

Глава 2

Физические поля

2.1 Поле связности, тензорные поля и их интерпретация в физике

Приступим теперь, наконец, к нашей действительной цели — построению описания мира как **физической** теории в классических приближениях. Мы уже наметили определённый способ описания наличия материальных точек, существующих как линии в пространстве-времени. С одной стороны, их подпространства существования описываются линиями, на которых (и только на них) определено **непрерывное** действие, как величина физическая, являющаяся изображением в классических приближениях тех цепочек событий, которые порождают идеализированный образ материальных точек. С другой стороны, на этих линиях, и, опять же, только на них, коэффициенты аффинной связности являются сингулярными. Стремятся к бесконечности при приближении к линиям существования материальных частиц по **чисто пространственным** направлениям. Сами же коэффициенты аффинной связности и порождаемые ими тензоры вне линий существования материальных (точечных в большинстве классических приближений) частиц и являются теми искомыми **полями, определёнными над пространством-временем**, которые нам требуются для описания мира как континуума во всей

его полноте. Т.е. нам необходимо выяснить, какими, с учётом всего ранее сказанного, могут и должны быть эти поля.

Вот только одно **НО**. Физика, как описание мира не появилась на свет вот прямо сейчас, при написании этой книги. В процессе её создания были уже выработаны определённые представления о частях мира и связях между ними. Классическое представление о частях мира, имеющих массу, мы уже в той или иной форме включили в наше описание. Может быть ещё не до конца, т.к. ещё не касались в должной степени описания их взаимного движения. Мы обязательно сделаем это несколько позже. А вот для описания связей между массивными частицами, как продолжения связей между событиями на те места континуума пространства-времени, где самих этих событий (в классических приближениях массивных частиц) нет, классическая физика уже давно использует представление о **физических полях**. Полях **сил**. Сил гравитации (притяжения) и сил электромагнитных. Других сил (если не касаться пока сил инерции) на сегодняшний день физика в **классических приближениях** не рассматривает. Мы ещё пока не вводили понятие силы в наше описание, да в этой главе и не будем делать этого в полной мере, оставив рассмотрение этого вопроса как часть темы следующей главы, посвящённой описанию движения материальных точек. Однако, избежать использования самого термина, как и почти эквивалентного ему термина “взаимодействие” нам не удастся. В квантовых приближениях набор рассматриваемых сил (точнее, **взаимодействий**) заметно шире — к электромагнитным взаимодействиям добавляются так называемые слабые и сильные взаимодействия. А вот гравитационные взаимодействия пока что выпадают из набора взаимодействий, которые нынешняя квантовая теория способна описывать хоть в какой-то степени.

Описание взаимодействий, дополнительных к электромагнетизму, и причин их “коротко действия”, отсутствия наблюдаемых проявлений в классических приближениях, а также отсутствия гравитационных взаимодействий как отдельного вида в квантовых приближениях, будет предметом следующего, третьего тома

этой книги. Хотя я всё же немного коснусь обсуждения этих причин в части гравитационных взаимодействий. Да и некоторые замечания по поводу свойств других полей в квантовых приближениях иногда будут даваться с поддержкой скорее со стороны опыта, чем полноценного теоретического рассмотрения. Но всё-таки, здесь мы, в основном, ограничиваемся классическими приближениями.

Вполне понятно, что все эти “физические” поля были введены без какой-либо связи с геометрическим описанием пространства-времени, которое тоже присутствует в классической физике. Это структуры, **дополнительные** к геометрии в исторически сложившейся картине мира. Соответственно, нашей задачей, помимо достижения уже сформулированной выше цели, является также обязательное приведение в соответствие нашего описания мира с теми его чертами, которые уже являются полноценной составляющей имеющихся в классической физике, подтверждённых многочисленными опытными данными, теорий. Иными словами, нам нужно чётко указать, какие проявления поля связности мы интерпретируем как проявления гравитации, какие — как проявления электромагнетизма. Причём нужно будет получить уже хорошо известные уравнения для этих полей. В полном объёме, или хотя бы указать, где полученные нами соотношения полностью совпадают с известными, а где различаются и почему.

Для достижения успеха на намеченном пути нужно ясно понимать, что поле объекта связности, приписанное миру как континууму, является идеализированным распространением представления о масштабах и их свойствах на те точки, где этих масштабов (реализуемых нами в том или ином приближении) нет и быть не может. Поэтому, **всякое поле связности, согласованное с известным множеством событий и их связей, является полностью приемлемым описанием** некоторой известной нам части мира. Однако, вполне должно быть также понятно, что при этом “всякое” может оказаться гораздо больше “необходимого”. А излишняя сложность описания мира нам тоже не нужна.

Следовательно, программу построения необходимого и достаточного описания мира с помощью пространства аффинной связности можно сформулировать так:

- Начинаем с максимально “натянутой” на события и их связи аффинной связности. “Натянутой” означает подчиняющейся максимально жёстким условиям. Условиям, допускающим только ту необходимую свободу в выборе масштабов, которую мы не можем ограничить никаким способом, не потеряв возможности приписать всем точкам континуума координаты. Хотя бы в малой окрестности цепочки событий, принятой за прототип идеализированного масштаба времени.
- Далее, мы будем постепенно ослаблять жёсткость этих условий с тем, чтобы новые условия, при расширении области принимаемых в рассмотрение связей этой цепочки с другими, позволяли построить согласованные с ними координаты **для всей области**.
- И так далее, пока наше описание не достигнет желаемой степени общности и удовлетворительности. В том смысле, что **все известные нам на сегодня** явления и свойства мира найдут своё место в нашем его описании, в свойствах объекта аффинной связности, который может быть приписан пространству-времени как образу мира.
- Ещё более желанной целью может быть наша способность утверждать в конечном итоге, что мы перечислили **все возможные** свойства, лежащие в основаниях описания мира в классических приближениях, и привели все главные, определяющие их соотношения. Дальнейшее продвижение должно достигаться на пути развития наших приближений в сторону усложнения понятий, сопоставляемых всё более и более сложным конфигурациям событий. С введением понятий вторичных к понятию аффинной связности. А на фундаментальном уровне, уровне материальных точек,

ничего дополнительного к уже присутствующему в нашем описании быть не может.

Тогда мы сможем сказать, что мы имеем надежное основание, на котором можно строить здание классическое физики дальше.

2.2 Действие и классическая метрика

Начнём постепенно реализовывать сформулированную нами программу. В третьей главе первого тома “Вводные главы” мы с разных сторон рассмотрели имеющиеся в нашем распоряжении возможности приписать полноценную систему координат хотя бы части мира, как континуума, основываясь только на доступной нам информации о событиях. То представление, которое мы в результате выработали, всё-таки в большой степени идеализировано. Хотя с точки зрения самого общего рассмотрения возможностей такого описания, допускаемых тем фактом, что события, доведённые до самых элементарных, в конечном счёте дискретны, оно фактически является нашей **единственной** опорой, связывающей наше описание со всеми известными нам экспериментальными фактами, взятыми все вместе, в совокупности. Соответственно, тот набор процедур измерений, который в результате формируется, вполне может быть реализован с определённой точностью и некоторыми дополнительными допущениями и в реально доступных нам классических приближениях.

Попытаемся сформулировать те условия на наше описание, которые должны быть положены именно в основу **каждого** классического приближения. Которые можно будет применить **локально**, в окрестности **каждой** точки непрерывного образа мира в каждом конкретном приближении **одинаково**, вне зависимости от того какой именно кусочек мира мы считаем в этом приближении малым. Т.е. не зависимо от того, какие именно расстояния мы полагаем уже настолько малыми, что считаем кусочек мира с такими размерами “точкой”, **не имеющей пространственных размеров вообще**. Когда эти условия будут

применимы, то образом мира становится континуум, пространство аффинной связности, математическое пространство разное для разных приближений, но которое во всех приближениях мы называем общим именем — пространство-время.

Следовательно, речь идёт о введении определённым образом **стандартизованного** описания, введении некоторых стандартизованных структур, аналогичных по методу использования стандартным математическим функциям, таким как $\sin$, $\cos$, $\exp$.

Соглашения стандартизации нам при этом придётся принять как постулаты. Их обоснование как раз и апеллирует к рассмотрению дискретных цепочек событий. Но здесь, в классических приближениях, цепочки событий непрерывны, поэтому возникающие из рассмотрения дискретных цепочек событий связи между понятиями оказываются разорванными, и, *чтобы их сохранить, нужно их оформлять как соглашения, постулаты, принимаемые без доказательства*. Вот эти соглашения:

- Для всякой материальной точки **имеется система покоя**, которую нам необходимо при формировании процедуры измерения, использующей эту точку как **базовое тело отсчёта** характеризовать следующими **постоянными** на линии её существования в формирующемся описании пространства-времени объектами:

1. Масштаб, единица времени. Существует (имеет реальный прототип, базирующийся на событиях) только на траектории материальной точки. На ней это просто фиксированная единица. Но с точки зрения континуума, пространства-времени, это **контравариантный** вектор, имеющий в системе покоя этой частицы в каждый момент её существования единственную не нулевую и единичную *временную* компоненту.

Допускается разный выбор этого масштаба. В том смысле, что за прототип единицы могут быть приняты отрезки между разными событиями. Но все допустимые масштабы на **всей** траектории отличаются только **постоянным** коэффициентом. Таким образом мы

определяем **не единственную** систему покоя, а сразу бесконечно много их, описывающих разные способы введения временной координаты на линии существования материальной точки как группу линейных одномерных преобразований, с разными началами отсчёта этой координаты и разными, но постоянными единицами времени.

2. Некоторая **дополнительная** постоянная величина, называемая **массой покоя**. В классических приближениях это **свободный параметр** описания, численное значение которого в самой теории определено быть не может. Кажется, что так в геометрическое описание искусственно вносится дополнительная, *физическая*, чуждая для геометрии составляющая, не имеющая прямого отношения к собственно геометрии. И пространство-время следует рассматривать как континуум, **вмещающий** такие, внешние для него величины. Это будет так, если мы проигнорируем наше **дополнительное**, действительно **внешнее для классических приближений** знание связи массы покоя с числом событий на траектории материальной частицы. **Но мы эту связь будем помнить и использовать как главную, формообразующую часть наших построений.** Соответственно, пользуясь этим знанием, мы полагаем эту величину не просто некоторой постоянной, а единственной не нулевой в строящейся системе координат компонентой некоторого **ковариантного** вектора, являющегося **градиентом** ещё одной **физической** величины, **действия**, непрерывного образа дискретных для материальной точки событий¹. Связь этой непрерывной величины с дискретными событиями тоже в классических приближениях

¹**Важно** помнить, что действие, которое мы ассоциируем с линиями существования материальных точек, хоть и является в классических приближениях непрерывной функцией положения точки на этой линии, но для остального пространства-времени таковой функцией при этом не становится

является внешней, в них не определимой. Мы знаем уже, что этот градиент и физическое понятие “вектор энергии-импульса” связаны однозначно. Однако, в классических приближениях эта связь не очевидна. Кроме того, в физике в качестве вектора энергии-импульса исторически используют **контравариантный** вектор. Поэтому все связи между разными обозначениями (и проявлениями) одного и того же объекта нам придётся устанавливать по ходу дела, в процессе формулирования нашего классического описания. Также и связь массы покоя с энергией покоя нужно будет подтвердить в соответствующем месте. Хотя эту связь (через коэффициент c^2) я буду использовать в формулах и раньше, чтобы не допустить путаницу в единицах измерения этой величины в разных её проявлениях.

В системах покоя определены обязательные соотношения между промежутком времени $t_2 - t_1$, измеренным выбранной единицей времени, массой покоя m_0 , которая может измеряться как в естественных единицах обратного времени, так и в произвольно выбранных единицах, принятых в физике, и действием на линии существования материальной точки, принятой за основание этих систем, s_0 . Это собственное действие материальной точки, связанное только с событиями в её существовании. Действие в естественных единицах безразмерно, но в физике исторически эта величина имеет размерность, зависящую от выбора системы единиц для пространственного расстояния, времени и массы. Приведу соотношения, которые являются формальной записью

ся. Это сингулярная функция, определённая только на траектории каждой материальной точки **в отдельности**. Мы не можем даже рассчитывать, что её можно сделать единой согласованной сингулярной функцией для всех материальных точек вместе. Поэтому, когда я говорю о градиенте действия, я **всегда** подразумеваю то, что это всего лишь сингулярный, определённый только на одномерной линии вектор, преобразующийся как градиент скаляра, но ни в коем случае не градиент какой-либо единой функции точки в четырёхмерном пространстве времени.

высказанных ранее словами постулатов:

$$s_0 = m_0 c^2 \cdot (t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} ds_0 = \int_{t_1}^{t_2} m_0 c^2 dt. \quad (2.1)$$

При локализации этих соотношений для нас основной остаётся связь между бесконечно малыми изменениями действия и времени: $ds_0 = m_0 c^2 dt$. Смысл введения в эти соотношения дополнительно к массе покоя некоторого коэффициента c (причём во второй степени) мы будем постепенно прояснять в ходе изложения.

В исторически сложившемся подходе к интерпретации этих соотношений масса покоя измеряется в собственных, независимых от единиц времени и пространства единицах. Граммах, килограммах, фунтах, пудах и т.д. Действие имеет вторичную размерность, получающуюся как произведение единицы энергии на единицу времени. То, что действие и промежуток времени на траектории материальной частицы в **системе её покоя** связаны постоянным коэффициентом, пропорциональным массе покоя, стало результатом осознания идей, сформулированных Специальной Теорией Относительности. Здесь я эти идеи закладываю в описание изначально, базируясь на выводах, полученных в первом томе этой книги. Так что выписанные соглашения можно тоже рассматривать как исходный постулат нашего описания мира. Коэффициент c^2 служит для отслеживания правильных размерных соотношений. Он нужен для того, чтобы стало возможным увидеть соответствие нашего геометрического описания принятым в физике исторически методам измерения разными единицами величин, которые казались разными вначале, когда вводились в рассмотрение, а с развитием теории оказывались проявлениями одних и тех же явлений.

В нашем подходе к описанию мира с самого начала масса покоя является вторичным (хотя и чрезвычайно важным, имеющим самостоятельное значение) элементом описания мира, производным от **инвариантной величины**, действия, рассматриваемого как непрерывный образ числа событий на траектории.

Поэтому в нашем описании действие является **безразмерной** величиной. Безразмерной в том смысле, что его значение никак не связано с выбором размеров (масштабов для разных координат) в описании пространства-времени. Хотя, поскольку эта величина у нас строго пропорциональна числу событий в истории материальной точки за рассматриваемый промежуток времени, можно приписать действию размерность “число событий”. Но размерность эта не имеет отношения к единицам, производящим координаты точек напрямую.

Число, выражающее значение действия на всяком отрезке линии существования материальной частицы, не изменяется при переходе к иному набору единиц для измерения времени и пространства, не изменяется при ином выборе системы координат в пространстве-времени. Следовательно, для измерения массы (энергии) покоя имеется **естественная** единица, обусловленная конкретным выбором единиц времени и расстояния, и имеются коэффициенты пересчёта “внешних”, произвольно выбранных единиц в естественную. Именно эти соотношения мы использовали в §1.1 для оценки применимости классических приближений².

Всякий промежуток времени, приписанный базовому телу отсчёта (т.е. материальной точке) в его системах покоя принято называть **собственным** временем этого тела отсчёта. Его величина может меняться при изменении единицы времени, соответствующей системе покоя этого тела, но не может изменяться

²По ходу дела нам придётся параллельно использовать в общем-то одни и те же объекты в разной форме — массу покоя как энергию, измеряемую в эргах и как массу, измеряемую в граммах (килограммах и т.д.); вектор энергии-импульса в его привычном для классической физики виде и как введённый нами градиент действия, причём действие тоже может быть чисто классическим, имеющим размерность, а может быть образом числа событий. Само описание мира координатами тоже будет уточняться — вместо действительного времени мы будем использовать мнимую координату x^4 , да ещё и отличающуюся специальным коэффициентом от измеренного каким-либо масштабом времени. Чтобы не возникала путаница во всех этих величинах, в дальнейшем по ходу дела я буду вводить дополнительные обозначения для них, с ограничением их смысла заданными условиями и указанием коэффициентов, связывающих разные образы одного и того же объекта.

при переходе к системам координат, **базирующимся на других телах отсчёта**. Это характеристика именно выбранного тела отсчёта. Заметьте, что собственное время любого тела отсчёта некоторым образом приобретает черты величины инвариантной, во многих случаях не зависящей от выбора системы координат. Не полноценного скаляра, но очень на него похожего объекта. Этот момент будет далее использован при введении **классической метрики** как *стандартного образа классической системы отсчёта*.

А само понятие классической системы отсчёта как самостоятельное физическое понятие оказывается полезным нам вот почему. Базовое тело отсчёта обеспечивает нас только одним масштабом, масштабом времени. Пространственные единицы мы вводим дополнительно, посредством фиксации, постулирования соотношений ([1], §3.6, а также (2.2) и (2.3), приведённые ниже). Причём эти соотношения позволяют рассматривать **равноправно** не единственный репер пространственных масштабов, а бесконечно большой их набор, связанный некоторой фиксированной группой преобразований в некоторую “группу” таких локальных реперов. Связанный группой ортогональных трёхмерных вращений. Соответственно, со всяким базовым телом отсчёта связана не единственная допустимая система координат, а “группа” таких координат. Более того, эту группу допустимых **регулярных** координат оказывается возможным (и весьма полезным!) дополнить ещё и сингулярными **сферическими полярными** координатами. Обусловлены все эти черты описания тем, что в классических приближениях базовое тело отсчёта является точкой в пространстве, а значит в его малой окрестности **все пространственные направления** равноправны. Любое из них можно выбрать как одно из опорных при построении регулярной системы координат. И все поля, как геометрических, так и (вторичных) физических величин могут зависеть только от **единственного расстояния** до базового тела отсчёта. Расстояния, измеренного одним масштабом вдоль линии по любому направлению. Иными словами, это то, что обычно называют сферической симметрией.

Также и свобода в выборе начала отсчёта и единицы времени для базового тела органично вписывается в понятие о системе отсчёта как совокупности равноправных систем координат, выделенных некоторым, оговорённым заранее, условием.

Вот поэтому при построении описания мира полезно рассматривать всю эту “группу” координат как единую совокупность, соответствующую некоторому выделенному телу отсчёта. Как **систему отсчёта**. Поэтому, когда я говорю о системе покоя некоторой материальной точки (массивной точечной частицы), то речь идёт о **системе отсчёта**, определённой с точностью до всех тех преобразований координат, о которых шла речь выше.

