”. Так, что переход от описания единственной частицы к описанию системы частиц в методе Лагранжа является естественным. А это требуется, поскольку массивные частицы в классической механике подразумеваются состоящими из множества материальных точек, возможно даже непрерывного. Конечно, это тоже вид приближения в описании мира. И именно поэтому, зависимость функции U от координат в области в таком приближении можно сделать полноценной, добавив туда и время.

Сделав шаг немного назад, сведя систему к отдельной частице, с лагранжианом, учитывающим наличие внешнего для неё поля, мы получаем, что уравнения Эйлера-Лагранжа записываются как второй закон Ньютона для этой частицы:

$$m_0 \frac{d}{dt} v^\alpha = - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} U(x^\alpha, t) = F^\alpha. \quad (3.40)$$

Здесь мы учли евклидовость вмещающего пространства, сделав неявным использованием стандартного метрического тензора ковариантный индекс силы контравариантным. И здесь мы также явно видим, что введением внешнего для классической частицы поля мы, с одной стороны, принимаем во внимание отличие реальной геометрии от евклидовой, и, с другой стороны, выходим неявным образом за рамки инерциальных систем отсчёта. Ведь теперь траектория частицы уже может (даже обязана) отличаться от прямой линии в пространстве-времени. И здесь метод Лагранжа фактически даёт определение **внешней** для частицы (системы) силы. Но определение через некую априорную функцию U , как её трёхмерный градиент. Физический смысл самой этой функции пока остаётся не прояснённым. Уточнить её смысл можно только опираясь на введённую форму связи этой функции с силой, на результат действия силы на движение массивной частицы или системы частиц. Т.е. замкнутый круг определений “масса-сила” этими определениями не разрывается, а только затушёвывается, делается неявным по сравнению с фор-

мулировкой классической механики на базе законов Ньютона.

Обобщение второго закона Ньютона на более сложные системы уже базируется на том, что для этих систем *по определению* продолжают выполняться уравнения Эйлера-Лагранжа, которые применяются к поведению **системы как целого**. Здесь классическая механика уходит от непосредственной связи координат и скоростей, фигурирующих в формулировке лагранжиана, с положением той или иной классической частицы во вмещающем пространстве. Функции, от которых зависит лагранжиан рассматриваются как характеристики системы в целом, как понятия синтетические, её **обобщённые координаты и импульсы**. Для простых (или, наоборот, очень сложных систем, когда в качестве материальных точек следует рассматривать очень большие последовательности событий) связь обобщённых и базовых пространственных координат тривиальна, их смысл в большой степени совпадает. Но при усложнении рассматриваемых систем эта связь тоже усложняется. На этом этапе часто переходят к использованию такого понятия как **степени свободы системы**.

На базовом геометрическом уровне описания мира степеням свободы ставят в соответствие представление полной группы возможных преобразований координат материальной точки как суперпозицию действия отдельных **однопараметрических** подгрупп. Например, группа трёхмерных вращений в пространстве может быть представлена как прямое произведение трёх однопараметрических вращений в трёх независимых плоскостях. А группа сдвигов (изменения координат начала отсчёта) как общий результат трёх независимых сдвигов по трём координатам. В результате, возможность **совместного** применения преобразований из группы вращений и сдвигов к рассматриваемой системе приписывает ей **шесть** степеней свободы. Использование понятия о степенях свободы является для классической механики в определённом смысле более общим методом, т.к. позволяет свободнее выбирать вид **представления** базовых однопараметрических подгрупп, опираясь на те их представления, тот вид варьируемых параметров, который наиболее удобен в каждом

конкретном случае. Этим и обосновывается, и упрощается замена естественных, геометрических координат на некоторые их обобщённые эквиваленты.

Применительно к степеням свободы системы ещё говорят об имеющихся для неё **симметриях**, имея ввиду **независимость, сохранение описания системы при применении к ней преобразований из каждой однопараметрической подгруппы**, совместно или по отдельности. Поскольку в классической механике, в этом её формализме, описание системы сводится к функциональной зависимости лагранжиана от обобщённых координат, то речь ведут о симметриях лагранжиана.

С наличием тех или иных степеней свободы рассматриваемой классической механикой системы (т.е. наличия у её лагранжиана набора симметрий, стационарности относительно набора групп однопараметрических преобразований) связано существование у системы **интегралов движения**. Иными словами, некоторых величин, **сохраняющихся во времени** и определяемых через лагранжиан и его производные по обобщённым координатам входящих в систему частиц. Ведь время в сформулированном приближении явным образом может входить только в определение внешнего поля, а мы полагаем нашу систему материальных точек от него **отделённой как целое**, хотя и учитываем возможное наличие этого, “внешнего” поля в лагранжиане. Но учитываем весьма специфически — никакого влияния наша система на внешнее поле оказывать не может. Во все моменты времени своего существования. Т.е. из наличия симметрий у лагранжиана следует наличие обусловленных ими **законов сохранения** для описываемой этим лагранжианом системы “классические частицы — поле сил”.

В нашем описании мира это тривиальное заключение, обязанное своим существованием самому определению действия как функционала от полноценной **скалярной** плотности. Любые изменения в реперах — за счёт перехода к другим процедурам измерения в данной точке, или вследствие смещения к соседней точке, в том числе при реализации этого смещения течением време-

ни в базовой системе отсчёта — не могут изменять **инвариантное, скалярное** действие и те его производные величины, которые остаются инвариантными при применении какой-либо из однопараметрических подгрупп допустимых преобразований. Просто по определению инварианта, скаляра. Как следствие, число таких “интегралов движения” соответствует числу однопараметрических подгрупп общей группы допустимых преобразований координат и самих реперов.

В случае лагранжевой формулировки классической механики понимание ситуации несколько усложняется. Переход к системам “материальные точки — поле сил” уводит описание мира с чисто геометрических позиций. На место *тривиального свойства скаляров* приходит теорема Нётер, сформулированная без опоры на геометрические понятия и методы, а просто для функций (функционалов), имеющих определённые свойства — “симметрии”. Вообще говоря, и эта теорема становится тривиальным свойством определений, если сформулировать специальный “геометрический” подход к функционалам, рассматривая определяющие их обычные функции в качестве координат, а сами функционалы как именно скаляры в таком “геометрическом” описании. Фактически этот подход и был намечен в классической механике введением понятия об обобщённых координатах и обобщённых импульсах, как о производных от лагранжиана по обобщённым координатам.

Эти законы сохранения формулируются уже не для отдельных материальных точек, составляющих систему, а для всей системы в целом. Хотя в ряде случаев они сохраняют ту же самую природу (а значит и названия) как и для отдельных классических частиц. По той причине, что простейшей такой системой классической механики остаётся система “одна материальная точка в поле внешних сил”. И те термины, которые применяются к ней, автоматически переносятся и на более сложные системы в тех случаях, когда удаление (в пространстве, переход на большие расстояния от системы) позволяет рассматривать эти системы как материальные точки. Наиболее очевидной

возможность такого перехода является для системы из нескольких не взаимодействующих материальных точек. В этом случае, например, обобщённый импульс системы легко сводится к элементарной векторной сумме трёхмерных импульсов составляющих систему частиц. И этот импульс сохраняется во времени, точно также, как и в случае одной единственной материальной точки. А если мы добавляем в систему внешнее поле, то получаем второй закон Ньютона для системы как целого.

Для обоснования законов сохранения в лагранжевом формализме классической механики обычно ссылаются на свойства вмещающих физические явления евклидовых трёхмерного пространства и одномерного времени. Евклидовых, а следовательно однородных в обоих случаях. Значит среди симметрий, которыми обязаны обладать лагранжианы выделенных классических систем, имеется часть степеней свободы, реализующих четыре однопараметрических группы сдвигов — три в пространстве и одна во времени. В нашем подходе речь идёт не о сдвигах от точки к точке, а о преобразованиях начал координат, но само наличие таких степеней свободы **локально** гарантировано. Просто терминология другая. То, что мы не рассматриваем пространство-время как вмещающее и евклидово, временно устраняется из описания мира **принятием ограничений конкретного приближения в этом описании**. Приближения малых скоростей и ограничения набора допустимых процедур измерений, а значит и допустимых преобразований координат группой Галилея.

Сохранение определённых свойств лагранжиана системы “классические частицы — поле сил”, возникающее из степени свободы, соответствующей сдвигу во времени (формальному изменению начала отсчёта или его реальному смещению) формулируется как **закон сохранения энергии системы**. Соответствующая ему сохраняющаяся величина, сформированная на основе лагранжиана, определяется как **полная энергия системы**. Сначала я приведу формальные соотношения, а потом поясню, почему понятие энергии переносится с уже известного нам определения для материальной точки на эту величину.

Однородность времени в нашем приближении, требующая отсутствия прямой зависимости лагранжиана системы от этой переменной, накладывает однозначное условие на вид производной от лагранжиана по времени. Это условие, совместно с соответствующим уравнением Эйлера-Лагранжа приводит к сохранению во времени следующей величины:

$$E = \sum_i \frac{dL}{d\mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i - L. \quad (3.41)$$

Здесь через $\mathbf{v}_i = \{v_i^\alpha\} = \{\frac{dx_i^\alpha}{dt}\}$ обозначены трёхмерные векторы **обобщённых** скоростей в системе, которые для единственной материальной точки сводятся к вектору её обычной скорости.

Обратимся к определению лагранжиана (3.39). Первый член представляет собой сумму кинетических энергий всех входящих в систему классических частиц. Назовём его общей кинетической энергией системы. Даже если вид этого члена для каких-то систем классической механики будет отличаться от простейшей суммы, представленной в (3.39), то утверждение о необходимости вхождения в него обобщённой скорости только в квадратичной форме останется справедливым (изотропность вмещающего пространства, или условия используемого приближения в нашем подходе). Следовательно, если мы обозначим первый член через $T(x_i^\alpha, v_i^\alpha)$, то вклад его производной (второе слагаемое лагранжиана, U , от обобщённой скорости не зависит) превращает сумму в (3.41) в $2T$. Тогда становится ясным, что в принятых нами обозначениях

$$E = \sum_i \frac{dL}{d\mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i - L = 2T - T + U = T + U. \quad (3.42)$$

Т.е. полная энергия описываемой лагранжианом системы является суммой её кинетической энергии и некоторой функции только пространственных координат U . Эта функция представляет собой в лагранжевом формализме синтетический, усреднённый образ коллективного взаимодействия, имеющего место в системе (возможно не полный), и имеет смысл некоторой энергии. А

также включает в себя и образ наличия внешних сил в виде некоторой функции координат в специфической форме. Естественно, вид этой формы ограничили мы сами выбранным нами приближением. Она включает только ту часть внешних сил, которая не зависит от скоростей материальных точек в системе. Эту функцию, имеющую очевидный смысл энергии, называют **потенциальной** энергией.¹⁴ То, что принятые обозначения полностью соответствуют нашим представлениям о свойствах материальных точек можно видеть, применив их к простейшей системе “единственная материальная точка в поле внешних сил”.

Однородность вмещающего пространства (или возможность изменения начала отсчёта пространственных координат в нашем подходе), предполагающая неизменность (стационарность) лагранжиана классической механической системы при произвольных вариациях координат, от которых он зависит (реальных геометрических одной частицы, или обобщённых координат всей системы), требует выполнения соотношения ($\mathbf{x}_i = \{x_i^\alpha\}$)

$$\sum_i \frac{dL}{d\mathbf{x}_i} = 0. \quad (3.43)$$

Учитывая определения обобщённых координат и сил, данное условие можно сформулировать как второй закон Ньютона для системы в целом, или как требование равенства нулю **векторной суммы** (в смысле трёхмерного пространства) всех (обобщённых) сил, действующих на рассматриваемую замкнутую систему, если она неподвижна. Применительно к системе из пары материальных точек в поле внешних сил, его можно рассматривать также и как формулировку третьего закона Ньютона — “действие равно противодействию”.