Конечно, все соотношения мы будем по-прежнему формулировать (записывать) в конкретной системе координат. Естественно, по возможности, в ковариантном виде, так чтобы наши соотношения были справедливы для любого выбора масштабов, даже самого странного и в чём-то нам неудобного, лишь бы наш континуум не превращался в пространство числа измерений меньшего, чем нам необходимо для его описания. Поэтому, часто в качестве системы отсчёта будет указываться некоторая конкретная система координат, получаемая с помощью до конца конкретизированной процедуры измерений. Но всегда стоит помнить, что это будет только один экземпляр из того набора систем координат, которые могут быть ассоциированы с системой отсчёта³.

Рассмотрим теперь снова те соотношения, которые мы используем для определения пространственных единиц через масштаб времени. Этот вопрос подробно обсуждался в первом томе, но здесь нам снова потребуются соответствующие формулы и их смысл мы рассмотрим немного с другой точки зрения. А именно, с точки зрения только что сформулированного понятия системы отсчёта.

Изначально мы базируемся на **нелокальном соотношении**,

³В некоторых приближениях группа координат, образующая одну и ту же систему отсчёта может быть заметно сужена по сравнению с описанной здесь. Например, при описании абсолютно твёрдого (не точечного) тела.

связывающем **создаваемые нами** пространственные и временные координаты двух событий, начала и конца специальной, особенной цепочки, не имеющей никаких иных событий между своими концами. Это, по необходимости, означает, что концы эти, события составляющие такую минимальную цепочку, сами принадлежат ещё и двум **разным** цепочкам, ассоциируемым с массивными частицами. Т.е. двум разным линиям существования материальных точек. Одно событие принадлежит нашему базовому объекту отсчёта, а второе какому-то другому, с ним не совпадающему. И, следовательно, в понимании мира как пространства-времени, **движущемуся** относительно нашего базового объекта.

При нелокальном рассмотрении двух таких событий, одно из которых мы помещаем в начале координат на нашем теле отсчёта (т.е. все его координаты равняются нулю), второе, расположенное на траектории другой материальной точки получает некоторые координаты именно из постулируемого нами, связывающего эти события соотношения

$$[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] + (x^4)^2 = 0. \quad (2.2)$$

В этом соотношении вместо действительного времени t мы вводим мнимую координату $x^4 = ic \cdot t$, призванную явным образом (и, главное, **автоматически во всех наших соотношениях**) отслеживать принципиальное различие между вводимыми нами временной и пространственными координатами. Коэффициент пропорциональности c между координатой x^4 и временем для тела отсчёта, число действительное и положительное по определению, должен обеспечить нам возможность более гибко вводить единицы для пространственных и временного измерений. Дело в том, что для того, чтобы формула (2.2) имела смысл, все слагаемые в ней **должны** иметь одинаковые размерности. Это подразумевает, что имеется возможность установить, или **хотя бы постулировать равенство масштабов для всех четырёх координат, включая время**. Это уже элемент **стандартизации** и этот момент я буду обсуждать ниже. Такого ви-

да стандартизацию в физике принято ещё называть **калибровкой**. Калибровкой единиц измерения, установлением соотношений между масштабами. В данном случае принятие соотношения (2.2) как постулата и означает преимущественный выбор некоторой такой калибровки, одно из условий на неё.

Коэффициент c , вообще говоря, может быть выбран произвольно. Однако, мы будем строить такое стандартизованное описание мира, в котором наш постулат на определённом этапе станет не совершенно произвольным для классических приближений выбором. Нет, мы свяжем его с вполне описываемым именно в классических приближениях конкретным физическим (и геометрическим, конечно) явлением. Явлением распространения электромагнитных волн, в частности света. И этим определим и смысл и величину этого коэффициента. Имея ввиду этот отнесённый на будущее этап, я буду авансом называть этот коэффициент скоростью света. Да, сейчас, в самом начале формирования нашего описания в классических приближениях, у нас ещё нет ничего для указания такой связи. Поэтому наш постулат может (без знания всего того дополнительного, что мы на самом деле уже многократно обсуждали) казаться произвольным. Это неизбежно при описании многомерной целостности с помощью линейного последовательного изложения. Просто отметьте выше сказанное на будущее и вспомните его когда подойдёт подходящий момент.

Нас интересуют локализованные соотношения. Только они могут позволить вести последовательное обсуждение способов введения коэффициентов аффинной связности как функций, описывающих изменение наших масштабов при переходе от точки к точке континуума. Здесь речь идёт о классических приближениях описания мира, которые в своей основе отличаются одно от другого тем, какая часть мира принята за не имеющую размера точку. Так что точка одного приближения в другом приближении может вполне рассматриваться как некоторая, может быть даже и не малая, область. При рассмотрении многих приближений вместе появляется возможность “доказательства” при-

емлемости способа локализации соглашений, принятых для точки для более “грубых” приближений на основе выводов из более “мелких” приближений. Собственно, наше построение и базируется на таком, самом “мелком” приближении, когда события распадаются на дискретное множество элементов. А применяем мы выводы из попыток описания этого дискретного множества для другой ситуации, для событий, собранных в непрерывные линии. То, что в основу наших построений мы закладываем выводы из предельно доступного нам подразделения мира на части, позволяет нам надеяться, что те соотношения, которые мы при этом получим, будут в своих основах применимы **во всех классических приближениях**.

В локализованной форме соотношение (2.2) записывается почти точно также. Достаточно заменить сами координаты (которые по своему смыслу являются **разностями** координат двух удалённых событий) на бесконечно малые смещения, которые мы полагаем принадлежащими линии, соединяющей эти события.

$$[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] + (dx^4)^2 = 0. \quad (2.3)$$

При этом мы подразумеваем, что при интегрировании вдоль любой такой линии, на которой выполняется соотношение (2.3), от начального к конечному событию в двух событийной цепочке, мы всегда получим в результате соотношение (2.2). Просто потому, что сколько нуль не интегрируй, нуль и получим. Стоит отметить, что именно опора на такое “нулевое” соотношение и позволяет нам легко и просто переходить от нелокального условия (опыта) к его локализации, записи для бесконечно малых величин. И наоборот.

Эти **определения** для пространственных масштабов на основе измерения времени с помощью базового тела системы отсчёта возникли из ещё одного требования, которое позволяет описать разницу между градиентами действия на линии существования материальной точки и на линии, связывающей два события с траекторий разных материальных точек. Требования, записан-

ного в похожей форме:

$$(\partial_1 s_0)^2 + (\partial_2 s_0)^2 + (\partial_3 s_0)^2 + (\partial_4 s_0)^2 = 0. \quad (2.4)$$

В геометрии Евклида соотношения вида (2.3) и (2.4) хорошо известны. Они записывают метод вычисления квадрата нормы контравариантного вектора (первое соотношение) и ковариантного вектора (второе соотношение) в ортонормированных системах координат. Специфической нормы, её частного случая, когда векторы имеют эту норму равной нулю. Что для общего вида векторов не требуется. Собственно, именно введение локальной нормы для векторов и позволило нам описать в первом томе (§3.6) разницу между действием (числом событий) для двух минимальных цепочек из событий — для цепочки из трёх и цепочки из двух событий. В классических приближениях это разница между траекториями материальных точек и “пустым” пространством между ними. “Пустым” в смысле отсутствия там событий, но, тем не менее, объединяющем два **связанных** события с траекторий разных массивных частиц. Заметьте, что “пустота” в этом случае означает отсутствие событий. А вот **наличие связи** подразумевается. А значит, и что-то, описывающее эту связь, приписанное к этому “пустому” пространству, распределённое по всем его точкам, нам обязательно потребуется на определённом этапе включить в наше описание мира.

Что плохо в уже представленных формах записи этих соотношений? Плохо то, что эти формы не являются достаточно универсальными. Они справедливы только для ортонормированных систем отсчёта. Да, **мы можем ограничить себя** использованием только таких способов описания мира. Но согласится ли мир с нами? Не окажется ли поведение предоставляемых миром масштабов таким, что не позволит **всегда** следовать этим ограничениям? Далее мы увидим, что это действительно так, мир не согласен с такими ограничениями. Но, даже если бы мир не заставлял нас принимать во внимание более широкую точку зрения, всё равно нам следовало бы сделать это, и только потом убедиться, **доказать опытами**, что можно ограничиться толь-

ко ортонормированными системами координат и соответствующими им процедурами измерений.

В геометрии (т.е. в описании как собрании идей, безотносительно к поведению их прототипов в реальном мире) расширение сформулированной выше точки зрения на соотношения между масштабами одного и того же репера, принимающее во внимание допустимость произвольных, не обязательно ортонормированных координат, достигается введением в рассмотрение метрического тензора в двух взаимосвязанных формах, g_{ik} и g^{ik} . Эти формы метрического тензора являются взаимно обратными в смысле соотношения между представляющими их матрицами, $g_{ij}g^{jk} = \delta_j^k$. Возможно это только если они являются регулярными всюду, **не вырожденными**, т.е. их определители нигде не обращаются в нуль. Что является математической формулировкой требования к метрическому тензору не превращать своим **неправильным выбором** пространство заданного числа измерений, заданного набора **независимых** масштабов в пространство меньшего числа измерений.

В ортогональных координатах матрицы метрического тензора имеют специальный, диагональный вид. А в ортонормированных (имеющих равные значения масштабов для всех координат) на диагонали стоят одни единицы. Собственно, эти утверждения и **являются определениями для этих видов координат**.

Обратите внимание, что вид метрического тензора является стандартным для стандартизованных координат. Калибровка набора масштабов как целого, калибровка координат как единой системы и вид метрического тензора связаны однозначно. Поэтому в дальнейшем я часто буду говорить именно о калибровке метрики, подразумевая всю совокупность результирующих соотношений.

Хочу напомнить, что само равенство величин разных масштабов (направления обязательно должны быть разными) устанавливается именно с помощью метрического тензора. Пока он не определён, произвольные величины для разных масштабов репера могут полагаться равными по определению. Просто потому,

что для сравнения разных векторов нужно для каждого вектора определить что-то инвариантное, и только тогда можно сравнить эти инварианты. Таким инвариантом для вектора обычно является его норма, которую можно определить по разному. В частности, с помощью метрического тензора. А можно определять норму вектора и с помощью какого-либо естественного геометрического объекта, лишь бы его свёртка с вектором давала скаляр. Разумеется, разные способы будут в разной степени универсальными, не всегда подходящими для тех или иных ситуаций. Например, таким нормирующим объектом могут служить и векторы. Такого рода нормы можно назвать “линейными”, так как они находятся в линейном соотношении с масштабами. В частности, так используется важнейший для физики объект, градиент действия, ставящий в соответствие масштабу времени скаляр действие⁴. Однако, использовать его напрямую можно только для сравнения контравариантных векторов, сравнивая следы, которые они дают на градиенте действия. Да ещё известно, что не для всех точек пространства-времени мы можем осознанно определить сам градиент действия. Так что использовать его можно, но отнюдь не всегда и не везде. Собственно именно эти недостатки градиента действия как **линейного** нормирующего объекта и вынудили нас обратиться к **квадратичной** по его компонентам форме, записанной в определении (2.4). К форме, тоже на самом деле базирующейся на использовании действия как скаляра. Но на особом случае действия, соответствующего связи лишь пары событий, для которой действие есть, а события в промежутке, позволяющего определить единицу времени, нет. А единица времени в идеализированном виде касательного вектора как раз и используется для формирования линейной нормы градиента действия. Так что и опереться на линейную норму в этом случае невозможно.

Более универсальными, подходящими для таких целей ка-

⁴Мы, конечно помним, что исходное понятие у нас как раз действие, а не его градиент. Но с формально математической точки зрения “причину” и “следствие” можно поменять местами.

жуются естественные тензоры с двумя индексами. Например, свёртки тензора кривизны (1.9-1.12). В этом случае возникает очень близкая аналогия со всеми теми понятиями, которые связаны на существование метрического тензора. На возможность его введения как записи свойств используемых для описания масштабов. Но никто нам не гарантирует, что естественные для **произвольных** аффинных связностей тензоры будут обладать именно теми свойствами, которые нам потребовались для описания наших цепочек событий. Поэтому мы сначала введём такое описание, какое нам требуется, принудительно. Стандартное описание. Допустив, что нужный нам геометрический объект существует. И уже позже попытаемся согласовать насколько возможно свойства этого объекта с естественными геометрическими тензорами. Тем более, что геометрия Евклида в имеющемся у нас её применении к описанию реального мира в определённых условиях нам ясно даёт понять, что **при этих определённых условиях возможно иметь полное такое согласие**, при том что все естественные тензоры в этом случае равны нулю всюду в евклидовых пространствах, и поэтому не могут быть никоим образом использованы для приписывания векторам индивидуальных инвариантных норм. Это знание является дополнительным основанием для использования в нашем описании для указанных целей с самого начала специального **регулярного** всюду и всюду в нуль не обращающегося геометрического объекта, классической метрики. Как мы увидим ниже, объекта, имеющего строго тензорные свойства только при принятии ряда ограничений на допустимые процедуры измерения.

В предположении существования метрического тензора мы вправе, по аналогии с геометрией Евклида, назвать введённые нами соотношениями (2.3,2.4) локальные координаты ортонормированными (локально!) и переписать эти определения в более удобной для дальнейшего форме:

$$g_{ij}dx^i dx^j = 0, \quad g^{ij}\partial_i s_0 \partial_j s_0 = 0. \quad (2.5)$$

Да, ввести более удобные обозначения можно. Но вот какая проблема — подобные соотношения для пространств аффинной

связности подразумевают **вполне определённый геометрический смысл** для входящих в них геометрических объектов. И смысл этот требует от введённых нами обозначающих нашу “метрику” геометрических объектов g_{ik} и g^{ik} вполне определённого поведения при преобразованиях координат. Это должны быть тензоры, дважды ковариантный и дважды контравариантный. И их компоненты обязаны иметь размерность компонент, соответствующую каждой конкретной системе координат (соответствующую выбору производящих эти компоненты масштабов). Удовлетворяют ли наши объекты этим требованиям? Ответ будет однозначный — введённые нами как метрика объекты требованиям “тензорности” удовлетворяют **не в полной мере**.

Убедиться в этом мы можем простейшим способом. Пусть в одном случае мы измеряем время базового тела отсчёта в секундах, а для измерения пространственных расстояний в качестве единицы примем сантиметр. Постоянную c положим равной примерно $3 \cdot 10^{10}$ см/сек. Делаем ли мы так? Да, и очень часто. В таких координатах наши “тензоры” **мы определяем** как диагональные, с единицами на этой диагонали. Всё вроде прекрасно. Введённые координаты определены как ортонормальные и с них можно начинать наше описание.

А теперь, вместо сантиметра я выберу километр. Постоянную c положу равной $3 \cdot 10^5$ км/сек. Имею право? Конечно. Изменяются ли компоненты “метрики” в **наших** соотношениях? Нет. Они останутся единицами. А вот компоненты настоящих тензоров должны были бы измениться. Одни должны возрасти пропорционально изменению масштаба для измерения расстояния, а для другой формы тензора, соответственно, уменьшиться.

Какой будет вывод? Не использовать такие обозначения? Можно, но не удобно. Поэтому будем полагать введённые нами объекты “не полноценными”, но всё же тензорами. Тем более, что мы можем также легко убедиться и в том, что они действительно ведут себя именно как настоящие тензоры при определённом ограничении на допустимые преобразования координат. А именно, если мы ограничимся **только ортогональными поворо-**

тами репера масштабов как целого, или ортогональными поворотами части векторов репера (тоже как цельной части), не затрагивая выбор величин масштабов, оба наших “тензора” преобразуются вполне правильно. Это означает, что они являются в некотором смысле “относительными тензорами”, т.е. тензорами только относительно фиксированной группы преобразований координат. В данном случае (локально) ортогональной группы поворотов. Заметьте, группа эта описывается стандартными функциями угла. В этом смысле вводимая нами метрика тоже оказывается стандартизированной структурой, в той же самой мере, что и эти стандартные функции математики. Такой подход находится в русле той программы, которую мы выбрали для построения нашего описания мира. Сначала строим описание континуума с наиболее жёсткими соглашениями (ограничениями на выбор описывающих мир наборов масштабов, как в части их групп, так и в части их зависимости от точки пространства-времени). А потом расширяем описание, снимаем ограничения по мере необходимости.

Принимая это во внимание, мы далее будем использовать введённые обозначения весьма широко. Для отличия от “правильной”, геометрической метрики, я буду называть наши “тензоры”, обозначающие нашу “метрику”, тензорами **классической** метрики. И всегда помнить, что они являются не полноценными тензорами, а относительными, и в этом смысле стандартными. И там, где потребуется допускать преобразования координат из более широкой группы, чем локально ортогональные, всегда буду проводить дополнительное, специальное рассмотрение допустимых соотношений, включающих эту, классическую метрику. А там, где рассмотрение можно вполне ограничить только локально ортогональной группой поворотов, я буду использовать классическую метрику именно как обычный тензор. Но с особым подходом к размерностям его компонент.

Почему размерности компонент классической метрики требуют специального подхода? Всё просто. Наши соотношения (2.3) и (2.4) явным образом подразумевают, что единицы на диаго-

налях классической метрики в обеих формах, ковариантной и контравариантной являются **безразмерными** числами. Так мы их определили. Это полностью соответствует подходу к “стандартизации” функций и иных математических понятий. И, как результат, получаемые с их помощью нормы векторов, становятся **размерными** числами, **инвариантными**, неизменными при преобразованиях, для которых наши относительные тензоры преобразуются так же, как и обычные тензоры.

Пока допускаются только ортогональные повороты для векторов репера (всех вместе, или попарно), никаких проблем возникнуть не может. А если нам потребуется использовать иные единицы, времени или расстояния, даже не выходя за рамки системы покоя нашей базовой материальной точки? Как быть? Одним из выходов, вполне в этом случае приемлемым, является использование при **едином** изменении масштаба (т.е. одинаковом масштабировании всех единиц репера), тензоров классической метрики там, где это необходимо, с **соответствующими размерными** коэффициентами. Так, чтобы общие ковариантные соотношения, в которые нам необходимо включить классическую метрику, не нарушались и при таком преобразовании (масштабировании). В более сложных ситуациях нужно более внимательное рассмотрение, и ниже я его предложу.

Вы спросите, зачем все эти сложности, нельзя ли обойтись без них? Причин две. Одна историческая. Таким образом сформировались главные физические теории поля. Вторая более фундаментальна. Классическая метрика нам необходима именно в таком виде. То, что это так, можно заметить уже сейчас. Ведь она в таком виде появилась у нас не просто так, а как способ введения координат в пространстве вокруг материальной точки. Пусть как подпорка, но подпорка и удобная, и в определённом смысле необходимая. Без неё обойтись сложно. Необходимость её напрямую связана с “классичностью” рассматриваемых приближений. С непрерывностью событий на линиях существования масштабов времени. Естественная связь скаляра “число событий” и скаляра “непрерывное действие” разорвана. Появились два ска-

ляра — истинный, действие, хотя и забывшее свою связь с числом событий, но остающееся безразмерным инвариантом с точки зрения описания континуума с помощью набора масштабов, и фиктивный скаляр — интервал, имеющий размерность длины, образа непрерывности. К дальнейшему разъяснению этого вопроса, а именно к уточнению определения физического смысла классической метрики я вернусь чуть ниже.

Сейчас я хочу напомнить, что в результате анализа, приведённого в третьей главе первого тома, мы расширили группу преобразований, допустимых в рамках системы отсчёта, связанной с некоторой заданной материальной точкой (группа трёхмерных ортогональных преобразований, плюс сингулярные полярные в пространстве координаты), до группы ортогональных преобразований всего четырёхмерного репера. И выяснили, что при фиксации использования для временной координаты только мнимых чисел, а для пространственных — только действительных, результирующая группа оказывается ничем иным, как группой Лоренца. А дополнительные преобразования, описывающие ортогональные повороты в плоскостях (поверхностях), образованных одной из пространственных координат и временной (мнимой) координатой, являются ничем иным, как локализованным описанием **движения** друг относительно друга **двух систем отсчёта, связанных с двумя разными материальными точками**. Движения со **скоростью**, пропорциональной гиперболическому тангенсу угла поворота, $v = c \cdot \tanh \varphi$. Коэффициентом пропорциональности является та постоянная c , которую мы ввели при определении единиц измерения пространственного расстояния через масштаб времени, делая таким образом все величины в наших определениях (2.3, 2.4) имеющими одинаковую размерность. Ввели, чтобы эти, нужные нам соотношения, имели смысл. Причём постоянная c становится предельным значением для допустимой скорости относительного движения систем отсчёта. Вызвано это явным требованием связывать с каждой системой отсчёта только пропорциональную её времени **мнимую** координату. Чтобы никогда за счёт иного выбора координат, как

локально, так и глобально, время не называлось пространством.

Почему преобразования между движущимися друг относительно друга системами отсчёта локально оказались поворотами? А чем иным они могут описываться в *четырёхмерном* пространстве-времени, в том случае, когда временное направление рассматривается наравне с пространственными? Ведь движение в четырёхмерном пространстве локально тождественно **не совпадению направлений двух линий** в рассматриваемой точке.

Мы также отметили, что таким образом в нашем описании становятся определёнными не только отдельные системы отсчёта, связанные с выделенной материальной точкой, но определяется целая “группа” в некотором смысле эквивалентных систем отсчёта, которые мы называли **локально инерциальными**. Это все те системы отсчёта и соответствующие им наборы систем координат, которые возникают при применении описанных нами процедур измерений к произвольно движущимся друг относительно друга материальным точкам (точечным массивным частицам) в их общей малой окрестности (локальные). Если в достаточно большой области скорости относительного движения таких частиц (и соответствующих систем отсчёта как результат) ещё и постоянны при изменении времён, определённых для каждой из частиц, то можно говорить о **глобально инерциальной** “группе” систем отсчёта в этой области. Для определения локальной инерциальности некоторой группы систем отсчёта достаточно того, чтобы соответствующие им системы координат можно было связать преобразованием из группы Лоренца. Для глобально инерциальной группы систем отсчёта параметры, определяющие повороты в такой группе Лоренца будут постоянными во всей области.

Расширение “группы” рассматриваемых систем отсчёта от “группы” систем покоя данной материальной точки до “группы” всех локально инерциальных систем заставляет нас в ряде случаев различать обозначения для времени. Сохраним за временем в произвольной локально инерциальной системе отсчёта символ t . А когда нам требуется подчеркнуть, что речь идёт о времени в

системе покоя, причём таком времени, для которого масса покоя является постоянной в **этом времени**, то будем обозначать его через τ .

Не трудно видеть, что таким образом в наше описание с самого начала оказываются включены все понятия и постулаты Специальной Теории Относительности. Соответственно, и постоянная c , коэффициент пересчёта времени, измеренного своей единицей, в “пространственное” расстояние в соответствии с принятыми постулатами, должна быть нами интерпретирована как скорость света. На данный момент такая интерпретация тоже постулат, принятый без доказательства. Доказательство его может появиться только тогда, когда в нашем общем описании появится описание электромагнитных явлений и конкретно электромагнитных волн. Тогда нам будет необходимо указать явно на то, что скорость электромагнитных волн (определённый диапазон частот которых мы и связываем с таким явлением как свет) равна в точности введённой нами постоянной c . И что калибровка метрического тензора выбрана нами так, чтобы электромагнитные волны описывались вполне определённым, стандартизованным, удобным для нас способом. Что все наши постулаты (соглашения), уже принятые, и те которые мы примем позже, действительно согласованы между собой. Это и будет сделано в соответствующем месте этого тома, в §2.12.

Также из выше сказанного можно извлечь и смысл введённой нами классической метрики. Она становится той структурой, которая фактически фиксирует “группы” локально инерциальных систем отсчёта и соответствующих им систем координат как образы, распространённые на всю область пространства-времени с базовой линии времени. Её конкретное представление той или иной матрицей становится **образом соотношений между масштабами, формирующими полный репер**, выбранный нами для описания мира с опорой на некоторую базовую массивную точечную частицу. Образом системы отсчёта, связанной с этой частицей. Если матрица диагональна и имеет единицы на этой диагонали, то координаты в эту область

пространства-времени внесены согласно описанным выше **стандартным** соглашениям. И так для каждой базовой частицы отсчёта, входящей в группу локально инерциальных. Если матрица (относительного) тензора классической метрики отличается от единичной, значит соглашения, объединяющие временной и пространственные масштабы в единый репер, были каким-то образом модифицированы. Либо нами, из-за не канонического выбора масштабов, либо условиями, имеющимися в данной области мира. Если компоненты матрицы классической метрики меняются от точки к точке в области, то меняется либо наш выбор локального репера, либо сам континуум требует этих изменений для согласования локальных реперов. А в общем случае может быть и то и другое вместе. И для того, чтобы сравнивать результаты измерений в разных точках по возможности **стандартизованным** образом, мы обязаны учитывать имеющиеся изменения в принятых нами стандартах. Это можно делать автоматически, закладывая изменения в метрике в наши соотношения изначально.⁵ Поэтому я называл ранее введённую здесь классическую метрику образом системы отсчёта.

Именно системы отсчёта, поскольку нигде и никогда мы не имеем полноценную систему координат, описывающую каждую точку континуума. Всегда это какое-то дискретное приближение к идеалу. Даже в простейшем, привычном нам случае координатной сетки на листе бумаги это всегда дискретная сетка (например, миллиметровка). Аппроксимация непрерывности в более или менее хорошем приближении некоторым телом отсчёта (лист бумаги с сеткой на нём). И мы точно знаем, что при уменьшении рассматриваемых размеров эта аппроксимация становится совсем плохой уже на вполне нами достижимых шагах процесса деления расстояний. Сначала придётся принимать во внимание то, что линии сетки имеют толщину. Потом то, что бумага состоит из волокон. Потом то, что всё, а не только бумага

⁵Это делается, как мы увидим далее, нашим соглашением опираться в нашем описании на метрические дифференциалы и производные, вместо полноценных абсолютных дифференциалов и производных. Надевая, таким образом, особым смыслом метрическую составляющую связности.

состоит из молекул, атомов, а потом и элементарных частиц...

Да и в обыденной жизни описание окружающего нас пространства мы создаём с помощью зрения. Причём не одновременно всего, что есть вокруг, а восстанавливая каким-то образом из “увиденного”, набора зарегистрированного нашими глазами света. А в нынешней технике всё и вовсе очевидно — радиолокация, системы позиционирования. Все они так или иначе создают координатное описание мира уже весьма от нас удалённого, не охватываемого нашими чувствами. И базируются они на дискретных наборах зарегистрированных сигналов и принудительно приписанных им свойствах, которые мы формализовали в соотношениях (2.3, 2.4). Поэтому классическая метрика в нашем опыте такого рода присутствует всегда, и именно как образ наших систем отсчёта.

Будем считать, что нам удалось приписать **каждой** точке некоторой полноценной, четырёхмерной области пространства-времени определённый в её бесконечно малой окрестности (локально) набор инерциальных систем отсчёта, а вместе с ним и соответствующий набор систем координат. Где-то им соответствуют базисные тела отсчёта, образы реально существующих материальных точек. Для других точек континуума мы просто предполагаем такую возможность. Так или иначе, во всей этой области, но пока явно только в каждой её точке, имеются описывающие её координаты, причём весьма специального вида. Это локально ортонормированные координаты. Вместе с ними, в этих локальных координатах определена и классическая метрика, позволяющая рассматривать весь базис масштабов согласованно.

Чтобы наша конструкция не разрушилась при смене точки зрения на описание этой части мира, при другом выборе процедур измерения, его описывающих, мы на этот выбор наложили ограничение. При замене масштабов репера мы **сознательно** исключаем на первом этапе все те возможности, которые могут нарушить то описание мира, которое нам хочется иметь. Исключены все масштабирования, т.е. изменения величин масштабов.

Вместе или по отдельности — пока не важно. Все. Допустимы только повороты всего репера как целого или для части репера. Стандартные повороты только в пространственной части репера, и стандартные повороты в двумерных поверхностях “время — какая-либо пространственная координата”. Т.е. преобразования Лоренца. Все эти повороты мы будем для краткости называть локально лоренцевыми поворотами. Ну и изменения начала отсчёта тоже разрешены.

Как меняется каждый такой репер при смещении от точки к точке? Каковы **в этих координатах** коэффициенты аффинной связности, описывающие связь между локальными системами координат (их масштабами)? То, что делает системы координат не только локальными, а цельными описаниями всей области? На них априори налагается лишь одно условие — вся эта совокупность локальных систем координат (и соответствующих систем отсчёта) должна быть полностью самосогласована. Согласована аффинной связностью.

Таким образом, чтобы сделать наше описание полноценным, к уже имеющейся части описания (“многообразие”) **мы сами можем попытаться добавить некоторые предположения о виде объекта аффинной связности как набора конкретных функций точки**. Но только так, чтобы вся конструкция не разрушилась. Чтобы определённые в ней **геометрические объекты** при непрерывном, гладком смещении из точки в точку также непрерывно переходили в те, которые **уже определены нами для соседней точки**. Реперы масштабов в реперы масштабов, и всё остальное тоже. А что у нас на данном этапе построения описания “остальное”? Только классическая метрика и те объекты, которые можно получить с её помощью из векторов. Векторов репера или градиента действия.

Наличие классической метрики в нашем описании позволяет рассматривать несколько очень важных для нас видов **размерных** относительных скаляров. Относительных потому, что они являются одинаковыми, инвариантными только в рамках группы локально инерциальных систем отсчёта и соответствующих

им систем координат. При выходе за пределы этой группы они перестают быть полноценными инвариантами.

Начнём с квадратичного по вектору бесконечно малого смещения скаляра. В каждой точке области вектор бесконечно малого смещения можно свернуть с тензором⁶ классической метрики. Как следует интерпретировать результат? Такая свёртка ставит контравариантному вектору (в данном случае, бесконечно малого смещения, но операция определена точно также для произвольного контравариантного вектора) во взаимно однозначное соответствие некоторый ковариантный вектор:

$$dx_j = g_{ij} dx^i. \quad (2.6)$$

Почему можно говорить о взаимно однозначном соответствии? Потому что классическая метрика это объект, определённый нами в окрестности каждой точки, локально, полностью однозначно, его матрица диагональна и имеет на диагонали единицы. Мы **выбрали** из всего многообразия возможных способов описания разными масштабами именно такие реперы, именно такие системы отсчёта, позволяющие вводить такие реперы и такую классическую метрику. Регулярный во всех точках области (относительный) тензор. Образ соглашения о допустимых свойствах системы отсчёта.

Вполне очевидно, что с помощью свёртки с нужным количеством экземпляров классической метрики, в ковариантной или контравариантной форме, оставляя один из индексов метрики свободным, мы можем ставить таким образом во взаимно однозначное соответствие тензорам любого строения соответствующие тензоры с индексами “противоположного смысла”, т.е. контравариантные индексы заменять на ковариантные, и наоборот. Эту операцию обычно называют “поднятием” или “опусканием”

⁶Я буду опускать прилагательное “относительный” там, где его отсутствие не должно приводить к неверной трактовке результатов. Т.е. в тех случаях, когда рассмотрение проводится при молчаливом (точнее акцентированном явно, но ранее) предположении, что все допустимые преобразования координат **позволяют** рассматривать классическую метрику как обычный тензор.

индекса, имея ввиду, что во всех наших записях соответствующие индексы ставятся или вверху, или внизу рядом с “коренным” символом, обозначающим тот или иной геометрический объект. Какой из индексов оставлять свободным совсем не важно, т.к. **по нашему определению** тензор классической метрики **симметричен**, $g_{ij} = g_{ji}$, $g^{ij} = g^{ji}$. И другим **быть не может**.

Это свойство метрики (не только классической, но и настоящей) позволяет связать с каждым вектором, контравариантным p^i или ковариантным p_j , не важно, некоторый инвариант, квадрат его величины, $p^2 = p_i p^i = g_{ij} p^i p^j = g^{ij} p_i p_j$. Используя этот скаляр, мы получаем возможность инвариантно определить **норму** $p = \sqrt{p^2}$ для произвольного вектора. И сравнивать разные векторы по этой норме, и характеризовать их принадлежность к той или иной группе, объединённой общностью свойств этой нормы. При наличии “правильной” метрики такая классификация является абсолютной характеристикой для рассматриваемого пространства (математического). Все получаемые так скаляры являются инвариантами относительно любых преобразований из допустимых для данного математического пространства. В нашем случае классической метрики, внесённой в строящийся образ пространства-времени, все эти характеристики, на ней базирующиеся, являются относительными, допустимыми только при уже заданных ограничениях на выбор описания мира. При этом, мы не должны забывать, что в какой-то момент наше **текущее** описание вероятно потребует расширения допустимых преобразований, чтобы годиться для **более точного** описания мира.

Формируя эти относительные инварианты для вектора бесконечно малого смещения в каждой точке нашей области мы получаем возможность классифицировать разные **направления** из этой точки. Сделаем это. Введём **относительный** скаляр

$$dl^2 = -g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.7)$$

Знак минус в этой формуле, в этом **определении** мы добавили из соображений удобства, которые можно будет увидеть ниже.

Чтобы понять, как именно возникает (оформляется, описывается) разница в направлениях, перепишем (2.7), выделив в этом скаляре чисто пространственную часть с помощью соответствующей части метрического тензора, а составляющую по четвёртой координате запишем в явном виде через время:

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - \dot{\mathbf{i}}^2 c^2 dt^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + c^2 dt^2. \quad (2.8)$$

Здесь и далее греческие буквы, когда они используются в качестве индексов, пробегают значения $\{1, 2, 3\}$.

Т.к. в исходном стандартном определении классической метрики $g_{\alpha\alpha} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, то пространственные компоненты смещения (выраженные действительными числами) входят в это выражение как квадраты своих значений, а значит вся сумма не отрицательна. С учётом нашего выбора знака минус перед всей конструкцией, *вклад пространственной части смещения в этот относительный скаляр будет всегда не положительным*. И нулём только тогда, когда смещение осуществляется строго в направлении отсчёта времени. Когда пространственного смещения просто нет. Вклад же временной части смещения, если она есть, **всегда положителен**⁷. Это приводит к классификации **направлений** произвольного смещения из точки тремя возможными видами, в соответствии с балансом в нашем скаляре вкладов пространственной и временной частей бесконечно малого смещения из данной точки.

Первый случай, когда $dl^2 > 0$. Временное смещение имеется и превалирует. Чтобы понять, о чём это говорит, обратим внимание на то, что этот инвариант в системе покоя какой-либо базовой материальной точки всегда положителен и пропорционален собственному времени этой частицы. А собственное время материальной точки имеет для нас особое значение, оно позволяет связать с данной траекторией нашу самую главную опору в описании мира — значение действия как непрерывный образ

⁷Именно для этого мы использовали знак минус в нашем определении квадрата интервала. Наше право взять это выражение с любым знаком очевидно — это наше определение новой величины, и не более того.

дискретного числа событий на траектории массивной частицы (2.1).

Назовём бесконечно малым интервалом между двумя бесконечно близкими точками мира **положительный** корень квадратный из нашего относительного инварианта

$$dl = \sqrt{-g_{ij}dx^i dx^j}. \quad (2.9)$$

Это тоже относительный скаляр, и тоже величина имеющая размерность, размерность расстояния⁸. В системе покоя базовой материальной точки интервал при смещении вдоль её траектории пропорционален (с коэффициентом c) собственному времени τ основы системы отсчёта. Вдоль траектории бесконечно малый интервал можно проинтегрировать. Это тоже будет относительный инвариант, связанный, естественно, уже с линией существования базы системы отсчёта. Между двумя **относительными инвариантами** и одним безусловно абсолютным (действием) имеется соотношение:

$$s_0 = m_0 c^2 \cdot \tau = m_0 c \, l. \quad (2.10)$$

Нам удобнее работать с локализованными величинами, поэтому будем использовать аналогичное соотношение для дифференциалов

$$ds_0 = m_0 c^2 \, d\tau = m_0 c \, dl. \quad (2.11)$$

Из этих соотношений видно, что собственное время, т.е. время в системе покоя **любой массивной частицы** тоже является инвариантом ограниченной группы преобразований. Мы об этом уже говорили раньше, в начале этого параграфа, как об особом смысле измерения времени в системе покоя. Приведённые соотношения формализуют это утверждение, позволяя заменить

⁸Хочу ещё раз напомнить, что этот скаляр и метрический тензор взаимосвязаны. А значит изменение масштаба пространственного расстояния и калибровка, стандартизация классической метрики это две стороны одного и того же процесса выбора описания мира

дифференциал собственного времени частицы, там где нам будет удобно, на введённый только что бесконечно малый интервал. Позволяя сразу опираться не на связь действия и геометрической характеристики некоторой линии в частной форме, привязанной к одной, специальной системе координат, а на форму, годную для **любой** из допустимых систем координат. Да, эта связь ещё не полностью ковариантная, т.к. заведомо справедлива только в выделенной нами, ограниченной преобразованиями Лоренца “группе” систем координат. Но эта группа уже гораздо шире, чем “группа”, соответствующая только системе покоя. Она включает в себя и все движущиеся друг относительно друга системы отсчёта. Причём в локализованной форме устраняется одно из ограничений на скорость движения этих систем друг относительно друга. Перестает быть необходимым постоянство этой скорости во всей области. Следовательно, локальное соотношение $ds_0 = m_0 c dl$ можно использовать без проблем в значительном числе интересных нам ситуаций. По сути дела, практически во всех таких ситуациях. Конечно, при этом нам не следует забывать о правильном отслеживании размерностей всех входящих в это соотношение величин. И о том, что соотношение это справедливо только до тех пор, пока dl можно рассматривать как инвариант допустимых преобразований координат.