После подстановки этого соотношения в уравнения Эйлера-Лагранжа получим уравнение **сохранения полного обобщённого**

¹⁴Вот и проясняется физический смысл самой функции U и причина выбора знака “минус” перед этой функцией в определении лагранжиана. Он выбран так, чтобы соответствующее полю сил понятие “энергия” входило в полную энергию системы со знаком “плюс”.

ного импульса $\mathbf{P}$ системы:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{dL}{d\mathbf{v}_i} = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{v}_i = 0. \quad (3.44)$$

Эти соотношения (записанные при отсутствии внешних сил) позволяют ввести для классических систем механики понятие **центра масс** и рассматривать во многих случаях движение такой системы как эффективное движение материальной точки. Точки, имеющей полную массу системы $m = \sum_i m_i$, координаты которой совпадают с координатами центра масс, импульс равен векторной сумме импульсов всех составляющих систему классических частиц, а энергия равна полной энергии системы (состоящей, соответственно, из суммы полной кинетической и полной потенциальной энергий).

Среди симметрий лагранжиана классической механики осталось рассмотреть симметрию, которую, применительно к вмещающему систему евклидову пространству, связывают с его изотропностью. В нашем подходе к классическому приближению в описании мира эта симметрия присутствует изначально, т.к. любая базовая система покоя, которую мы создаём стандартизованными процедурами измерения, определена нами только с точностью до ортогональных поворотов пространственной части репера.

В евклидовом пространстве описать действие этих преобразований на лагранжиан легче всего с помощью понятия об **аксиальном** векторе. Этот тип векторов вводится как образ **бесконечно малого элементарного направленного поворота в выделенной плоскости $\delta\phi$** . Этот вектор по определению направлен вдоль третьей пространственной оси, ортогональной к плоскости поворота. Знак направления **устанавливается** согласно правилу буравчика, а величина равна углу поворота. Совместно с этим понятием вводятся также понятие об аксиальном векторе **угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\phi}{dt}$** и аналогичное понятие **векторного произведения** двух векторов $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Эти понятия в геометрии имеют ограниченное применение, они хорошо определены только для евклидовых пространств. Для пространств

аффинной связности такие понятия можно вводить только как некий эрзац-образ части компонент антисимметричных по двум индексам тензоров, применимый лишь при ограничении допустимых преобразований координат. Мы уже встречались с такого рода соотношением в §2.11 при описании магнитного поля как определённым образом выделенной части единого электромагнитного поля. Я не буду проводить все выкладки, связанные с варьированием лагранжиана при этом виде преобразований. Приведу только результат.

Инвариантность лагранжиана по отношению к преобразованиям из подгруппы ортогональных поворотов формулируется как ещё один **закон сохранения** для аксиального вектора

$$\mathbf{M} = \sum_i [\mathbf{x}_i, \frac{dL}{d\mathbf{v}_i}] = \sum_i [\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i], \quad (3.45)$$

называемого **моментом импульса** системы:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \frac{d}{dt} \sum_i [\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i] = 0. \quad (3.46)$$

Эти соотношения тоже записаны для случая отсутствия внешних сил. При учёте в лагранжиане системы таких сил приведённый выше закон сохранения учитывает наличие суммарного **момента внешних сил** и речь идёт об **изменении таким образом определённого момента системы частиц под действием момента внешних сил**. Обобщённый момент системы ‘частицы - поле внешних сил’ по-прежнему сохраняется.

Мы рассмотрели следствия симметрий (инвариантности) лагранжиана при преобразованиях из подгрупп сдвигов и вращений. В случае классической механики полагаемых неотъемлемым свойством некоего независимого ни от чего времени и вмещающего всё пространства, существующего в этом времени. В нашем способе описания мира эта группа фигурирует как очевидная часть преобразований координат самого общего вида, редуцируемых до своей ограниченной подгруппы (преобразований Галилея) выбранным нами приближением малых скоростей

и предпочтением определённого вида стандартизованных процедур измерений. Кроме того, в нашем подходе лагранжиан не выбираемая нами для наших удобств из тех или иных соображений функция, а результат частичного интегрирования (по пространству) **скалярной Δ -плотности**. И его неизменность обязана проявлять себя при вообще любых преобразованиях координат. Конечно, лагранжианы классической механики соответствуют этому требованию отнюдь не полностью, а только при ограничении преобразованиями из группы Галилея. А значит, **все** полученные выше соотношения и их следствия имеют те же самые ограничения в своём применении.

Рассмотрим более подробно, в чём именно проявляются эти ограничения с точки зрения нарушения тех “законов сохранения”, которые мы привели выше в этом параграфе.

- Первое, что необходимо отметить. Сам вид лагранжиана классической механики является скаляром, инвариантом только приближённо. Понятия и кинетической, и потенциальной энергии системы как целого уместны только в рамках ограничения преобразований координат группой Галилея. Т.е. для описания области мира, содержащей такую механическую систему можно применять только те процедуры измерения, базовые системы отсчёта (покоя) которых двигаются друг относительно друга со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.
- Поэтому имеется ограничение и на пространственные размеры описываемых механических систем. Эти размеры должны быть достаточно малы. Время достижения светом границ области и возвращения обратно обязано быть пренебрежимо малым по сравнению с временем заметного изменения параметров механической системы.
- Особенно сильно ограничение на размеры механических систем сказывается на всех соотношениях, связанных с понятием момента импульса, т.к. расстояние входит в его определение напрямую. А значит сказывается и на соотношении

ях, связанных с описанием тех явлений в реальном мире, которые выражаются в изменении направления движения составляющих систему классических частиц. Иными словами, там где речь идёт о вращении в том или ином виде относительно какого-то центра, следует быть особенно осторожным в применении закона сохранения момента и различных связанных с этим теорем о балансе между видами энергии в системе.