Обратите внимание, что в соотношениях (2.10) и (2.11) вместо собственного времени τ нельзя употреблять текущее время t любой, произвольно движущейся системы отсчёта из набора локально инерциальных систем. Полезно установить, как будет выглядеть связь бесконечно малого интервала и дифференциала текущего времени в системе, движущейся относительно данной базовой массивной частицы (для которой мы определили собственное время τ) со скоростью

$$\pm v, \text{ где } v^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta / dt^2.$$

Здесь v обычная скорость, описывающая мгновенное для данной точки пространства-времени изменение со временем пространственных координат частицы, собственное время τ которой мы

фиксировали, взяв за базу всей группы локально инерциальных систем отсчёта, относительно некоторой другой системы отсчёта, в которой мы измеряем пространственные координаты нашей материальной точки, и её текущее время t . Поскольку dl является инвариантом наших допустимых преобразований, включающих и переход в таким образом движущиеся системы отсчёта, то имеют место **инвариантные** соотношения, справедливые для любой обычной скорости $v < c$:

$$dl = c \cdot dt \sqrt{1 - g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta / (c \cdot dt)^2} = c \cdot dt \sqrt{1 - v^2/c^2} = c \cdot d\tau. \quad (2.12)$$

Вернёмся, однако, к рассмотрению классификации направлений в произвольной точке нашей области. Один вид направлений мы связали с условием $dl^2 > 0$. Если в этой точке есть базовая массивная частица, то это направление времени на её траектории. А если нет, а условие выполняется? Тогда мы будем называть такие направления **времени подобными**, предполагая при этом, что *если бы в этой точке оказалась бы массивная частица, то её траектория обязательно лежала бы в одном из таких направлений*. Также ясно, что и в точке, где есть базовая частица отсчёта, направлений, в которых квадрат бесконечно малого интервала больше нуля, может быть заведомо больше, чем единственное направление вдоль реальной траектории. Мы будем интерпретировать все эти направления как **допустимые** направления траекторий массивных частиц, движущихся с какой-либо скоростью относительно нашей базовой. В полном соответствии с тем, что мы оснастили окрестность точки не единственной группой систем покоя одной частицы, а группой локально инерциальных систем отсчёта, принимающих во внимание возможное наличие других массивных частиц, движущихся относительно этой. Все времени подобные направления соответствуют таким возможным системам отсчёта.

Второй вид направлений из точки соответствует условию $dl^2 = 0$. Такие направления называют **изотропными**. Особенность этих направлений для нас состоит в том, что это они задают один из краеугольных камней в нашем способе описания

мира. Именно линии, в каждой точке которых в направлении продолжения самой линии $dl^2 = 0$, являются для нас **возможными** линиями для описания элементарной, простейшей связи между двумя событиями, принадлежащими разным массивным частицам. Можно даже сказать, что интервал, как способ описания разницы между двумя разными точками в этом случае вырождается в нуль не только локально, но и глобально, для всей такой линии. Точки разные, и даже не близкие, а интервал между ними нулевой, отсутствует. Никакая массивная частица, т.е. имеющая на своей траектории хотя бы одно промежуточное между её концами событие, не может иметь такую линию существования. Изотропные линии описывают связь между событиями, как и траектории массивных частиц. Но это такая связь между событиями, в которой промежуточные события отсутствуют совсем. Т.е., если такие линии мы связываем с частицами, то частицы эти не имеют ни системы покоя, ни массы покоя. С помощью наличия в описании таких интервалов проложен мостик от принципиально нелокального условия (2.2), положенного в основу наших процедур измерений, к локализованному описанию мира пространством аффинной связности. Причём для любых классических приближений, которые опираются на этот способ введения масштабов для измерения пространства. То, что в классических приближениях все точки на траекториях массивных частиц полагаются событиями, предоставляет возможность иметь нужные связи для всей непрерывной траектории базовой частицы. А значит координаты возможны не только как “сетка” отдельных измерений, ассоциированных с дискретным набором событий, а как непрерывный “моллюск отсчёта”, заполняющий (как идея) всю описываемую область пространства-времени.

Третий, и последний вид направлений определяется условием $dl^2 < 0$. Такие направления называют **пространственно подобными**. Их отличие от остальных направлений состоит в том, что в этих направлениях в нашем описании мира траектории массивных и не имеющих массы покоя частиц **не только не существуют, но и невозможно допустить их существование**

в принципе.

Классификация направлений из данной точки является важной составляющей нашего описания. Но не будем забывать, что сама классическая метрика нам требуется в первую очередь для того, чтобы распространить применимость наших процедур измерений с линий базовых массивных частиц отсчёта на хотя бы близлежащую, но полноценную четырёхмерную область пространства-времени. Поэтому, в дальнейшем рассмотрении не малую роль будет играть связь действия через введённый нами интервал именно с тензором классической метрики. Запишем эту связь в явном виде:

$$ds_0 = m_0 c^2 d\tau = m_0 c dl = m_0 c \sqrt{-g_{ij} dx^i dx^j}. \quad (2.13)$$

Также очень важными для нас являются и различные соотношения для удельного действия, его градиента, при формулировке которых требуется опираться на классическую метрику. Базовые соотношения при этом возникают из возможности поставить при наличии классической метрики во взаимно однозначное соответствие ковариантному вектору градиента действия некоторый контравариантный вектор:

$$p^i = \mathbf{i} g^{ij} \partial_j s_0. \quad (2.14)$$

При этом возникает и связанный с классической метрикой относительный инвариант, квадрат нормы градиента действия:

$$\begin{aligned} p^2 &= p^i p_i = p^i g_{ik} p^k = \mathbf{i}^2 g^{il} \partial_l s_0 g_{ik} g^{kj} \partial_j s_0 = \\ &= -g^{il} \delta_i^j \partial_l s_0 \partial_j s_0 = -g^{jl} \partial_l s_0 \partial_j s_0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Вычислим значение этого инварианта в системе покоя материальной точки:

$$p^2 = -g^{jl} \partial_l s_0 \partial_j s_0 = -(\partial_4 s_0)^2 = -\frac{m_0^2 c^4}{\mathbf{i}^2 c^2} (\partial_t t)^2 = m_0^2 c^2. \quad (2.16)$$

Обратите внимание на то, что с помощью записанных выше соотношений мы приняли несколько **определений**.

- Вместо градиента действия $\partial_j s_0$ мы ввели модифицированный градиент действия $p_j = \mathbf{i} \partial_j s_0$. Зачем мы это сделали? Достаточно вычислить новый вектор в системе покоя материальной точки, чтобы увидеть причину:
 $p_4 = \mathbf{i} \partial_4 s_0 = \mathbf{i} \frac{\partial(m_0 c^2 t)}{\partial(\mathbf{i} c t)} = m_0 c$, величина действительная и сугубо положительная для всякой массивной частицы. И явным образом пропорциональная скорости появления событий на её траектории. Поэтому именно этот вектор нам удобно называть вектором энергии-импульса. А в случае простого градиента нам придётся говорить о мнимых величинах для энергии в системе покоя частицы, из-за того, что в качестве четвёртой координаты используется мнимое число, пропорциональное реальному времени.
- Вспомним теперь тривиальное соотношение $\partial_i s_0 \frac{dx^i}{ds_0} = 1$. Подставим в него градиент действия, выразив его через классическую метрику и контравариантную пару нашего нового ковариантного вектора энергии-импульса: $\partial_i s_0 = p_i / \mathbf{i} = g_{ik} p^k / \mathbf{i}$. Получим соотношение следующего вида:

$$g_{ik} p^k \frac{dx^i}{\mathbf{i} ds_0} = 1.$$

Это, очевидно, относительный инвариант, след на классической метрике тензора, равного произведению двух контравариантных векторов. Здесь записан не просто локальный относительный инвариант. Это единица, число, не зависящее не только от выбора конкретной локальной системы отсчёта (любой из соответствующих систем координат). Это число не зависит ни от момента времени в истории частицы, ни от положения этой частицы в пространстве. Для любой массивной частицы это тождественное соотношение. Сравним это соотношение с (2.15, 2.16), которые я перепису в форме

$$\frac{1}{p^2} g_{ik} p^k p^i = \frac{1}{m_0^2 c^2} g_{ik} p^k p^i = 1.$$

Это условие тоже записывает тождественное соотношение на всей траектории любой массивной частицы при наличии классической метрики. Поскольку тензор классической метрики всюду регулярен, то можно заключить, что всюду на траекториях массивных частиц при введённой классической метрике имеет место соотношение

$$\frac{1}{m_0^2 c^2} p^i = \frac{dx^i}{\mathbf{i} ds_0}, \quad (2.17)$$

или, в более привычной для Специальной Теории Относительности форме⁹

$$p^i = m_0^2 c^2 \frac{dx^i}{\mathbf{i} ds_0} = -\mathbf{i} m_0 c \frac{dx^i}{dl}. \quad (2.18)$$

Что можно сказать об этом соотношении? Здесь это тривиальное следствие введения классической метрики, позволяющее использовать в качестве вектора энергии-импульса наряду с естественным для нас градиентом действия ещё и контравариантный вектор. Причём его определение в точности соответствует определению вектора энергии-импульса, принятому **как данность, без какой-либо связи с более фундаментальными понятиями** в исторически сложившейся классической¹⁰ физике. Энергия-импульс исторически определяется как произведение некоторой

⁹Отличие имеется только в том, что здесь мы используем мнимые числа для превращения времени в координату. Соответственно, вектор энергии-импульса (в его разных формах — ковариантной и контравариантной) определён так, чтобы энергия покоя (масса покоя) была действительным положительным числом, чтобы быть связанной с числом событий на траектории.

Обратите внимание, что получив это соотношение, по сути дела говорящее также о наличии пропорциональности, причём с постоянным коэффициентом, происходящим напрямую из массы покоя, между касательным к траектории частицы вектором и образом масштаба времени (в системе покоя, конечно), мы получили и обратное подтверждение самосогласованности наших исходных постулатов.

¹⁰Замечание для читателя, знакомого с квантовой механикой. Вас не удивляло то, что с вектором энергии-импульса там всегда связывают оператор производных по координатам? Из классических представлений это не следует

постоянной величины, массы, на скорость. В исходной, не релятивистской физике вводились две величины, пропорциональные массе — трёхмерный вектор импульса и энергия, квадратичная по скорости движения массивной частицы. В СТО, релятивистской физике, их объединили в единый четырёхмерный вектор, по формуле, полностью аналогичной нашей формуле (2.18). Но и в СТО это действие с точки зрения объединения массы и вектора четырёхмерной скорости, точнее касательного к траектории частицы вектора в **единый физический** объект тоже осталось без какого-либо обоснования. Зачем умножать вектор на какую-то там “массу”? Ведь остался также неясным и физический смысл самой массы как параметра теории. Нужен такой параметр — и всё. Более подробно связи нашего вектора энергии-импульса с классическими представлениями, релятивистскими и нерелятивистскими, будут обсуждаться в следующей главе.

2.3 Связности, согласованные с классической метрикой

В предыдущем параграфе мы довольно подробно обсудили основные локализованные следствия существования в нашем описании мира (введения в него) такой структуры, как классическая метрика. Но мы ведь помним, что основной нашей целью является выяснение тех ограничений на аффинную связность нашего изображения мира, пространства-времени, которые возникают из-за того, что все процедуры измерения для создания этого образа мы обязаны строить только на явлениях и фактах, имеющих место в этом мире. Соответственно, вводя классиче-

вовсе. Хотя в нашем описании такой переход вполне очевиден. Исторически же этот перескок в понятиях стал возможен потому, что квантовая механика при её создании опиралась не на базовые классические представления, а на сформировавшийся в классической теоретической физике формализм Лагранжа, с его обобщёнными импульсами, рассматриваемыми именно как производные от лагранжиана. Ну и на укоренившееся в массах представление о том, что между контравариантной формой вектора и его ковариантной формой нет никакой разницы.

скую метрику мы должны позаботиться о том, чтобы описать те связности, которые могут быть согласованы с её существованием. Выяснить, к каким ограничениям на связность ведёт такой способ описания мира.

Но прежде чем сделать несколько первых шагов на этом пути, я хочу снова напомнить основные причины, заставившие нас использовать в нашем описании классическую метрику. Имеется две главных таких причины.

1. “Классичность” приближений, которые рассматриваются в этом томе, приводит к **разрыву естественной** связи между временем, измеренным вдоль траектории материальной точки и действием на ней, как непрерывным образом числа событий на отрезке такой траектории. Настоящий скаляр, действие, оказывается на первый взгляд никак не связанным с описанием линии существования массивной частицы. На его место помещается “относительный” скаляр, интервал.

Именно **интервал вдоль траектории**, оформленный как априорное собственное время для каждой массивной частицы, которую можно принять за базу процедуры измерения, превращённый с помощью введения классической метрики в инвариант для всей “группы” получаемых таким образом описаний, становится скалярным (относительным) параметром для траекторий частиц. Распространение метрики на окружающую частицы область мира делает его главным скаляром при описании произвольных непрерывных линий в этой области.

Связь между настоящим скаляром и относительным интервалом восстанавливается искусственно, введением “внешней” характеристики любой материальной точки — её массы покоя, или жёстко связанной с этой величиной энергии покоя. При ограничениях описания, в которых интервал рассматривается как скаляр, масса покоя тоже является скаляром. Внешним, внесённым в описание искусственно и

поэтому произвольным. Как только мы вспомним действительное происхождение массы покоя, как величины, имеющей вполне определённую размерность и ясный геометрический смысл, связанные с её происхождением из реальных процедур измерения, возможных в мире, так сразу же нам придётся модифицировать и работу с интервалом (тоже размерной величиной), а значит и со всей классической метрикой.

2. Ещё одна причина обязана своим существованием только нашему желанию упростить создаваемое описание по мере возможности. На **вводимые нами самими** масштабы для описания трёхмерного пространства вокруг базисных материальных точек мы накладываем ограничения простоты, полагаем их сравнимыми друг с другом, равными друг другу по величине при учёте такого (разрешённого априори) сравнения и ортогональными друг другу по определению. Равными и ортогональными не только в пространственной части описания, но и по отношению к масштабу времени. И равенство и ортогональность определяются именно с помощью классической метрики. Для установления равенства между временным и пространственными масштабами, традиционно измеряемыми разными единицами, вводится специальная постоянная c , коэффициент пересчёта единиц времени в единицы пространства, расстояния. При этом явным образом мы отказываемся принимать пока во внимание все возможные процедуры измерения, нарушающие эти наши соглашения. Создающие нам сложности в построенных для области континуума координатах. Пока мир нас не заставит сделать это.

Эти две причины, и их неравноценное влияние на допустимые модификации описания мира нам нужно постоянно держать в поле зрения. Отмечая моменты, когда ограничения, получаемые для возможной связности пространства-времени, **могут быть** сняты в пользу более широкого описания просто из-за того, что

они связаны со второй причиной, или, наоборот, **должны быть** сняты при принятии во внимание следствий первой причины.

Приступим теперь к выяснению, какие связности могут быть согласованы с существованием всюду в области мира введённой нами **регулярной** классической метрики.

Мы отметили, что классическая метрика настоящим тензором не является. Но используем её именно как тензор, апеллируя к нашему ограничению допустимых преобразований только группой локально лоренцевых поворотов, для которой классическая метрика преобразуется в точности как тензор. Использовать метрику как тензор и для более широких случаев нам было бы тоже удобно. Понятно, что наша классическая метрика, точнее способы её употребления в описании, при этом должны быть как-то модифицированы. Как именно — мы должны уяснить. Делать это легче, если сначала как раз допустить полноценный тензорный характер нашей стандартной служебной структуры. Да и потом будет легче распространить употребление метрики за пределы искусственно установленных нами ограничений. Поэтому, сначала мы будем пытаться установить соотношения между связностью и метрикой, считая последнюю настоящим тензором. А потом посмотрим, к чему ведут наши ограничения в допустимых преобразованиях координат.

Что значит согласовать связность и метрический тензор? Любая связность порождает определённые тензорные поля всюду, где имеется. Эти **естественные** тензорные поля **согласованы с любой связностью в силу своего происхождения**. А какие-либо дополнительные тензорные поля, как они могут быть согласованы со связностью?

Смысл связности, её функция — описание изменчивости масштабов репера от точки к точке. Всякий тензор в точке, всякая тензорная плотность в точке имеет в качестве своих компонент не просто числа, непонятно откуда взявшиеся, а числа как результаты измерения чего-то этими самыми масштабами. Поэтому согласованность означает очень простую вещь. Те свойства, которые определяют смысл введённых дополнительно тензор-

ных структур, должны оставаться неизменными для этих структур при смещении репера от точки к точке. Это условие записано нами как равенство нулю абсолютного дифференциала соответствующего тензора или его плотности ([1], §2.12). Выполнение именно этого условия положено нами в основу понятия о глобализованной системе координат и определённой в ней аффинной связности. Равенство нулю абсолютных дифференциалов векторов локальных реперов при произвольном бесконечно малом смещении из точки в точку.

В случае метрического тензора и производных от него структур и свойств других тензоров согласованность будет достигнута автоматически, если абсолютный дифференциал метрики будет равен нулю для любой точки и во всех направлениях из этих точек. Иначе говоря, если метрический тензор является всюду **ковариантно постоянным**. Это возможно только если не просто ковариантный (абсолютный) дифференциал обращается в нуль при смещении из точки в каком-то направлении, а если нулю равны все ковариантные производные метрического тензора в произвольной точке, исключая этим из рассмотрения зависимость от направления смещения.