- Предположение о потенциальном характере поля внешних сил является дополнительным ограничивающим применение полученных законов сохранения фактором. Как мы видели в предыдущей главе, описание влияния связей в континууме чисто потенциальными эффективными силами возможно отнюдь не всегда. То же самое касается и эффективного описания внутренних взаимодействий в механической системе.

3.5 Движение материальной точки в поле гравитации

Теперь нам можно и нужно сделать следующий шаг на пути уточнения нашего описания мира. В той его части, которая касается описания движения материальных точек. Перейдём к первому приближению в возможной структуре связности — к рассмотрению влияния первого учтённого нами физического поля, поля гравитации, проявляющегося в отличии метрической связности от её **нулевого** приближения, евклидовой метрической связности. Структуру коэффициентов связности в области, окружающей материальную точку с заданной массой покоя, которую мы будем далее обозначать M , используя обозначение m_0 для массы покоя нашей пробной частицы, движением которой мы интересуемся. Во второй главе мы получили решение Шварцшильда

для поля притяжения¹⁵, создаваемого точечной частицей, масштаб времени которой мы принимаем за базовый в репере, распространяемом согласованным образом на окружающую эту частицу область. Причём в процессе нахождения этого решения мы, по сути дела, базируясь лишь на совпадении вида уравнений, провели отождествление полученной нами **стандартизированной** функции A/r , модифицирующей и компоненты классической метрики, и коэффициенты связности, как величины, которую можно интерпретировать как гравитационный потенциал. Как функции радиуса, описывающей **притяжение** любой пробной частицы материальной точкой, находящейся в центре системы отсчёта, порождающей координаты в окружающей эту точку выделенной области пространства-времени.

Чтобы убедиться в правильности такой интерпретации полученного решения для классической метрики и метрической связности нам достаточно установить, какая сила (если она имеется) действует на пробную (любую) материальную точку в поле притяжения другой, выделенной материальной точки. Для этого воспользуемся полученными нами выражениями для компонент метрического тензора и коэффициентов аффинной связности в полярных сферических координатах, центром которых является материальная точка массы M , т.е. решением Шварцшильда (2.54, 2.59) и наработками текущей главы, проделанными к настоящему моменту.

Сначала посмотрим на уравнение геодезической, записанное не через коэффициенты связности, а через компоненты метрики. Пусть при этом наша пробная частица с массой m_0 **покоится** в момент времени $t = 0$ в точке с координатой $x^1 = r$ и произвольными угловыми координатами. При таких условиях уравнение геодезической определяется единственной не нулевой компонентой $\tilde{\Gamma}_{44}^1 = \tilde{\Gamma}_{44}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{44}$:

$$\frac{d^2 x^1}{dl^2} = \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{44} \frac{dx^4}{dl} \frac{dx^4}{dl} = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{44}. \quad (3.47)$$

¹⁵Пока это название мы использовали авансом. Именно здесь и сейчас мы получим обоснование этого названия.

Достаточно далеко от центральной массы, там где $A/r \ll 1$, мы можем считать $g^{rr} \approx 1$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^1}{dt^2} &\approx -\frac{c^2}{2} \partial_r g_{44} = -\frac{c^2}{2} \partial_r (1 + A/r) = \\ &= -\frac{c^2}{2} \partial_r (A/r) = \\ &= -\partial_r (\Phi), \end{aligned} \quad (3.48)$$

где мы ввели обозначение $\Phi = \frac{c^2}{2} \frac{A}{r}$. В этих обозначениях мы можем ясно видеть следующее:

- Уравнение геодезической в метрике (связности) Шварцшильда в первом приближении совпадает с уравнением для ускорения, наблюдаемого в гравитационном поле с потенциалом Φ . В этом приближении к описанию движения материальной точки в поле другой массивной точки вполне применимы методы Лагранжа классической механики, со всеми сопутствующими понятиями и законами сохранения.
- Причину появления коэффициента $2/c^2$ перед гравитационным потенциалом в (2.59).
- Т.к., согласно (2.57, 2.58), Φ или A/r является функцией радиуса, принимающей всюду строго отрицательные значения, то ускорение, описываемое уравнением геодезической, является чисто радиальным и всегда направлено к создающей гравитационное поле материальной точке. В данном случае к центру системы отсчёта. Т.е., это действительно поле притяжения.

Почему я записал уравнение геодезической не сразу через связность, а через компоненты метрики? Причина состоит в том, что при такой записи возникает очень сильный соблазн интерпретировать именно компоненты метрики как компоненты **потенциала** гравитационного поля. Это и было сделано А.Эйнштейном, и вслед за ним до сих пор практически все так считают. А коэффициенты связности называют, соответственно, напряжённостью поля гравитации. Такая интерпретация может вести (и уже

привела) к проблемам в понимании взаимоотношения понятий физики и геометрии.

В сформированном нами описании мира мы уже имеем представление не только о том, какими геометрическими структурами описывается гравитационное поле. Величины, характеризующие физические проявления электромагнитного поля, тоже нашли в нашем описании совершенно ясное представление среди чисто геометрических понятий. Соответственно, у нас нет никаких сомнений в том, что именно свёртка коэффициентов связности соответствует понятию вектор-потенциала электромагнитного поля, также как одна из свёрток тензора кривизны соответствует понятию тензора напряжённостей этого поля. Сопоставление ясное и однозначное, требующее рассматривать именно объект аффинной связности как комплекс потенциалов единого физического поля, а тензор кривизны как комплекс напряжённостей этого поля. И естественные размерности, как коэффициентов связности, так и тензора кривизны недвусмысленно указывают на такую их физическую интерпретацию¹⁶.

Уравнение (3.48) является приближённым, справедливым только при $A/r \ll 1$, а для нас не составляет никакой проблемы записать его в точной форме (естественно, при тех значениях радиуса, при которых применимо само решение Шварцшильда):

$$\begin{aligned}
 m_0 \frac{d^2 r}{dt^2} &= \mathbb{F}_{\text{гр}} = \\
 &= -m_0 c^2 \frac{A}{2r^2} \left(1 + \frac{A}{r}\right) = \\
 &= -\frac{\gamma m_0 M}{r^2} \left(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}\right) = -\frac{\gamma m_0 M}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right).
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

То, что обозначено нами как сила гравитации, $\mathbb{F}_{\text{гр}}$, известная в физике Ньютона как “настоящая” сила, действующая в любой инерциальной системе отсчёта, в центре которой находится материальная точка с массой M , в нашем описании является ло-

¹⁶Вопрос соотношения между понятиями потенциала, напряжённости силы, самой силы не прост и требует специального рассмотрения как со стороны физики, так и со стороны математики.