Чтобы уяснить каким образом возникает связь между метрическим тензором и согласованной с ним связностью используем метод, приведённый в [5], начав, как и там, с более общего случая.

Предположим, что в пространстве аффинной связности **просто имеется** некоторый тензор b_{ij} , обладающий следующими свойствами, необходимыми для классической метрики. Это тензор симметричный и регулярный всюду. Условия эти записываются как соотношения

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad \det(b_{ij}) \neq 0.$$

Как я уже отмечал в §2.1(1.14), вместе с ковариантным таким тензором существует и дуальный ему контравариантный, очевидно тоже симметричный

$$b^{ji} = b^{ij}, \quad b^{ik}b_{jk} = \delta_j^i.$$

Будем считать, что ковариантные производные обоих этих тензоров нам известны¹¹. Тогда через эти ковариантные производные и сами тензоры в любой точке пространства аффинной связности можно вычислить имеющуюся там связность:

$$\Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i - \frac{1}{2}b^{il}(\nabla_j b_{lk} + \nabla_k b_{lj} - \nabla_l b_{jk}). \quad (2.19)$$

Не уточняя пока вид $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$, отметим, что всё, что кроме этого объекта стоит справа, явным образом является тензором. А это означает, с одной стороны, что $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ преобразуется при замене координат как аффинная связность, а значит может рассматриваться как объект связности некоторого пространства. И, с другой стороны, равенство нулю тензорного добавка в (2.19) является вполне инвариантным условием. Связность $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ соответствует случаю **тождественного** исчезновения всех ковариантных производных у нашего пробного симметричного тензора. Т.е. именно эта связность и является искомой нами связностью, согласованной с наличием в нашем описании мира всюду ковариантно постоянной метрики. Поэтому я сразу запишу выражение для $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ через метрический тензор и его обычные производные в произвольной системе координат. Это выражение называют часто **символами Кристоффеля**:

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}). \quad (2.20)$$

В силу важности этого вида связности для нашего описания мира и генетической связи такой её формы именно с наличием в описании метрики, я буду далее называть её ещё и **метрической** связностью¹².

¹¹Достаточно иметь производные для любого из них, для второго они определяются автоматически.

¹²Я не провожу специального различия в обозначениях классической метрики и метрики, как полноценного тензора, т.к. везде при создании описания мира в этой книге понятие метрики будет использоваться именно как относительного тензора, классической метрики. Апелляция к свойствам полноценного тензора используется только для поддержки получаемых выводов — если верно для полноценного тензора, то верно и для относительного, при надлежащем ограничении группы допустимых преобразований.

Обсудим теперь, какими свойствами обладает метрическая связность. Можно легко видеть, что она симметричная по нижним индексам, $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{kj}^i$. Из (2.20) можно также уяснить, что метрическая связность согласована не с единственным метрическим тензором, а с любым таким тензором из группы, определяемой некоторым экземпляром и произвольным, не обращающимся в нуль параметром k . Два тензора, g_{ij} и $k \cdot g_{ij}$ дают одну и ту же метрическую связность, т.к. при увеличении всех компонент ковариантного тензора g_{ij} в k раз, компоненты его контравариантной формы уменьшаются в это же число раз. Это свойство метрической связности может нам помочь в расширении группы допустимых преобразований, обуславливающих возможность введения классической метрики в наше описание мира. При ограничениях допустимых преобразований координат только локально лоренцевыми поворотами можно сделать классическую метрику чуть более “тензорной”, используя параметр k как **размерный** множитель, отслеживающий **глобальное** изменение общей величины масштабов в локальных реперах. В таком случае, вместо классической метрики (с безразмерными компонентами) в тех или иных свёртках с настоящими тензорами мы можем использовать классическую метрику с этим коэффициентом. Этим мы расширим группу допустимых преобразований координат, включая в неё ещё и единое глобальное масштабирование. Размерность такого постоянного коэффициента, становящегося относительным инвариантом в нашем описании (в некотором роде универсальной постоянной, отслеживающей глобальный выбор величины базового масштаба времени) будет $[t]^{-2}$, или, при предпочтительности использования в качестве базовой единицы расстояния, $[ct]^{-2}$. Отмечу, что тот пример с заменой сантиметров на километры, который я привёл в качестве указания на неполноценный тензорный характер классической метрики, можно включить в рассмотрение с помощью указанного выше метода. Ведь изменение величины всех векторов репера в этом случае можно также рассматривать и как применение единого коэффициента к метрике. И, что характерно, то поле гео-

метрической величины, которое для нас важнейшее, поле объекта связности при таких манипуляциях с метрикой, как мы сейчас видим, не изменяется.

Вспомним также, что вместе со всяким метрическим тензором существует и Δ -плотность веса $+1$ $\mathbf{g} = \sqrt{\det \mathbf{g}_{ij}}$. Т.к. метрический тензор всюду регулярен, то эта величина не может обращаться в нуль нигде в области его определения. Наличие такого объекта позволяет инвариантным образом определить в соответствующем пространстве аффинной связности интегрирование любых скалярных функций, взятых с этим весовым коэффициентом по выделенному 4-объёму области. Поскольку метрический тензор относительно согласованной с ним связности является ковариантно постоянным, то и $\tilde{\nabla}_j \mathbf{g} = 0$ всюду. Соответственно, т.к. $\tilde{\nabla}_j \mathbf{g} = \partial_j \mathbf{g} - \tilde{\Gamma}_j \mathbf{g} = 0$, то свёрнутая метрическая связность может быть записана как обычная производная от логарифма этой метрической плотности:

$$\tilde{\Gamma}_j = \tilde{\Gamma}_{ji}^i = \partial_j \ln \mathbf{g}. \quad (2.21)$$

Это означает, что указанная свёртка является **градиентом** некоторой глобальной функции. Функция эта является не скаляром, а логарифмом скалярной Δ -плотности, градиент которой преобразуется не как ковариантный вектор, а получает в качестве добавка (со знаком минус) градиент логарифма определителя преобразования координат. Имея ввиду эту связь коэффициентов связности с некоторой глобально определённой функцией, в дальнейшем мы будем говорить о связностях, свёртки которых являются такими градиентами, как об **интегрируемых** связностях¹³. Т.е. все коэффициенты аффинной связности объединены ещё и в некоторую совокупность, определяемую существенно меньшим чем общее число коэффициентов числом функций глобализуемых, таких, которые можно рассматривать не локально, а как целое для всей области. Определяющей характеристикой этой совокупности является градиент единственной скалярной

¹³Этим свойством обладает более широкая, чем метрические, группа связностей.

функции. Отметим на будущее ещё раз важнейший момент, который ясно виден в приведённых выше соотношениях:

- Свёрнутая связность Γ_j описывает относительные изменения от точки к точке объёма и удельного объёма, соответствующих локальному реперу в глобализованной системе координат. Т.е. по сути дела изменение **величин** масштабов.

Пространства аффинной связности, коэффициенты связности которых выражаются через метрический тензор посредством соотношений Кристоффеля (2.20) принято называть пространствами Римана. Иногда это название сохраняют только если метрический тензор является знако определённым. А если допускается знако неопределённый метрический тензор, то добавляют приставку “псевдо-”: псевдоримановы пространства. Мы этого различия делать не будем. У нас “псевдо-” в описании появляется из-за различия в смысле временной и пространственных координат, а не из определения метрического тензора, который остаётся знако определённым.

Хочу обратить ваше внимание на то, что евклидово пространство является частным случаем именно римановых пространств. В евклидовом пространстве имеется возможность ввести всюду ортонормированные координаты не только локально, но и глобально, для всей области пространства. В таких координатах $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = 0$ для всех точек области. Ясно, что это самое серьёзное предположение о доступных нам процедурах измерения для описания мира, которое мы только можем сделать. Насколько оно может быть согласовано с тем, что мы уже знаем о мире?

Такое предположение мы вполне могли бы сделать для совершенно пустого мира. Никаких событий, никаких особенных частей в нём. Никаких базирующихся на этих особенных частях процедур измерения. Только воображаемые процедуры измерения. А воображать можно всё, что только хочется. Да, это не наш случай, а чисто математическая идеализация. Но нет ли в мире каких-то областей, для которых такое предположение было бы не самым плохим приближением?

А ведь есть. Мы знаем, что в мире имеется достаточно много таких областей, почти пустых, и весьма удалённых от больших скоплений событий (в классических приближениях, от больших массивных тел). Так что как некоторый предельный случай в нашем описании мира такое предположение вполне может быть полезным.

Кроме того, как ни странно, такое предположение может прекрасно работать и в совершенно противоположной ситуации — в тех классических приближениях, когда линии существования материальных точек заполняют некоторую область пространства-времени **непрерывно**, без пустот, без промежутков. Мы будем рассматривать такого рода приближения в соответствующей главе, как описание **сплошных сред**.

Также нужно обратить внимание на то, что классическую метрику, удобную нам составляющую нашего описания мира, мы вводим как совершенно **регулярную** структуру. Относительный метрический тензор **не может иметь сингулярностей в своей области определения нигде**. Как функции точки его компоненты обязаны быть всюду регулярными. Соответственно, метрическая связность, согласованная с метрикой часть возможной связности, тоже регулярна как функции точки. Появление сингулярностей в классической метрике в принципе возможно при включении в рассмотрение тех подпространств, на которых имеются события. Но мы обязаны исключить области с сингулярностями метрики из её области определения, просто констатируя факт **невозможности** ввести там классическую метрику. Однако, соответствующий объект связности, обязательно включающий сингулярности, при этом вполне можно рассматривать как приемлемый способ описания мира в таких областях.

2.4 Распределённое действие и тензор энергии-импульса

Мы установили некоторые рамки для вида аффинной связности, которая согласуется с введением в наше описание мира клас-

сической метрики, распространённой на полноценную, четырёхмерную область пространства-времени. Теперь нам желательно установить такое же соотношение между метрикой и действием, тоже для полноценной области континуума. Отметим, что нами уже описаны соотношения между действием, как образом числа событий на траекториях массивных частиц, и классической метрикой, введённой для продления процедур измерений, базирующихся на этих событиях, на всю область пространства-времени, содержащую базовые частицы, и они представлены в §2.2. Однако, эти соотношения так или иначе остаются соотношениями, верными только на самих траекториях. А нам нужно распространить связь между действием и классической метрикой **на всю область**, если мы хотим изучить возможное, согласованное с нашими процедурами измерения поведение реперов масштабов при смещении в **произвольном** направлении из любой точки области. Только имея выражение для действия, как функции **точки в области**, через классическую метрику мы получим возможность уточнить далее вид функций, которые описывают изменения в коэффициентах аффинной связности при смещении от точки к точке. Более того, нам это обязательно нужно для полноценного обоснования способа введения в описание самой классической метрики. Ведь она у нас останется довольно формальной структурой, пока мы не укажем как конкретно она описывает связи между **разными** материальными точками, т.е. пока не введём понятие волны в “пустом” пространстве и не укажем, как в классических приближениях определяется постоянная c . И не факт, что мы сможем сделать это ограничиваясь только метрической частью связности.

Совершенно очевидно также, что в зависимости распределения действия от регулярной классической метрики нам следует с самого начала предполагать наличие сингулярностей, обусловленных самой природой событий. Ведь в классическом приближении действие полагается непрерывным только на траекториях массивных частиц, но не во всём пространстве-времени. Наоборот, самые базовые классические приближения рассматривают

массивные частицы именно как точки в пространстве, а значит, с точки зрения распределения по пространственным координатам, действие всегда сосредоточено в некотором дискретном наборе точек, содержащихся в той или иной области пространства. А для областей, не содержащих никаких событий, значение как интегрального действия, так и его плотности обязано быть равным нулю.

Как совместить столь противоречивые требования на описание действия как функции точки в области пространства-времени?

Для решения этой проблемы мы пойдём тем же путём, что использовали в предыдущем параграфе. Начнём с самых общих теоретически возможных на данном этапе предположений. Допустим, что мы **имеем** нужное нам выражение для действия, как функции точки в области и классической метрики, представленной для определённости контравариантным тензором g^{ik} для некоторой выделенной (но произвольной) области в пространстве-времени.

Мы знаем, что действие является **распределением** по точкам области. Записать такое распределение, как функцию образа локально инерциальных систем отсчёта, распространённых на эту область, как функцию классической метрики будет правильным в виде интеграла по 4-объёму $V \Leftarrow dV = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \equiv d^4x$ области от некоторой Δ -плотности действия $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(x^i, g^{ik})$:

$$s = \int \mathfrak{s}(x^i, g^{ik})(-i)d^4x. \quad (2.22)$$

Множитель $(-i)$ введён здесь для того, чтобы определяемое этим интегралом действие вместе с его плотностью были действительными величинами. Мы ведь используем в качестве четвёртой координаты мнимое число, и наш четырёхмерный объём становится в результате тоже мнимым. А действие, как непрерывный образ числа событий в области, обязано быть **действительной не отрицательной** величиной.

Для того, чтобы отличать эту форму действия от действия, локализованного только на траекториях я использую разницу в

обозначениях — s для распределённого в континууме действия и, как и раньше, s_0 для действия ассоциированного с траекториями массивных частиц. Собственно, имея ввиду этот переход, я добавлял индекс 0 к обозначению действия ранее.

Если бы мы, как и должно бы быть, имели действие как исходную, независимую от других соглашений величину, то такой функционал был бы определён при введении классической метрики однозначно. При этом можно было бы определить столь же однозначно Δ -плотность некоторого тензора (в данном случае относительную) как комплекс **функциональных** производных от Δ -плотности действия по метрике. Δ -плотность тензора, связывающую классическую метрику как образ систем отсчёта и действие, как образ событий в области. Запишем это формальное определение:

$$\mathfrak{T}_{ik} = \frac{\delta[s(\mathbf{g}^{ik})]}{\delta \mathbf{g}^{ik}}. \quad (2.23)$$

Здесь круглые скобки у плотности действия обозначают **функциональную зависимость** этой плотности от метрики а не умножение на неё.

Напомню, что классическую метрику мы **по определению** вводим как набор сугубо регулярных функций точки, поэтому выписанная выше плотность определена всюду в области. Все её возможные сингулярности должны быть обусловлены только наличием в области массивных частиц, но никоим образом не должны появляться из-за плохого определения классической метрики. Ещё нужно отметить, что поскольку метрический тензор симметричен по определению, то и полученная как функциональная производная плотность тензора тоже будет симметричной.

Учтём, что вместе с классической метрикой определена и соответствующая Δ -плотность $\mathbf{g}$, являющаяся для римановых пространств стандартной, позволяющей ввести однозначно “метрический” объём любой области соотношением $\tilde{V} = \int \mathbf{g} d^4x$. Величины метрических объёмов, в силу ковариантного постоянства

метрики по отношению к согласованной с ней метрической связности, можно сравнивать для разных областей пространства-времени. Побочным результатом становится возможность также однозначно связать тензорные Δ -плотности и тензоры регулярным всюду соотношением $\mathfrak{T}_{j\dots l}^{i\dots k} = \mathfrak{g}T_{j\dots l}^{i\dots k}$. Запишем такое соотношение для нашей плотности:

$$\mathfrak{T}_{ik} = \mathfrak{g}T_{ik}. \quad (2.24)$$

Этим соотношением мы поставили во взаимно однозначное по метрике соответствие нашей плотности, описывающей связь плотности действия¹⁴ с классической метрикой, некоторый дважды ковариантный и симметричный тензор. Можно также в эту пару добавить контравариантный тензор по формуле $T^{ik} = \mathfrak{g}^{ij}\mathfrak{g}^{kl}T_{jl}$, и соответствующую ему плотность $\mathfrak{T}^{ik}$. Эта плотность при свёртке с ковариантным метрическим тензором должна снова воспроизводить нашу плотность действия $\mathfrak{s}$. В пределах той части описания, что предполагает наличие относительного метрического тензора, все эти формы могут использоваться как взаимозаменяемые. Как образы одной и той же физической величины.

Что это за величина, какой физический смысл должен иметь этот тензор (или его плотность) в нашей картине мира? Получить ответ на этот вопрос довольно просто. Мы опираемся на локальное рассмотрение всех возможных соотношений. А локально будет справедливым ограничиться чисто линейной связью между плотностью действия и метрикой:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}T_{ik}, \quad (2.25)$$

и наш функционал действия можно без утери общности записать как

$$s = -\mathbf{i} \int \mathfrak{s} d^4x = -\mathbf{i} \int \mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}T_{ik} d^4x = -\mathbf{i} \int \mathfrak{g}_{ik}\mathfrak{g}T^{ik} d^4x. \quad (2.26)$$

¹⁴Ниже я буду часто называть Δ -плотности просто плотностями. Надеюсь это не вызовет затруднений, т.к. пока все упоминаемые здесь плотности всегда будут Δ -плотностями. Когда и если потребуются проводить различие между двумя этими терминами, я обязательно это укажу.

Имея ввиду обязательное интегрирование введённой нами плотности действия, соотношения (2.25, 2.26) можно полагать настолько точными и допустимыми, насколько хорошо мы определили классическую метрику. Все нелинейности при этом спрятаны в возможной зависимости тензора T_{ik} и классической метрики от точки пространства-времени.

А теперь сравним соотношения, связывающие действие, метрику и плотность тензора $\mathfrak{T}_{ik}$ с соотношениями (2.13-2.18). Аналогия функционального смысла плотности тензора $\mathfrak{T}_{ik}$ с функцией градиента действия, вектора определяющего вектор энергии-импульса в классических приближениях, очевидна. Получается, что этот тензор и его плотность описывают *распределение энергии-импульса в области по отношению к классической метрике. По отношению к локальным системам отсчёта, образом которых и служит нам классическая метрика*. Поэтому мы называем его тензором энергии-импульса, а соответствующую плотность — плотностью тензора энергии-импульса. **У нас это определение, аналогичное определению вектора энергии-импульса** (во всех тех формах, что мы дали ранее).

В исторически сложившихся физических теориях тензор энергии-импульса тоже вводится, но изначально самостоятельно, без указания на его происхождение из выбранного способа описания действия в связи с введением классической метрики. Это исходная, базовая величина теории. Также как и масса, векторы импульса, энергия, метрика. А действие величина вторичная, через них определяемая. Соответственно, форма его определения через массу, скорости и т.д., а также определение действия через этот тензор выглядит произвольно принятым соотношением. Произвольно принятым в том смысле, что не имеет под собой никаких иных теоретических оснований, кроме того, что получающиеся выводы согласуются с экспериментальными данными. Этого было бы достаточно, если бы связь с экспериментом была прямой, а не опосредованной, через множество промежуточных шагов.