кальной **силой инерции**, $\mathbb{F}_{\text{гр}} = \dot{\mathbf{c}}\mathbb{F}_I^T$. В нашем изложении это самоочевидная вещь. А при создании ОТО это была стимулирующая и направляющая теорию идея.

3.6 Влияние неметрической части связности на описание движения материальной точки

Перейдём теперь к случаю связностей более общих, чем метрические. Мы знаем, что и для таких связностей траектории материальных точек в классических приближениях остаются геодезическими линиями. Но геодезическими в **полной** связности, а не метрической. Несовпадение реальной связности в области с метрической ведёт к **отличию** траекторий материальных точек от *геодезических метрической части связности*. От тех линий в пространстве-времени, на которых функционал геодезического (метрического) расстояния $\int dl = \int \sqrt{-\mathbf{g}_{ik}dx^i dx^k}$ стационарен. На траекториях материальных точек по-прежнему будет стационарным интеграл собственного действия $\int ds_0$, но не функционал метрического расстояния.

Отличие связности от метрической, наличие в ней компонент, не сводящихся к тем, которые мы рассматриваем как проявление гравитационного поля, выражается для нас в виде *действия на материальную точку сил, обусловленных наличием в области дополнительных физических полей*. Тех физических полей, которые в геометрических терминах описания мы уже связали с неметрическими свойствами связности — со свойством континуума (пространства-времени) изменять **согласованно** при переходе от точки к точке **величины** векторов в локальных реперах, а не только поворачивать репер как целое.

При этом перестаёт быть справедливым соотношение $ds_0 = m_0 c dl$ между собственным действием и относительным инвариантом метрического расстояния. Происходит это не из-за того, что неверно определена масса покоя. **Число событий на единицу времени в системе покоя произвольной классиче-**

ской материальной точки m_0 мы по-прежнему полагаем известным и правильно определённым внешним параметром. Кроме этой величины, с траекторией частицы вследствие принятых нами постулатов, определяющих пространственные единицы на базе временной, мы можем связать единственный **измеримый** скалярный параметр — всё то же метрическое расстояние вдоль неё. А значит, нам приходится констатировать, что этот скалярный параметр больше не является каноническим, хотя других ему на замену мы не имеем. С учётом этого, перепишем соотношение между настоящим каноническим параметром на траектории, s_0 и метрическим параметром l в виде: $ds_0 = m_0 c dl + \Delta s_0$, отмечая таким образом чисто формально наличие дополнительного к гравитационному действия на траектории частицы.

Важно! Масса покоя m_0 здесь всё также имеет физический смысл числа событий на единицу времени, а классическое метрическое расстояние, оставаясь скаляром (но относительным скаляром!), теперь не является каноническим параметром траектории. Таким образом, переопределение собственного действия на траектории материальной точки не означает переопределение **ковариантной формы** вектора энергии-импульса (как градиента действия), не означает появление дополнительных событий на траектории. **В массе покоя учтены все без исключения события, в том числе и те, которые связаны с проявлением полей, отличных от гравитационного.** А вот контравариантная форма вектора энергии-импульса перестаёт быть эквивалентным представлением для исходной ковариантной его формы, хотя мы и продолжим ею пользоваться. Но помнить об утере полноценной эквивалентности необходимо.

Нашей задачей становится определение введённого нами формального добавка Δs_0 , его выражение через величины, описывающие наличие в области полей, отличных от гравитационного. Т.е. электромагнитного поля и поля кручения. И определение выражений для создаваемых этими полями сил.

Из изучения необходимых условий на эти поля мы уже знаем,

что их наличие обязательно отражается появлением на траекториях материальных точек, помимо вектора энергии-импульса, двух векторов, тоже пропорциональных вектору dx^i/dl — вектора электромагнитного тока и вектора тока кручения. Точнее, присутствием на траекториях материальных точек сингулярности в этих полях. Сингулярности, описываемой дивергенцией контравариантной версии тензора Максвелла каждого из них.

Поэтому достаточно очевидно, что наш формальный добавок к собственному действию на траектории материальной точки обязан учитывать как существование **регулярной части** в самих этих дополнительных полях, причём именно на траектории, так и ту форму, которую обязана иметь сингулярность. Так что можно попытаться сформировать все возможные (относительные) скаляры из этих величин и проверить их на годность в качестве искомого, формально введённого добавка к собственному действию классической частицы. Проверить с помощью применения принципа стационарности собственного действия на траектории. Поскольку эти добавочные сингулярные векторы являются контравариантными, то, в первую очередь, следует рассмотреть их свёртки с имеющимися ковариантными векторами, такими как вектор-потенциалы неметрической части связности. Результирующие скаляры будут **линейными нормами** всех этих векторов. В полном соответствии с исходным духом связи между градиентом действия и касательным к траектории частицы вектором. Однако, нам будет полезнее пойти по несколько иному пути. А именно, по пути, объединяющему полноценную четырёхмерную область с содержащейся в ней материальной точкой.

Причина такого выбора достаточно очевидна — нам необходимо учесть влияние именно окружающей материальную точку области на собственное действие этой точки, учесть её **связи** с окружающим эту точку (в пространстве-времени — линию) миром. Поэтому следует, в первую очередь, обратить внимание не на поведение действия вдоль траектории, а на более общую характеристику, поведение действия вдоль **любой** линии **внутри** **окружающей материальную точку области**. А для описа-

ния этого типа поведения действия в области (при выделенной метрической связности) мы уже используем не вектор энергии-импульса, а его тензор.