Правда, в теоретической механике, там где используется под-

ход Лагранжа для формулировки физики, определение тензора энергии-импульса, да и “обобщённых импульсов” выглядит в целом очень похоже на наши определения. Это не удивительно, т.к., если вспомнить содержание §1.3 и посмотреть на соотношение (2.26) с точки зрения сформулированных там идей, то можно понять, что лагранжев формализм будет основным в формулировке нашего описания мира. Изначально в него встроенным.

Однако, здесь мы будем иметь очевидное преимущество перед стандартными формулировками подхода Лагранжа. Сами лагранжианы (лагранжевы плотности) будут у нас структурами естественными, вполне понятного происхождения. Как и причина действенности такого подхода для описания мира. В отличие от функций Лагранжа теоретической механики и других, принятых сегодня в тех разделах теоретической физики, где они используются. В частности, в квантовой теории лагранжианы сегодня изобретаются для реализации тех или иных идей так, с таким произволом, как теоретикам вздумается. И если имеются вполне ясные причины, ограничивающие фантазию в выборе лагранжеевых плотностей, то такая ситуация намного предпочтительнее.

Посмотрим, как выглядит плотность тензора энергии-импульса в нашем базовом случае, для единственной изолированной классической массивной частицы (материальной точки в пространстве с массой m_0), существующей во времени. Для этого используем два тождественных представления единицы:

$$1 = \frac{dl^2}{dl^2} = -\frac{\mathbf{g}_{ik} dx^i dx^k}{dl \cdot dl} = -\mathbf{g}_{ik} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^k}{dl} \quad \text{и} \quad (2.27)$$

$$1 = \int \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3) dx^1 dx^2 dx^3. \quad (2.28)$$

Первое из этих соотношений использует в разной форме наше определение классической метрики и интервала, а второе естественным образом возникает из рассмотрения свойств δ -функции (§1.5). В системе покоя частицы подынтегральное выражение

правой части (2.28) умножим на

$$(-g_{ik} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^k}{dl})(-im_0c) \, icdt,$$

где скобки, содержащие классическую метрику являются правой частью (2.27), значит это просто единица, а умножаются они на ds_0 , дифференциал действия на траектории нашей базовой частицы. Далее мы проинтегрируем это выражение ещё один раз по времени, а точнее, по $dx^4 = icdt$. Естественно, мы должны в итоге получить не что иное, как то действие, которое ассоциируется с полной, четырёхмерной областью, по которой производится интегрирование, и в которой имеется наша материальная точка:

$$\begin{aligned} \int g_{ik} \, im_0c \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3) \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^k}{dl} \, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 &= \quad (2.29) \\ = s_0 = -i \int s_0 d^4x &= -i \int g_{ik} \mathfrak{T}_0^{ik} d^4x = -i \int g_{ik} \mathfrak{g} T_0^{ik} d^4x. \end{aligned}$$

Точнее, мы получаем главную часть плотности действия, ту, что создаётся событиями, сосредоточенными на линии существования материальной точки. Поэтому я использую для обозначения результата интегрирования s_0 .

Заметьте, что выражение $im_0c \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$ явным образом следует интерпретировать как полноценную четырёхмерную Δ -плотность, если мы вспомним, что m_0 , внешний в классических приближениях параметр, на самом деле является временной компонентой градиента, т.е. добавляет к трём δ -функциям, фиксирующим удельную по пространству составляющую Δ -плотности, недостающий, удельный по времени множитель. Четырёхмерный объём, хотя и записан в системе покоя частицы, но записан он в инвариантной форме, также как и остальное подынтегральное выражение. Поэтому соотношение (2.29) справедливо для любой системы координат (естественно, при тех условиях, когда можно ввести классическую метрику). Теперь мы можем записать локализованное выражение для плотности тензора энергии-импульса

классической материальной точки (массивной частицы)

$$\mathfrak{T}_0^{ik} = -m_0 c \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3) \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^k}{dl}, \quad (2.30)$$

которое в стандартном изложении физики записывается просто как эмпирический факт¹⁵. Здесь же оно является следствием того, что как только мы принимаем во внимание не только саму траекторию, а всю область её содержащую, то сразу же должны вспомнить, что дифференциал интервала как функция в области, в отличие от своего сужения на траекторию, является всегда распределением, а не регулярной функцией. Причём, квадратичным распределением по полю смещений из точки.

Обратите внимание, что во второй строке (2.29) я написал не s , обозначение для действия как функции данной области, а s_0 , прямо указывая, что эта часть плотности действия воспроизводит именно действие на траектории массивной частицы. И у тензора (и плотности тоже) энергии-импульса добавлен индекс “0”. Здесь записана **главная, сингулярная часть** плотности действия. Да, никаких иных событий, кроме событий на траекториях массивных частиц в любой области пространства-времени нет и быть не может. И полное действие в выделенной области всегда будет равно простой сумме действий на траекториях всех частиц, в этой области оказавшихся. Однако, если мы ограничимся рассмотрением только главных частей плотности действия, то сразу потеряем возможность хоть как-то описать **связи между разными** массивными частицами. Те самые свя-

¹⁵Знак минус здесь появился потому, что мы используем четвёртую мнимую координату вместо действительного времени. Поскольку в системе покоя dx^4 входит в это выражение во второй степени и квадрат мнимой единицы равен минус единице, а действие (число событий) мы определяем как сугубо положительное число (точнее, не отрицательное, т.к. отсутствие событий, т.е. нуль, тоже допустимо), то мы и добавили в наше *определение* знак минус. **Заметьте, что мы всюду определяем и массу покоя, и действие, и векторы энергии-импульса, и тензор энергии-импульса (вместе с его плотностью) таким образом, чтобы само действие было положительным числом, будучи образом числа событий, а его производные имели положительные временные компоненты.**

зи, которые описывают особые цепочки из двух событий, лежащих на траекториях разных частиц. Связи причина-следствие в самом минимально возможном варианте. Те связи, для описания которых мы уже ввели в рассмотрение градиенты действия (векторы энергии-импульса), имеющие нулевую метрическую норму:

$$\partial_i s \partial_k s g^{ik} = 0.$$

Ввели разницу в описании временной и пространственных координат. Ввели в описание разницу в направлениях в пространстве-времени. Т.е. классическую метрику, как таковую. **Те самые связи, которые требуют от нас описывать мир непрерывностью, континуумом.**

Что можно и нужно добавить к сумме главных частей плотности действия, чтобы иметь возможность приписывать области действие как образ частиц связанных, а не разобщённых? Ответ можно легко получить, приняв во внимание выписанное выше соотношение для нулевого следа особого вектора энергии-импульса (градиента действия) на классической метрике. Плотность любого допустимого **регулярного** в области тензора энергии-импульса, дополнительного к его главной части, тоже обязана давать нулевой след на классической метрике. Ведь эта плотность будет образом именно таких, особых векторов энергии-импульса. А других связей **между событиями на разных частицах**, как мы знаем просто нет. Или такие пары причина-следствие без дополнительного события между ними, или связи на самом деле представляют собой массивные частицы, для которых можно определить единицу времени и всё остальное, им свойственное. Т.е. свои собственные полные реперы и локально инерциальные системы отсчёта.

Все события при этом так и останутся на траекториях массивных частиц. Именно то, что нам диктует наше знание о свойствах мира, как совокупности событий и их причинно-следственных связей. Соответственно, полная плотность действия в области должна быть записана как

$$\mathfrak{s} = (\sum \mathfrak{T}_0^{ik} + \mathfrak{T}_\Gamma^{ik}) g_{ik}, \quad (2.31)$$

где

$$\mathfrak{T}_\Gamma^{ik} g_{ik} = 0, \quad (2.32)$$

и не может содержать сингулярности где бы то ни было, кроме траекторий массивных частиц. Символ “ Γ ” для обозначения этой части плотности тензора энергии-импульса мной выбран как указание на то, что она описывает именно проявление **полей связности между массивными частицами**. Между частицами поле связности является продолжением наших предположений о том, что масштабы в общем случае изменяются при смещении от точки к точке, на те области пространства-времени, где этих масштабов нет. Т.е. является практически чистой идеей, а значит описывается регулярными функциями точки. Но события с траекторий массивных частиц, связывающие эту идеальную составляющую связности с её главными частями требуют также своего учёта именно как возможное наличие сингулярностей и в этой части плотности тензора энергии-импульса. Сингулярностей, обязательно сосредоточенных на траекториях материальных точек и нигде больше. Два события на траекториях двух разных массивных частиц, вот эти сингулярности. Нет их — нет и смысла в такой добавке в плотность энергии-импульса. Теоретически возможно, но для описания мира не нужно¹⁶. Математическая формулировка сингулярностей такого вида, форма их вклада в $\mathfrak{T}_\Gamma^{ik}$, должна отличаться от описания их вклада в главную часть $\mathfrak{T}_0^{ik}$. Просто потому, что эти события по факту уже там, в главной части, присутствуют, учтены в параметрах m_0 , массах покоя обеих связанных полей массивных частиц. Это

¹⁶Такое утверждение безусловно верно при локальном способе описания мира, когда речь идёт о достаточно малых его областях. Однако, при общем описании таких областей мира, которые содержат несколько таких локальных областей, мы не можем исключить из рассмотрения ситуации, в которых такого рода вклады в тензор энергии-импульса (без сингулярностей на каких-либо траекториях частиц) могут потребоваться для **согласования локализованных описаний**. Как образ связей **не бинарных локальных, а комплексных, синтетических**. Таких связей между большими (делимыми) событиями, которые невозможно свести полностью к связям между событиями элементарными.

тот критерий, которому мы будем следовать, выбирая возможные расширения свойств связности, вводя те или иные физические поля в четырёхмерной области, содержащей материальные точки. Поля связности, регулярные вне траекторий таких точек. Только такие связности мы рассматриваем как годные для описания мира.

Нужно отметить ещё один важный момент. Действие у нас является образом числа событий, т.е. числом **не отрицательным, а не просто действительным**. Поэтому и след плотности тензора энергии-импульса на метрике тоже является по своему смыслу плотностью положительного числа. Или нулём, если событий в области нет. Для главной части плотности тензора энергии-импульса (2.30) в этом легко убедиться прямым вычислением. Но, поскольку полное действие области не может содержать никаких иных событий, кроме тех, что обеспечены именно главными частями плотности тензора энергии-импульса этот вывод справедлив вообще для любой такой плотности.

Способ, которым мы ввели тензор энергии-импульса как образ заполнения непрерывным действием промежутков между линиями существования материальных точек на которых сосредоточены события, является шагом полностью аналогичным тем соображениям, используя которые мы в первом томе **учли наличие связей между событиями в причинно-следственных цепочках**. Мы поместили эти **дискретные** события в **непрерывную линию** с помощью умножения числа событий, имевших место, начиная с некоторого выделенного, принятого за начало отсчёта, на постоянную Планка. Постоянная Планка, использованная нами как кусочек непрерывности, имеющий **длину**, стала связующим звеном на линии времени. А сейчас мы вводим такую же связь уже в пространстве. Не должен ли появиться в нашем описании “пространственный” аналог постоянной Планка? Ведь здесь мы тоже определённым образом объединили дискретные события в “непрерывность”, уже не цепочку, а полноценную четырёхмерную непрерывность. Пусть ещё менее однозначную чем ранее, но всё же? В форме действия это, ко-

нечно, должна быть всё та же постоянная Планка, соединяющая концы любой линии, имеющей нулевую метрическую “длину”. А в форме “расстояния”, “пространственной длины”? Обсудим это ниже, в подходящем месте.

2.5 Поле гравитации как общее понятие

Итак, мы определили Δ -плотность тензора энергии-импульса как функциональную производную по метрическому тензору от Δ -плотности действия в области, содержащей нашу базовую для определения репера материальную точку (точку в смысле нулевых пространственных размеров). Также определили главную часть этой плотности через характеристики базовой материальной точки — массу покоя и касательный к её траектории вектор. Всё это нам нужно, чтобы распространить доступное нам локальное описание мира репером масштабов с траектории базовой частицы на всю область, хотя бы не очень “большую”, окружающую нашу главную часть. При этом мы как начальное приближение потребовали от возможной аффинной связности в области наличие соответствующих свойств. Таких, чтобы хотя бы локально всюду было возможно ввести классическую метрику. Не полноценный тензор, но относительный, являющийся таковым только при ограничении нашего выбора масштабов группой локально лоренцевых преобразований. Ввести необходимую нам в описании стандартизованную структуру. И собираемся пока ограничиться только таким видом связности, как первым приближением к описанию мира, допуская её усложнение в дальнейшем.

Относительность метрического тензора позволяет нам идти методом последовательных приближений в определении возможных свойств аффинной связности как функций вводимых таким образом координат в рассматриваемой области континуума. Это означает, что мы допускаем, что связность может быть не согласована с классической метрикой в полном объёме, но определённая её часть должна иметь свойства, позволяющие вво-

дить классическую метрику. Где-то объект аффинной связности может иметь отличные от необходимых свойства, а где-то может и полностью удовлетворять требованиям согласованности с классической метрикой. Мы уже выяснили, какими свойствами должна обладать связность, которая позволяет рассматривать классическую метрику не только как относительный тензор, но и как полноценный тензор. Мы назвали такую связность метрической связностью и записали формулы, позволяющие определить коэффициенты этой части связности через метрический тензор. Это соотношения (2.20), символы Кристоффеля.

Теперь перед нами встаёт вопрос — а как эта или более полная связность может породить Δ -плотность действия и соответствующую плотность тензора энергии-импульса? Такие, которые имеют главной частью уже определённые нами структуры? Хотя правильнее было бы его формулировать наоборот — как плотность действия обуславливает функциональный вид связности? Но должно быть довольно ясно, что проходя путь от связности к действию мы всё равно решаем этот вопрос, пусть и в обратном порядке. Поэтому займёмся формированием плотности действия из классической метрики и связности, и изучением следствий наших соглашений.

Исходный материал известен — это классическая метрика, которая обязана входить в искомую плотность в первом приближении как линейный множитель согласно соотношениям (2.25, 2.26). Кроме того, сама связность обязана присутствовать в искомой плотности действия. По простейшей причине — именно она и является реальным способом описания изменчивости репера, а значит и зависимости действия от точки в области, а не метрика или что-то иное. Кроме того, именно сингулярности в связности могут и должны соответствовать в искомой плотности действия главной части плотности тензора энергии-импульса. Той части, которую мы уже записали через параметры ещё более базовые для нашего описания, чем связность — через массу покоя, параметр в классических приближениях внешний, произвольный, констатирующий факт наличия непрерывных со-

бытий на линии существования масштаба времени, и через образ самого этого масштаба, касательный к траектории базовой частицы вектор. Именно это соответствие обязано быть основным условием, определяющим допустимые свойства объекта связности, т.к. классическая метрика по нашему определению должна быть свободна от любых особенностей.

Δ -плотность действия обязана быть плотностью скаляра, инварианта. Хотя бы в ограниченной нами группе допустимых преобразований. А лучше, чтобы эта ограниченность сводилась только к самой классической метрике, но не к проявлению связности в плотности действия. Тогда нам будет гораздо проще в дальнейшем постепенно снимать принятые нами ограничения в группе допустимых преобразований. Это означает, что классическая метрика должна входить в плотность действия как свёртка с некоторой Δ -плотностью двух индексного тензора, построенного из связности, и, возможно, её производных. Мы имеем возможность немного ослабить это требование. Примем во внимание, что совместно с метрическим тензором автоматически определяется и всюду регулярная Δ -плотность, равная корню квадратному из определителя метрического тензора. Это позволяет использовать для свёртки с метрикой не плотность тензора, а просто тензор. Настоящий, полноценный тензор, порождаемый связностью.

Как я уже неоднократно писал, произвольная связность порождает два основных тензора — тензор кручения и тензор кривизны. Ни тот, ни другой в своём естественном виде для образования плотности действия не годятся. Они имеют слишком много индексов, их устройство слишком сложно, чтобы породить скалярную плотность напрямую. Однако, с их помощью можно определить ряд других тензоров, имеющих строение, вполне подходящее для наших целей.

Оставим пока вне рассмотрения возможные вклады кручения. По простой причине — в нашем первом подходе к определению возможных свойств связности мы ожидаем, что это будет метрическая связность. А она вполне симметрична, т.е. тензор

кручения равен в этом случае нулю. По крайней мере, мы можем сказать, что вначале мы просто игнорируем возможность наличия кручения где-то в нашей области мира. Оставляя изучение такой возможности на потом.

Тензор кривизны предоставляет в наше распоряжение сразу две свёртки, два тензора, имеющих желаемые нами два индекса. Оба эти тензора являются дважды ковариантными. Соответственно, нам следует свернуть их с контравариантной формой классической метрики, добавив множителем метрическую плотность g .

Одна из свёрток тензора кривизны, $F_{jk} = R_{j k p}^p$ (см. §1.3), имеет след на метрическом тензоре (любом — и относительном, и полноценном) **тождественно** равным нулю. Причём не важно, есть в этом тензоре сингулярности, или нет. Происходит это из-за того, что сворачиваются тензоры двух противоположных видов симметрии в их структурах — антисимметричный F_{jk} с симметричным g^{jk} . Следовательно, такая **линейная по антисимметричной свёртке кривизны** плотность ничего не может нам сказать о связи действия через аффинную связность с классической метрикой. По крайней мере, в части касающейся проявления событий, как сингулярностей в связности. Хотя именно эта, антисимметричная свёртка полного тензора кривизны позволяет рассматривать полноценную Δ -плотность, обязанную своим происхождением только и только самому объекту связности. Как мы видели в §1.3 соответствующие уравнения для её производной Лагранжа (обратите внимание на то, как они похожи на наше определение плотности тензора энергии-импульса) являются структурными тождествами любого пространства аффинной связности. А значит и в нашем описании эти тождества имеют своё место.

Так что для изучения **линейных по классической метрике соотношений** в нашем распоряжении остаётся только тензор Риччи, $R_{kl} = R_{i k l}^i$, вторая свёртка полного тензора кривизны. Начнём с его использования в виде, соответствующем произвольному объекту связности, без каких-либо ограничений на его

свойства. Это позволит лучше представлять тот путь, который придётся пройти позже, снимая последовательно принятые нами ограничения для того, чтобы увидеть ранее отсечённые для удобства понимания возможности изменения репера масштабов при смещении в континууме от точки к точке.

Простейшая Δ -плотность, которую можно построить **линейным** образом из тензора Риччи и классической метрики (линейно по вкладу тензора Риччи, т.к. за счёт метрической плотности вклад метрики поневоле становится нелинейным) в самом общем виде выглядит с учётом соотношений (1.10-1.12) так:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R}_g &= R_{ik} g g^{ik} \\
 &= (\bar{R}_{ik} + \bar{\nabla}_i T_k + \nabla_p T_{ik}^p - T_{ip}^l T_{lk}^p) g g^{ik} \\
 &= (r_{ik} + a_{ik}) g g^{ik} = r_{ik} g g^{ik} \\
 &= [\bar{r}_{ik} + \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_i T_k + \bar{\nabla}_k T_i) - T_{ip}^l T_{lk}^p] g g^{ik} \\
 &= (\bar{R}_{ik} + \frac{1}{2} \bar{F}_{ik}) g g^{ik} + \\
 &\quad + [\frac{1}{2}(\bar{\nabla}_i T_k + \bar{\nabla}_k T_i) - T_{ip}^l T_{lk}^p] g g^{ik}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Тензор Риччи общего вида не является полностью симметричным даже в случае ограничения симметричной частью связности. Поэтому я привожу здесь несколько эквивалентных форм записи построенной с его помощью Δ -плотности. Приведённые соотношения позволяют отметить наличие в этой плотности ряда **инвариантно** выделяемых вкладов различных частей как связности, так и тензора кручения. Кроме того, можно также увидеть коэффициенты, с которыми входят в эту плотность те составляющие тензора Риччи, которые либо не дают прямого вклада в неё вследствие их антисимметричного строения, либо мы их не рассматриваем на определённых стадиях создания нашего описания мира. И те и другие будут учтены позже, на соответствующих этапах построения нашего описания. В частности, ниже нам придётся рассмотреть и плотности, возникающие из тензора Риччи и метрики, по крайней мере, **квадратичные по тензору Риччи**. Только так мы сможем принять во внимание

всю полноту возможностей связности иметь какой-то функциональный вид, ограниченный **известными нам условиями на действие в области**¹⁷. Но это позже, “в следующем приближении” нашего построения описания мира. Сейчас мы сосредоточимся только на линейном по тензору Риччи соотношении. В первую очередь потому, что метрический тензор Риччи является как раз симметричным, а значит, всё, что касается метрической связности в чистом виде, мы можем получить при исследовании линейной плотности, построенной на его основе.

“Метрическая” плотность $\mathfrak{R}_g$ тензора Риччи ещё не может рассматриваться нами как желаемая плотность действия. Дело в том, что плотность (2.33) имеет размерность. Размерность эта отличается от размерности плотности скаляра, которую она должна бы иметь, если бы все тензоры, её формирующие были полноценными тензорами и плотностями. А это не так — и g^{ik} и g являются в наших ограничениях безразмерными величинами. В естественных единицах действие для нас безразмерный скаляр. Ведь число событий величина внешняя для описания континуума с помощью репера масштабов, от их выбора не зависящая. Естественная размерность такой плотности равна $[x^1 x^2 x^3 x^4]^{-1}$. А размерность (2.33) иная — $[\mathfrak{R}_g] = [R_{ik}] = [x^i x^k]^{-1}$. Даже если мы будем, как это принято в обычном изложении физики, использовать дополнительные к пространственно-временным единицам размерности для массы, энергии, действия, ситуация не изменится. И в том, и в другом случае, чтобы ассоциировать плотность $\mathfrak{R}_g$ с плотностью действия $\mathfrak{s}$, мы должны ввести размерный коэффициент k_g , разный в разных предположениях об

¹⁷Здесь можно увидеть аналогию с разложением искомой плотности действия в ряд Тейлора по степеням тензора Риччи. Линейный член как первое приближение, квадратичный как следующее. Тогда общая плотность будет их суммой с соответствующими коэффициентами. Естественно, при этом ни о какой математической строгости такой аналогии говорить не приходится. Хотя позже мы увидим, что аналогия эта явно просматривается в плане связи линейного члена с главной частью тензора энергии-импульса, а квадратичного с поправкой к главной части и учётом волновой составляющей в связности, при её уходе от чисто метрической.

используемых единицах:

$$\mathfrak{s} = k_g \mathfrak{R}_g. \quad (2.34)$$

Необходимость введения такого коэффициента в нашем описании мира напрямую обусловлена тем, что мы опираемся на стандартизованную, классическую метрику, а не на полноценный метрический тензор. По сути дела, коэффициент этот и возникает как попытка вернуть этой стандартизованной метрике хотя бы часть свойств настоящего тензора. А именно, вернуть правильную размерность его компонентам. Тем более, что на метрической связности, определение конкретного вида которой в тех или иных случаях будет нашей целью, присутствие такого, **постоянного для всей области коэффициента**, сказываться не должно. Ведь метрическая связность одна и та же для всех метрических тензоров, отличающихся только коэффициентом такого вида. Коэффициент этот мы полагаем **положительным** размерным числом¹⁸.

Мы не будем сейчас останавливаться на уточнении величины этого коэффициента, хотя сделаем это обязательно, только позже, в более подходящем месте. Сейчас просто примем такое соотношение за определение соотношения между плотностью действия как непрерывного образа числа событий в области, приходящихся на единицу текущего объёма и “метрической” плотностью тензора Риччи, как образа числа сингулярностей, приходящихся в объекте связности на единицу метрического объёма¹⁹. Поэтому в данный момент мы можем определённо указать только размерность введённой нами постоянной в том случае, когда

¹⁸Вспомним, что действие у нас величина сугубо не отрицательная, пропорциональная числу событий в области. Это означает, что постулируя пропорциональность скалярной метрической кривизны создаваемого нами образа мира действию мы уже здесь фактически признаём, что образ этот будет замкнутым математическим пространством.

¹⁹И не только сингулярностей. Ведь нам нужно будет описывать также и связи разного рода, объединяющие эти сингулярности в единое целое. И эти связи тоже обязаны фигурировать в той плотности действия, которой пропорциональна метрическая плотность тензора Риччи. Их образами станут составляющие тензора энергии-импульса особого вида.

введена классическая метрика и единицы измерения по всем координатам одинаковы: $[k_g] = [l^2]^{-1}$. Естественно, при этом мы принимаем также все ограничения на преобразования координат, связанные с введением классической метрики. Ещё можно утверждать, что эта постоянная должна быть действительным числом, притом иметь знак такой, чтобы собственное действие в любой области было сугубо положительным числом (это ведь число, пропорциональное числу событий в области).²⁰

Из соотношения (2.33) можно видеть, что, в принципе, в определённую нами плотность действия могут давать вклад как симметричная часть связности через свой тензор Риччи $\bar{R}_{ik}$, так и тензор кручения. Причём вклад последнего явно состоит из нескольких, инвариантно разделён на части. И даже вклад F_{jk} формально присутствует, причём с вполне определенным коэффициентом по отношению к вкладу метрического тензора Риччи.

Но мы договорились оставить кручение пока в стороне. Поэтому сосредоточимся только на связи $\bar{R}_{ik}$ и действия. В соответствии с обозначениями (1.12) мы можем записать

$$\mathfrak{s} = k_g \bar{\mathfrak{R}}_g = k_g \bar{R}_{ik} \mathfrak{g} g^{ik} = k_g (\bar{r}_{ik} - \frac{1}{2} \bar{F}_{ik}) \mathfrak{g} g^{ik}. \quad (2.35)$$

Здесь мы использовали в явном виде **инвариантное** представление тензора Риччи симметричной связности как суммы двух тензоров — симметричного $\bar{r}_{ik} = \bar{r}_{ki}$ и антисимметричного $\bar{F}_{ik} = -\bar{F}_{ki}$. Поскольку антисимметричный тензор $\bar{F}_{ik}$ при свёртке с симметричным тензором $\mathfrak{g}^{ik}$ даёт тождественный нуль, независи-

²⁰Обращаю ваше внимание на то, что на самом деле наши рассуждения не определяют однозначно плотность действия для некоторой выделенной области пространства-времени через геометрические структуры. Всё, что мы устанавливаем таким образом — это **обязательное** наличие **пропорциональности** между Δ -плотностью действия (полной, или частичной) и скалярными Δ -плотностями, содержащими сингулярные коэффициенты аффинной связности. Для разных таких плотностей пропорциональность определяется индивидуально. И только все соотношения в совокупности, учитывающие все возможности связности иметь ту или иную форму, при их полной согласованности, позволят нам построить полноценное описание пространства-времени как континуума.

мо от наличия в нём сингулярностей²¹, то наше соотношение действия и тензора Риччи упрощается ещё больше. Остаётся только та его часть, которая входит в симметричный тензор $\bar{r}_{ik}$:

$$\mathfrak{s} = k_g \bar{r}_{ik} g g^{ik}. \quad (2.36)$$

Заметим, что это соотношение справедливо для симметричной связности общего вида, даже если её тензор Риччи не обладает свойством симметрии. Т.е. отличие $\bar{F}_{ik}$ от нуля не изменяет полученной нами связи между действием, классической метрикой и симметричной связностью, *линейной по тензору Риччи*.

Необходимым и достаточным условием симметричности тензора Риччи для симметричной связности как раз и является равенство $\bar{F}_{ik} = 0$, которое, в свою очередь, означает что свёртка самой связности $\bar{\Gamma}_j = \bar{\Gamma}_{jk}^k$ является градиентом некоторой функции: $\bar{\Gamma}_j = \partial_j f$. Более того, можно уточнить и вид этой функции. Оказывается, в таком пространстве аффинной связности можно ввести универсальный для всего пространства объём V , который является ковариантно постоянным. Соответственно, имеется и ковариантно постоянная всюду Δ -плотность $\mathfrak{e} = V^{-1}$, градиент логарифма которой и определяет свёртку связности:

$$\bar{\Gamma}_j = \partial_j \ln \mathfrak{e}. \quad (2.37)$$

Такие связности часто называют эквиаффинными связностями. Сравните это соотношение с соотношением (2.21). Вполне очевидно, что метрические связности являются эквиаффинными, но не исчерпывают их полностью, а являются их подмножеством. Так что при этих условиях речь пойдёт о связностях из немного более широкого класса, чем метрические. Но и для метрических связностей соотношение (2.36) должно заведомо выполняться. Поэтому возьмём его за основу дальнейшего построения первого приближения к классическому описанию области

²¹Прошу обратить внимание на коэффициент 1/2 перед антисимметричной частью в (2.35). Его наличие позволит нам в дальнейшем правильно определить вклад в действие той части связности, которую мы ассоциируем с электромагнитным полем.

мира как континуума, содержащего действие только на траекториях массивных частиц. Приближения, в котором мы пытаемся определить только метрическую часть связности. Т.е. те условия на связность, которые навязываются нашим использованием для описания мира стандартизированной классической метрики.

Несколько слов об используемых обозначениях для разных видов связности. На данный момент введены специальные обозначения для того, чтобы различать связность самого общего вида Γ_{jk}^i , её симметричную часть $\bar{\Gamma}_{jk}^i$, и метрическую часть симметричной связности $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$. Также различаются соответствующие ковариантные производные — ∇_j , $\bar{\nabla}_j$ и $\tilde{\nabla}_j$. На нашем пути уже появилась пара признаков, по которым можно различать дополнительно ещё один тип связности — это условие обращения в нуль ротора свёрнутой связности (одной из двух свёрток полного тензора кривизны) $\bar{F}_{ik} = 0$ и эквивалентное ему условие её интегрируемости (2.37). Однако, как можно будет видеть в дальнейшем, вводить специальное обозначение для этого вида связности нам не потребуется, т.к. её отличие от метрической будет выражаться с помощью введения ещё одного, притом хорошо известного физического поля, определяемого *явным* образом как часть связности, *дополнительная к метрической*.

Принимая всё выше сказанное во внимание, мы в данный момент, в данном приближении, в качестве выражения для плотности действия будем использовать (2.36), заменив в нём формально симметричную связность на метрическую:

$$\mathfrak{s} = k_g \tilde{r}_{ik} g g^{ik}, \quad (2.38)$$

хотя должно быть вполне понятно, что само это соотношение будет справедливым для всех симметричных связностей, конечно при наличии в описании уже введённой классической метрики (не обязательно согласованной с симметричной связностью полностью).

Соответственно, действие, ассоциируемое с помощью этой плотности с произвольной областью пространства-времени (и с наличием в этой области метрической связности), записывается

как обобщённая функция, распределение

$$s = -\mathbf{i} \int \mathfrak{s} d^4x = -\mathbf{i} k_g \int \tilde{r}_{ik} g g^{ik} d^4x. \quad (2.39)$$

Вообще говоря, уже с этого момента мы можем говорить о том, что введённая нами классическая метрика, точнее её зависимость от точки в области пространства-времени, описывает не что иное как поле притяжения одних массивных частиц другими. **Поле гравитации.** Просто потому, что ассоциация действия со скалярной характеристикой геометрии пространства-времени, записанной формулой (2.39), была принята именно для этих целей в качестве **постулата** теории сначала Гильбертом, и вслед за ним Эйнштейном. Соответствующая теория носит название Общей Теории Относительности (ОТО), но по сути своей является развитием теории гравитации Ньютона. И соотношение (2.39) является для этой теории основным²².

Действие, как непрерывный образ числа событий в области пространства-времени, является для нас основой формулирования описания мира. Число событий, а значит и действие в классических приближениях обязано являться той характеристикой области в пространстве-времени, которая не может изменяться при вариациях нашего способа описания мира. События и их связи — вот основа описания. Всё в нём должно быть согласовано с инвариантностью этих характеристик мира.

Именно это и формулируется как принцип стационарности действия при любых вариациях нашего описания мира пространством аффинной связности. Стационарности действия при вариациях чего? При **регулярных** вариациях любых структур, слу-

²²Более того, в нашем описании мы можем, *исходя только из самых общих соображений*, предвосхитить то условие на тензор Риччи для свободной от материальных точек области пространства-времени, которое мы далее получим как результат варьирования метрики в этой плотности.

На самом деле. Метрика у нас **регулярна** по определению и обращаться в нуль **не может нигде в области**. А при отсутствии в области материальных точек, как её интегральное действие, так и его плотность, обязаны **быть равными нулю всюду в области**. Это возможно только если для такой области $\tilde{r}_{ik} = 0$.

жащих для введения координат в континууме. Т.е. при любых допустимых преобразованиях координат и при любых регулярных вариациях коэффициентов связности, призванных учесть зависимость от точки в пространстве-времени реперов масштабов, производящих эти координаты. А также любых иных структур, порождаемых связностью, поскольку вариации в связности порождают вариации этих структур²³. Очень важным моментом является именно регулярность применяемых вариаций. Сингулярности у нас жёстко связаны с событиями, никаких иных появляться не должно. Кроме, может быть, случая использования сингулярных систем координат. Использование их допустимо, но тогда **мы обязаны отслеживать все такие, “искусственные” сингулярности отдельно**. И вариации таких координат и определённых в них геометрических структур всё равно обязаны оставаться регулярными. В том случае, когда рассматривается возможность введения некоторой структуры (у нас сейчас это классическая метрика), согласованной хотя бы с частью полной связности, можно говорить о взаимно однозначном соответствии вариаций в этой структуре вариациям в обуславливающей её части связности. И наоборот:

$$\delta g^{ik} \leftrightarrow \delta g_{ik} \leftrightarrow \delta g \leftrightarrow \delta \tilde{\Gamma}_{jm}^l.$$

Обратите внимание на сходство и отличие **принципа стаци-**

²³ Для тех, кто знаком с формализмом Лагранжа, или с его аналогом, формализмом Гамильтона в теоретической механике, хочу подчеркнуть принципиальную разницу приведённой здесь формулировки принципа стационарности действия с формально точно таким же принципом минимальности действия в теоретической механике. Разница в физическом смысле вариаций описывающих систему (область мира) параметров. Здесь это **любые возможные изменения в описании**. То, что события и их связи, квинтэссенция нашего знания о выделенной области мира, должны при этом оставаться неизменными, стационарными при всех **возможных** вариациях описания является естественным, всем очевидным требованием. В теоретической механике вариации обобщённых параметров системы, “виртуальные перемещения” выглядят как переход к **невозможным** состояниям системы, т.к. **возможны, реализуются в мире** только те параметры, для которых некая их функция, действие, почему-то имеет по отношению к таким, странным вариациям свойство стационарности.

онарности действия и вариационного принципа применительно к произвольным скалярам в пространстве аффинной связности, порождающего структурные тождества. Сходство — речь идёт о скалярах и там и там. Вроде бы рассуждения §1.3 применимы полностью и соотношения для лагранжевых производных будут структурными тождествами нашего описания мира.

Но. В случае чистой, идеальной геометрии, связность, как образ изменчивости локальных реперов масштабов, порождающих координаты в континууме при переходе от точки к точке **молчаливо** (чаще всего) полагается непрерывно зависящей от точки. Сингулярности в объекте связности не рассматриваются. Все коэффициенты связности как функции точки, и их вариации тоже, предполагаются регулярными функциями, имеющими нужное количество регулярных же производных. С этой стороны мы расширили идеальную геометрию, применяя её к описанию мира. Наше действие не какой-то обычный скаляр, получающийся из регулярной связности, а именно та часть описания, которая напрямую указывает на особенности в коэффициентах связности, порождается ими, или, лучше, порождает их. Именно поэтому, та часть соотношений для лагранжевых производных, которая связывает сингулярности в связности с самими связностями как функциями в объемлющей эти сингулярности области, может и должна рассматриваться нами и как **структурные тождества нашего описания мира**, и как **уравнения для уточнения вида коэффициентов связности и любых порождённых ими тензоров как функций точки**.

Применяя к действию в области, записанному в виде (2.39), принцип стационарности действия, мы будем варьировать именно компоненты тензора классической метрики. Но имеем при этом ввиду, что метрика эта не более чем проявление, формулировка наличия определённых свойств у некоторой части связности, **позволяющих описать свойства репера масштабов таким образом**. В принципе, мы могли бы сразу использовать наше определение тензора энергии-импульса через плотность действия. Но, для уяснения многих важных для дальнейших выво-

дов взаимосвязей между разными структурами нашего описания мира, нам гораздо полезнее сейчас осуществить варьирование действия в интегральной форме напрямую.