И условие стационарности действия для области, как в случае отсутствия в ней сингулярностей (событий), так и при их наличии, в нашем описании проявляется в **тождественном** равенстве нулю для любого пространства аффинной связности (точнее, метрической части его описания) ковариантной (опять-же по метрической части связности) дивергенции **полного** тензора энергии-импульса **всюду** в этой области. Поскольку полный тензор энергии-импульса мы вводим именно как функциональную производную действия области **по метрическому тензору** (2.45, 2.31, 2.32). Равенство нулю указанной выше его дивергенции является следствием структурного тождества Бианки (1.18), редуцированного для метрических связностей. Также как и одна из пар уравнений Максвелла является аналогичным структурным тождеством.

Почему так получается? Почему **расходимость, сингулярность** (дивергенция) в **производных** полного тензора энергии-импульса обязана исчезать? Ведь именно наличие этих сингулярностей в самом тензоре позволило нам определить вид коэффициентов метрической связности. А производные, **описывающие согласованные изменения в области** этого тензора должны быть равны нулю.

Дело именно в том, что определяя метрическую часть связности через сингулярности, мы учли наличие в области **всех без исключения событий. ВСЕХ БЕЗ ИСКЛЮЧЕНИЯ**. Даже тех, которые по факту отражают наличие в связности неметрических составляющих. Поэтому наличие этих составляющих в полном тензоре энергии-импульса может соответствовать **только той его части, которая имеет нулевой след на метрике**. Поэтому влияние неметрических составляющих связности сводится к **изменению согласованных с метрикой траекторий** материальных точек в области, к отличию этих траекторий от геодезических метрической части связности. А вид дополни-

тельных сингулярностей на этих траекториях, их вклад в собственное действие классической точечной частицы, обязан быть согласован специальным образом с уже учтённым нами (в массе покоя) вкладом **всех полей вместе**, не изменяя уже определённого нами **полного собственного действия**. Поэтому **только ковариантная метрическая дивергенция полного** тензора энергии-импульса обязана быть равной нулю, чтобы все компоненты нашего описания оказались полностью согласованными.

Нашей задачей становится восстановление вклада в действие неметрической части связности **вдоль траектории** на основе известного добавочного тензора энергии-импульса. Именно знание дивергенции этого добавочного тензора позволит нам сделать это с помощью теоремы Гаусса, связывающей интеграл от дивергенции объёмной плотности с объёмным интегралом.

Почему это можно сделать именно так? Вспомним, как мы определили вид **главной части** плотности тензора энергии-импульса материальной точки в §2.4. Мы воспользовались сначала тождественными соотношениями, определяющими в наших соглашениях именно материальную точку как сингулярность в области пространства-времени, а затем переписали эти соотношения в интегральной форме, применимой уже к области, эту точку содержащей. Для физических полей, чей образ описывается неметрической частью связности, мы уже имеем выражение для плотности тензора энергии-импульса в области, содержащей сингулярность, материальную точку. Соответственно, мы можем пройти эту логическую цепочку в обратном направлении, и признать, что сингулярность, расходимость, т.е. **дивергенция** плотности этого, добавочного к главной части тензора энергии-импульса, связана с искомой нами добавкой к действию на траектории Δs_0 точно также, как и действие в чисто метрическом случае. Т.е. сингулярность вырезает линию в области в общих интегральных соотношениях.

Прделаем необходимые выкладки для **полной** неметрической части связности, в предположении, что на траектории материальной точки может иметься не нулевая дивергенция (расхо-

димось, сингулярность) как в тензоре Максвелла симметричной части связности, так и в тензоре Максвелла, сформированном из кручения. Т.е. с материальной точкой помимо массы покоя m_0 , могут быть связаны и обе не нулевых плотности заряда, $\epsilon \neq 0, \epsilon_T \neq 0$. Кроме того, мы ещё полагаем, что в этой области пространства-времени имеется не нулевой **полный** тензор Максвелла.

Итак, мы рассматриваем связность самого общего вида с не нулевым тензором Максвелла, $F_{ik} \neq 0$. В этом случае добавок к главной части плотности полного тензора энергии-импульса для области, содержащей единственную материальную точку, возникающий из учёта неметрической части связности ($\mathfrak{T}^{ik} = \mathfrak{T}_0^{ik} + \Delta\mathfrak{T}^{ik}$) мы запишем в следующем виде:

$$\Delta\mathfrak{T}^{ik} = \mathfrak{g}\left(-\frac{1}{4}F_{jp}F^{jp}\mathfrak{g}^{ik} + F^{ji}F^{mk}\mathfrak{g}_{jm}\right). \quad (3.50)$$

Нам требуется вычислить ковариантную **метрическую** дивергенцию этой плотности. Поскольку $\tilde{\nabla}_k\mathfrak{g}^{ij} = 0$, $\tilde{\nabla}_k\mathfrak{g} = 0$ по определению метрики и метрической части связности, нам достаточно вычислить такую дивергенцию для соответствующего $\Delta\mathfrak{T}^{ik}$ тензора, а потом просто умножить её снова на метрическую плотность. Сделаем это.

Т.к. в первый член (3.50) тензор Максвелла входит в квадратичном виде ($F^{jp} = F_{ml}\mathfrak{g}^{jm}\mathfrak{g}^{pl}$) и свёртка дивергенции делается по индексу метрики, а не по какому-либо индексу тензора Максвелла, то, производя после дифференцирования удобную нам замену мёртвых (т.е. участвующих в свёртке сверху и снизу) индексов, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_k\left(-\frac{1}{4}F_{jp}F^{jp}\mathfrak{g}^{ik}\right) &= -\frac{1}{2}F^{jp}\mathfrak{g}^{ik}\tilde{\nabla}_kF_{jp} = -\frac{1}{2}F^{jk}\mathfrak{g}^{ip}\tilde{\nabla}_pF_{jk} = \\ &= \frac{1}{2}F^{jk}\mathfrak{g}^{ip}(\tilde{\nabla}_kF_{pj} + \tilde{\nabla}_jF_{kp}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Последнюю форму равенства в приведённом выражении мы получили после взаимной перестановки мёртвых индексов $p \leftrightarrow k$ и заменой дивергенции тензора Максвелла с помощью первой пары уравнений (тождества) Максвелла (1.17а). Напоминаю, что

здесь ковариантные производные мы всюду берём по метрической (а значит симметричной) части связности, поэтому уравнения Максвелла остаются справедливыми как в форме обычных производных, так и в таких, ковариантных производных. Для производных по полной связности это будет неверно, появится явный вклад кручения. Но нас ведь интересуют только выражения, справедливые в **стандартизованных**, наиболее простых описаниях области пространства-времени.

Принимая во внимание полученное выше соотношение, а также выражение контравариантной формы тензора Максвелла через его исходную, ковариантную форму и метрику, и меняя мёртвые индексы в свёртках так, чтобы стали хорошо видны возможные соответствия, получаем

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_k \Delta T^{ik} &= \frac{1}{2} F^{jk} g^{ip} (\tilde{\nabla}_k F_{pj} + \tilde{\nabla}_j F_{kp}) \\
 &\quad + F^{mk} g_{lm} g^{ip} g^{lj} \tilde{\nabla}_k F_{jp} + F^{ik} g_{kp} \tilde{\nabla}_k F^{kp} = \\
 &= g^{ip} \left(\frac{1}{2} F^{jk} \tilde{\nabla}_k F_{pj} + \frac{1}{2} F^{jk} \tilde{\nabla}_k F_{pj} - F^{jk} \tilde{\nabla}_k F_{pj} \right) \\
 &\quad + F^{ik} g_{kp} \tilde{J}_t^p \\
 &= F^{ik} g_{kp} \tilde{J}_t^p.
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

В этих выкладках мы также использовали соотношение $g_{lm} g^{lj} = \delta_m^j$ и антисимметричность тензора Максвелла для того, чтобы получить в ряде членов нужную нам перестановку индексов. Через $\tilde{J}_t^p = \tilde{J}^p + \tilde{J}_T^p$ мы обозначили дивергенцию полного тензора Максвелла, т.е. сумму тех токов, которые мы рассматривали ранее как электромагнитный ток и ток кручения.

Из полученного выражения ясно, что дивергенция плотности тензора энергии-импульса, обязанной своим существованием неметрической части связности в области, тоже равна нулю всюду в этой области, где токи равны нулю. Только на траекториях классических частиц эта величина может не обращаться в нуль, если там не равен нулю вектор тока $\tilde{J}_t^p$. Т.е. эта дивергенция сингулярна, и сингулярность её повторяет сингулярность самого тензора Максвелла.

Используя теорему Гаусса в применении для распределений, связывающую интеграл от дивергенции объёмной плотности с объёмным интегралом и переходя затем к интегралу по линии сингулярности, содержащейся в области (по траектории классической частицы с $\tilde{J}_t^p \neq 0$), можно получить тот добавок к действию на траектории, который даёт наличие неметрической части в связности, выражающееся в $F_{ik} \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int \Delta s_0 &= \int (A_i + T_i)(\tilde{J}^i + \tilde{J}_T^i) dl = \\ &= \int (A_i + T_i)(e + e_T) \frac{dx^i}{dl} dl \\ &= \int (e + e_T)(A_i + T_i) dx^i. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Соответственно, полное действие на траектории классической частицы в форме **интеграла по метрическому параметру** в этом случае записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} s_0 &= \int [m_0 c + (A_i + T_i)(\tilde{J}^i + \tilde{J}_T^i)] dl = \\ &= \int (m_0 c + A_i^t \tilde{J}_t^i) dl \end{aligned} \quad (3.54)$$

Здесь введено обозначение $A_i^t = A_i + T_i = \Gamma_i - \tilde{\Gamma}_i$ для разницы между свёртками полной и метрической связности, которая и является **полным** вектор-потенциалом всех неметрических, дополнительных к гравитационному физическим полям. Т.е. поля электромагнитного и поля кручения. Из верхней строчки (3.54) мы видим, что, хотя эти два поля и можно разделить инвариантно, но имеет место также и **перекрёстное** взаимодействие. Ток кручения взаимодействует не только с вектор-потенциалом кручения, но и с вектор-потенциалом симметричной части связности. С тем, который мы рассматриваем как электромагнитный вектор-потенциал. И наоборот, тот ток, который мы полагаем чисто электромагнитным, взаимодействует также с вектором кручения. Это означает, что вопрос разделения проявлений

этих двух полей не так прост. И с самых общих позиций будет правильнее рассматривать их вместе. И только там, где их совместное проявление мы сможем разделить на инвариантные составляющие без каких-либо сомнений, это различие следует принимать во внимание.¹⁷

Влияние этих двух полей на описание движения классической материальной точки можно получить, варьируя действие (3.54), также, как мы это делали для его первой составляющей, только учитывая наличие в области, помимо $\mathbf{g}_{ik}$, также и полного вектор-потенциала A_i^t . Однако, опираясь на требование тождественного обращения **всюду** в области **метрической** дивергенции **полного** тензора энергии-импульса в нуль, мы можем записать **общее** уравнение движения материальной точки **относительно стандартных систем отсчёта** (основанных на требованиях к виду классической метрики), используя для этого уже имеющиеся у нас соотношения (3.16) и (3.52):

$$-m_0 c \frac{\tilde{D} dx^i}{dl \frac{dl}{dt}} + F^{ik} \mathbf{g}_{kp} \tilde{J}_t^p = 0, \quad (3.55)$$

или, в стандартной для классической физики форме второго закона Ньютона (для произвольных систем координат, допустимых в стандартизованных системах отсчёта)

$$m_0 c \frac{\tilde{D} dx^i}{dl \frac{dl}{dt}} = F^{ik} \mathbf{g}_{kp} \tilde{J}_t^p. \quad (3.56)$$

В правой части этого уравнения записано не что иное, как **сила Лоренца**. С учётом результатов двух предыдущих параграфов, легко переписать это соотношение в форме более привычной для записи второго закона Ньютона, с использованием выражений для сил инерции и/или силы притяжения.

Обсудим кратко, как нам следует понимать полученные выражения с точки зрения геометрии, соотношения между связ-

¹⁷Заметьте, что использованный нами путь привёл к тем самым соотношениям, которые мы ожидали из самых общих соображений, базирующихся на возможности построения *линейных норм* для имеющихся в нашем распоряжении векторов.

ностью в области и траекторией материальной точки, возможно имеющей не нулевые заряды.

- Во первых, нужно отметить, что соотношения (3.52), (3.54) утверждают, что для имеющих заряды материальных точек формула (2.30), записывающая связанную с ними плотность главной части тензора энергии-импульса не является точной. Этого нам следовало ожидать уже потому, что используемая в ней контравариантная версия вектора энергии-импульса не является точным эквивалентом базовой, ковариантной его формы. Выделять в явном виде поправку именно к главной части плотности тензора¹⁸ энергии-импульса мы не будем, т.к. в этом мало смысла. Нас ведь на самом деле интересует вид **полной** его плотности, а этот вид нам уже известен, причём в форме, опирающейся только на измеримые величины (тензор Максвелла и производная координат траектории по метрическому скалярному параметру), или на постулируемые нами параметры и структуру (массу покоя, заряды и метрический тензор).
- Во вторых, соотношение (3.54), точнее, те рассуждения, которые мы использовали для его вывода, позволяют уточнить не только способ модификации главной части плотности действия, обусловленной непосредственно свойствами материальных точек, но и важнейшую бесследовую составляющую (не нулевую тождественно, как метрический тензор Риччи) полной плотности тензора энергии-импульса. Это плотность, квадратичная по полному тензору Максвелла.

Почему это важная такая часть? Потому, что именно она описывает двух точечные связи, завершая самосогласованное определение стандартных процедур измерения, со-

¹⁸В виде тензора. Поправку к множителю перед dl , делающую связь дифференциала этого скалярного параметра с каноническим параметром s_0 мы уже имеем. При желании, с помощью δ -функции можно записать и результирующую плотность тензора.

здающих наши стандартизованные описания (формирующих стандартизованные системы отсчёта). И, кроме того, **эта и только эта** бесследовая составляющая генерируется в нашем описании непосредственно **элементарными** событиями на траекториях материальных точек.

- В третьих, полная плотность тензора энергии-импульса может (на самом деле должна) содержать и те бесследовые (на классической метрике) члены, которые обусловлены **не локальными** составляющими описания. Члены, связанные с “большими”, *не элементарными* событиями и только с ними. Описывающие *коллективные* эффекты. Этой части описания я в данной книге касаюсь в весьма малой степени. Она одна из важнейших для физики, но, всё-таки, напрямую к её основаниям не относится.

Вполне естественно, что коллективные эффекты тоже можно описывать определёнными составляющими аффинной связности в геометрическом описании мира. Но полезным это может быть лишь в малом количестве самых простых случаев. Для их описания больше подойдут стандартные методы физики сплошных сред, дорогу к которым я кратко намечу в следующей главе.

- И последнее, хочу особо подчеркнуть снова, что наличие в области неметрической связности (и кручения тоже!) **обязательно** находит своё отражение в описании движения материальных точек. **Их траектории перестают быть геодезическими метрической связности**, оставаясь таковыми в полной аффинной связности в области. Т.е. определяются не только поведением метрики (учитывающей массы точек, имеющих в области), но и всеми теми дополнительными к метрическим компонентами связности, которые в классических изложениях принято рассматривать как обособленные от гравитационного физические поля. Включая тензор кручения, хотя тот не входит в уравнение геодезической напрямую.

Возможно, иногда наблюдаемые на опыте отличия движения материальных точек (например, небесных тел в тех приближениях астрономии, в которых такие тела можно рассматривать как массивные точки) от предполагаемых на основе тех или иных допущений о наличии массивных объектов в области следует напрямую интерпретировать как индикатор наличия в этой области неучтённой в этих допущениях **неметрической** связности¹⁹.

Должно быть ясно, что если оба заряда материальной точки равны нулю, то движение её будет, в основном, мало чувствительным к наличию в области неметрической части связности. Даже если эти дополнительные поля достаточно сильны. Точно также, как и отличие от нуля какого-либо из зарядов не приводит к изменению траектории движения при наличии в области только метрической связности. В чистом гравитационном поле все материальные точки, и заряженные, и не заряженные, движутся одинаково.

Это касается, в первую очередь, локализованного рассмотрения, приближений, в которых учитывается малое количество принятых во внимание материальных точек. Однако, коллективные эффекты приведёнными выше уравнениями практически не учитываются. А их роль в формировании относительного движения даже нейтральных (не имеющих зарядов) точек может, вообще говоря, быть очень значительной. Поэтому применять базовые уравнения для описания сложных ситуаций, вовлекающих в рассмотрение очень большое число материальных точек

¹⁹В частности, это замечание может напрямую касаться проблемы так называемой “тёмной материи”, ставшей притчей во языцех в последние десятилетия в физике, и не только в физике. Основной мотив всех спекуляций на эту тему — отличие скоростей **вращения** звёзд или галактик от ожидаемых на основании известных масс галактик и скоплений галактик. Как мы увидим в следующей главе, с вращением генетически связана необходимость учёта в геометрии пространства-времени такой составляющей связности как кручение. Хотя кручение **напрямую** не входит в уравнения геодезических, но опосредованно оно тоже изменяет их реальное поведение в сравнении с метрическими геодезическими.

следует с большой осторожностью.

Конечно, рассмотренные в этой главе вопросы не покрывают все возможные стороны описания динамики материальной точки. Однако, я считаю целесообразным не расширять их рассмотрение дальше, поскольку объять необъятное сложно, практически невозможно, а уже сделанное вполне позволяет ясно увидеть прямую дорогу от нашего описания мира пространствами аффинной связности к обычным, уже давно принятым в классической физике представлениям о мире.