Запишем линейную по вариациям метрики часть вариации функционала действия. Напомню, что, поскольку нас интересует только стационарность этого функционала, то линейной по вариациям независимых функций составляющей полной вариации действия вполне достаточно. Чтобы не тащить в выкладки всюду мнимую единицу вычислим её в следующей форме:

$$i\delta s = \int \delta s \, d^4x = k_g \left[\int \delta \tilde{r}_{ik} \, g g^{ik} d^4x + \int \tilde{r}_{ik} \, \delta(g g^{ik}) d^4x \right]. \quad (2.40)$$

Обращаю снова особое внимание на то, что вариации всех функций, как компонент метрики, так и компонент связности, а через них и метрического тензора Риччи, являются **регулярными функциями**, и никаких сингулярностей не имеют. А значит всё, что может произвести события и их непрерывный образ, действие, находится только во втором слагаемом правой части. Первое же слагаемое обязано обращаться в нуль всюду, т.е. в определённом смысле обязано давать условие на вводимую классическую метрику.

Рассмотрим сначала первый интеграл в правой части (2.40). Интересно будет отступить на несколько шагов назад и полагать пока, что мы рассматриваем самую общую симметричную связность и её полный тензор Риччи. При этом будем пытаться варьировать связность **независимо** от метрики, а значит этот интеграл должен обращаться в нуль независимо от второго интеграла в общей вариации действия²⁴.

Полный тензор кривизны можно формально рассматривать как антисимметризованную ковариантную производную самой связности. Формальность состоит в том, что связность тензором не является, и, вообще говоря, такая производная имеет мало смысла. Однако, вариация связности уже является полноценным

²⁴Такой подход к определению вариаций скаляра, сформированного из тензора Риччи и метрики был предложен Палатини.

тензором, и поэтому вариация полного тензора кривизны будет как раз таким полноценным тензором. После свёртки по соответствующим индексам для вариации полного тензора Риччи можно записать (1.23):

$$\delta R_{ik} = \nabla_p \delta \Gamma_{ik}^p - \nabla_i \delta \Gamma_k + T_{li}^p \delta \Gamma_{kp}^l. \quad (2.41)$$

Для симметричной связности при интегрировании первого члена в правой части (2.40) по частям, с учётом соотношения (2.41) получим интеграл по поверхности области от вариации связности, который равен нулю по условиям (на поверхности вариации нулевые тождественно²⁵) и ещё один интеграл, который тогда тоже должен обращаться в нуль. Запишем их, подставляя выражения для коэффициентов связности через ковариантные производные метрики (рассматриваемой просто как регулярный симметричный тензор):

$$\int [\nabla_p (\mathbf{g} \mathbf{g}^{ik}) - \delta_p^k \nabla_l (\mathbf{g} \mathbf{g}^{il})] \delta \Gamma_{ik}^p d^4 x = 0. \quad (2.42)$$

Поскольку интеграл должен обращаться в нуль для произвольных вариаций связности, то отсюда необходимо следует, что $\nabla_p (\mathbf{g} \mathbf{g}^{ik}) = 0$. Должны быть равны нулю и ковариантные производные как самой метрики²⁶ ($\nabla_p \mathbf{g}^{ik} = 0$), так и образованной из её определителя Δ -плотности ($\nabla_p \mathbf{g} = 0$). А это и есть условие согласования метрики со связностью. Условие, определяющее метрическую связность. Т.е. для метрической связности первый интеграл можно просто не рассматривать, его вклад нулевой тождественно.

²⁵Это условие при варьировании накладывается для того, чтобы выделенная нами в пространстве-времени область оставалась неизменной, не подверженной вариациям.

²⁶При **независимых** вариациях связности и метрического тензора последний рассматривается просто как тензор определённого строения — симметричный и регулярный, позволяющий построить с его помощью некоторые скаляры и их плотности. Никаких заданных соотношений между этим тензором и связностью при этом не подразумевается.

Таким образом, приходим к однозначному выводу, что, имея классическую метрику согласованной с метрической частью связности, мы получаем тождественное исчезновение первого интеграла в правой части (2.40), и требование

$$\mathbf{i}\delta s = \int \delta \mathfrak{s} d^4x = k_g \int \tilde{r}_{ik} \delta(\mathfrak{g}^{ik}) d^4x = 0 \quad (2.43)$$

означает, что **всюду**, где **тензор Риччи метрической части связности регулярен**, должно также выполняться соотношение

$$\tilde{r}_{ik} = 0. \quad (2.44)$$

Метрический тензор Риччи обязан быть равным нулю **всюду вне** линий существования массивных частиц. Очень ограничивающее условие на **метрическую часть** связности. Однако, сама связность в области пространства-времени при этом в нуль обращаться не обязана. Локальные реперы, согласованные с реперами, построенными на основе масштабов времени с линий существования массивных частиц с наложенными на них метрическими соотношениями вполне могут изменяться каким-то образом при смещениях от точки к точке в этой области. Каким именно — это нам и предстоит выяснить.

Теперь мы сделаем то, что могли сделать с самого начала — определим плотность тензора энергии-импульса, соответствующую рассмотренной нами плотности действия (2.38):

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{ik} &= \frac{\delta(k_g \tilde{r}_{pl} \mathfrak{g}^{pl})}{\delta \mathfrak{g}^{ik}} \\ &= k_g \left(\tilde{r}_{ik} - \frac{1}{2} \tilde{r}_{pl} \mathfrak{g}^{pl} \mathfrak{g}_{ik} \right) \mathfrak{g} \\ &= k_g \left(\tilde{r}_{ik} - \frac{1}{2} \tilde{r} \mathfrak{g}_{ik} \right) \mathfrak{g}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Первый член в итоговом выражении учитывает возможность локального изменения тензора Риччи, след на метрике которого

мы ассоциируем с действием в области. Второй член принимает во внимание возможность локального изменения метрического объёма области.

С одной стороны, мы ввели определение плотности тензора энергии-импульса через тензор Риччи метрической связности и классическую метрику. В этом смысле наше соотношение не более, чем структурное тождество. С другой стороны, принимая во внимание, что для области, содержащей массивную частицу, на её траектории мы уже имеем выражение для тензора энергии-импульса, записанное только через её собственные характеристики — массу покоя и касательный к траектории вектор, это соотношение мы обязаны рассматривать как уравнение, определяющее тензор Риччи и, соответственно, метрическую связность вместе с классической метрикой как функции координат через характеристики этой массивной частицы. Это именно то, что нам нужно — мы можем выяснить, какой функциональный вид должна иметь хотя бы метрическая часть связности, чтобы описывать имеющиеся в нашем распоряжении масштабы, введённые как идеализация их реальных прототипов, масштабов времени, базирующихся на событиях. Естественно, в тех предположениях и ограничениях об их идеальном продолжении на континуум, которые мы на данный момент приняли²⁷.

Пока мы не увидели ещё, каким конкретно образом можно интерпретировать введённые нами соотношения между классической метрикой, полем тензора Риччи и действием, непрерывным образом распределённых в области событий, как проявления именно физического поля гравитации, притяжения между массивными частицами. Мы лишь указали, что наши соотношения являются теми же самыми, что лежат в основе Общей Теории Относительности. Но можно также легко заметить, что наша интерпретация этих соотношений во многом отличается

²⁷Обратите внимание, что для всякой области, свободной от материальных точек, в приближении **чисто метрической связности**, полученный нами тензор энергии-импульса равен нулю, вследствие условий на метрический тензор Риччи. Только в следующих приближениях, при усложнении возможной связности в области, можно ожидать его отличие от нуля.

от принятой в ОТО. Ниже мы перейдем к обсуждению пути, на котором стало ясно, что именно поле классической метрики совместно с полем метрического тензора Риччи и ничто иное, действительно следует рассматривать как проявления гравитации в самом общем виде. Естественно, сделаем мы это на самом важном для классических приближений примере — на примере материальной точки, массивной частицы, пространственные размеры которой полагаются пренебрежимо малыми. При этом, следуя хорошо известным методам, использованным в ОТО для описания этого случая, мы постараемся сделать акценты на тех моментах, на которые обычно не обращают внимание, и которые отличают наше понимание ситуации от общепринятого.

2.6 Поле притяжения материальной точки

Полученное нами выражение (2.45) для плотности тензора энергии-импульса через метрику и тензор Риччи позволяет нам сформулировать уравнения, вполне достаточные для определения метрической связности и самой классической метрики в, пожалуй, самом важном случае, годном практически для всех классических приближений. В том случае, когда масса, как индикатор наличия в области событий, в пространстве рассматривается как точка, материальная точка.

Это приближение можно положить в основание всех остальных таких приближений, рассматривая не локализованные области существования массивных частей мира как распределения материальных точек. Дискретные в пространстве, либо непрерывные — зависит от конкретизации того или иного классического приближения.

Наше знание главной части плотности тензора энергии-импульса для точечной массивной частицы (2.30), если приравнять ему выражение (2.45) позволяет решить поставленную проблему определения вида метрической связности (и классической метрики тоже) в этом случае.

Т.е. мы можем определить и классическую метрику, и мет-

рическую часть связности, которые реализуют, хотя бы частично, распространение репера масштабов с траектории нашей базовой материальной точки на близлежащую область пространства-времени. Точнее, мы получаем возможность описать этими непрерывными структурами, связностью и метрикой, те свойства данной части мира, как континуума, которые согласовывают, связывают выделенные нами события в материальной точке, с другими возможными в данной области событиями. Может быть ещё не в полной мере, а только в обозначенном нами приближении.

Хочу ещё раз обратить внимание на понимание того, что при этом мы на самом деле делаем. Мы выбрали некоторый вид связности, метрическую связность, позволяющую нам ввести в описание мира дополнительную структуру, классическую метрику. Метрика эта нам потребовалась для формирования представления о свойствах чисто пространственного репера, согласованного с масштабом времени на траектории некоторой базовой частицы. Метрика обслуживает следующие цели:

- Вводит критерий отличия пространственных масштабов и пространственных направлений от временного.
- Определяет пространственные масштабы посредством временного.
- Даёт возможность сравнить величины разных масштабов репера, как отдельно пространственной части репера, так и полного. **Определяет** способ сравнения.
- Фиксирует “ортонормированность” репера. **Определяет** само это понятие.
- Определяет соответствие между контравариантными и ковариантными тензорами.
- Определяет “группу” инерциальных систем отсчёта, базирующуюся на данном временном масштабе и построенном с его помощью и с помощью метрики полном репере. Для

этого выбирается конкретный представитель этой группы, связанный с конкретной материальной точкой и фиксируется допустимая группа преобразований координат в области, содержащей эту материальную точку — группа Пуанкаре, состоящая из группы смещений начала отсчёта и группы Лоренца. Одним из определений группы Лоренца как раз может быть сделано условие сохранения **заданного вида** метрического тензора. Хотя в нашем изложении сохранение вида метрики мы получаем автоматически, как следствие различия между смыслом временной и пространственных координат и недопустимости их превращения друг в друга с помощью преобразований.

Репер масштабов, с установленными таким образом свойствами формирующих его векторов, мы принимаем за базу измерений, позволяющих оснастить область пространства-времени координатами. За базовую систему отсчёта. Изначально только на траектории базовой частицы. А вот условия на связность служат именно для распространения принятых соглашений о свойствах репера масштабов на всю область. Связность создаёт согласие всех локальных реперов во введённой в области системе координат друг с другом и с базовым репером на траектории базовой частицы. Не вообще, а с сохранением в каждой точке континуума всех самых важных принятых соотношений между векторами локального репера. Тех, которые при этом можно сохранить. Конкретный функциональный вид коэффициентов связности и определяется требованием такого согласия.

Потребовав согласия идеальной математической стороны описания с наличием в области событий в образе непрерывного действия, мы получили условия, дополнительные к уже выделенному виду (“метрическому”) связности, сужающие возможности её выбора ещё больше. И сейчас хотим пойти дальше, понять какие функциональные зависимости уже от координат могут соответствовать этим условиям в нашем конкретном случае материальной точки как базы всех измерений. И нашим ограничениям на принимаемые во внимание возможные преобразования

координат в каждой точке. Вот что значит “решить наши соотношения как уравнения”.

Решение этих уравнений хорошо известно и получено Шварцшильдом. Оно не является полностью универсальным для наших целей. Главным его недостатком является предположение об отсутствии в мире ещё чего бы то ни было, кроме нашей базовой частицы. Но, с учётом замечаний о возможности введения понятия о пробных частицах, как самое первое приближение, дающее возможность уяснить определённые и весьма важные черты возникающего при этом описания мира, это решение вполне работоспособно.

Итак, пусть в рассматриваемой нами области с одним существующим базовым масштабом времени влияния *внешнего мира нет*, пространство-время пусто, не содержит ничего кроме нашего единственного масштаба. Ясно, что это предельный, не реализуемый случай. Однако, можно мыслить наш масштаб столь удалённым от других, что влияние их вклада в плотность тензора энергии-импульса практически равно нулю в нашей области. Т.е. вдали от нашей базовой материальной точки пространство-время вполне можно полагать евклидовым. Метрический тензор Риччи равен нулю всюду в области, за исключением траектории нашего единственного масштаба. Других событий, кроме тех, что имеются на траектории базовой материальной точки в области нет. Довольно ясно, что таким образом сформулированные условия вполне могут быть противоречивы. В том смысле, что принятые в совокупности, могут стать препятствием для ввода требуемой структуры всюду в области. В первую очередь, сомнение в возможности полноценного решения нашей задачи вызывает необходимость совместить требование на метрику быть локально евклидовой для пустого пространства вдали от базовой частицы с нашим определением локальной евклидовости на её траектории. Это затруднение можно будет снять ограничением области применимости решения как раз вблизи базовой материальной точки. Основанием для этого может стать понимание того, что мы с самого начала работаем в классических прибли-

жениях, рассматривающих **нелокальные**, т.е. имеющие некий **пространственный объём** совокупности цепочек событий в качестве **точки в пространстве**. Точки, по определению не имеющие никакого пространственного объёма.²⁸ Соответственно, у нас в каждом таком приближении обязана иметься оценка именно некоторого пространственного объёма, который при идеализации описания мы полагаем бесконечно малым, величиной которого мы пренебрегаем. И приближение размеров нашей области (в сторону уменьшения) к этой оценке будет заведомо говорить нам об ухудшении качества нашего описания, о возможном несоответствии его реальному миру. Именно эта причина и заставляет нас в реальности опираться в большей степени на требование локальной евклидовости метрики вдали от базового масштаба. Только там наши приближения ближе всего могут описывать мир. Только с точки зрения самых больших пространственных масштабов можно считать точками значительные совокупности цепочек событий, которым мы приписываем достаточно большие массы покоя.

Во всех инерциальных системах координат, связанных с базовым масштабом, и классическая метрика, и связность обязаны иметь сферическую симметрию в пространственной части и быть постоянны во времени, поскольку *сами инерциальные системы определяются именно из этого условия*. И существование таких инерциальных систем для каждой массивной, материальной точки является основой нашего описания мира, одним из наших исходных постулатов.

²⁸Обратите внимание на аналогию с самим условием классичности наших приближений. Говоря о непрерывности событий на линии существования материальной точки, мы подразумеваем, что та самая “элементарная длина”, постоянная Планка, которую мы используем для связи непрерывного действия с дискретным набором событий, должна фактически рассматриваться как “нулевая”. Т.е. изменения действия обязаны быть много больше постоянной Планка, чтобы приближение классичности было применимо. Так и здесь, для всех приближений “пространственной точки”, некую длину, разную для разных приближений, тоже необходимо рассматривать как фактически “нулевую”. В том смысле, что только расстояния много большие этой “длины” могут применяться в каждом таком приближении.

Классическая метрика на бесконечности (в пустом вмещающем пространстве) стремится к евклидовой (с учётом того, что псевдоевклидовость в нашем описании обеспечивается изображением временной координаты мнимыми числами), опять же по определению. Пустому пространству можно приписать любые идеальные свойства. Нам удобно, чтобы оно считалось евклидовым. При таких условиях *достаточно далеко от базовой материальной точки* можно построить решение Шварцшильда для классической метрики. Это решение включает в себя также и определение коэффициентов связности, которые могут удовлетворять указанным выше условиям. Небезынтересно также отметить, что параллельно с нахождением компонент метрики и связности в решении Шварцшильда до определённой степени, хотя и не до конца, *конкретизируется и нелокальная система координат*, в которой эти соотношения имеют место. Т.е., формируя решение уравнений мы тем самым определяем и ту **стандартизованную** глобальную (для некоторой выделенной области мира) систему отсчёта, в которой описание мира становится для нас более ясным.

Одно из важнейших свойств выбранной для построения решения системы координат — то, что она является системой покоя базовой материальной точки, предоставляющей прототип масштаба времени. Отсюда следует постоянство всех компонент, как классической метрики, так и метрической связности во времени. Тогда функциями чего являются компоненты метрики и связности? От времени они зависеть не должны — система покоя. Должны зависеть от пространственных координат. От всех трёх? И да, и нет. Мы ведь ведём речь о поле метрики и связности, обусловленных наличием в области материальной **точки**. А раз точки, то в какую сторону в пространстве от неё не смещайся, всё должно выглядеть одинаково. Т.е. изначально имеется сферическая симметрия и что-либо меняться при смещении в любом **трёхмерном направлении** может только как функция **линейного расстояния** от точки, **радиуса**. Т.е. при выяснении функционального вида всех полевых структур в нашем случае

знание о том, что пространство является трёхмерным, излишне. Одна координата должна и может быть измерена. Две другие могут служить только параметрами, определяющими ту линию, то направление, которые делом случая, или нашего выбора стали линией (направлением) измерения единственной существенной пространственной координаты. Свойство это отнюдь не случайно, оно встроено в наше описание изначально. Тем, что связи между событиями в нашем мире выглядят для нас всегда бинарными, причина-следствие. Отсюда в базе описания находятся **цепочки** событий. Как многих событий, определяющих прототипы масштабов времени, так и всего двух, организующих описание пространства посредством измерения времени. Сама идея введения классической метрики у нас базируется на конкретизации выбора способа описания различия таких цепочек. Так что нет ничего удивительного, что линии и двумерные подпространства и соответствующие им структуры играют в нашем описании самую важную роль.

По этим причинам нам будет не очень удобно (хотя, безусловно, возможно и даже достаточно легко, см., например, [6]) искать решение нашей задачи в общих регулярных трёхмерных координатах. Гораздо лучше для этого подойдут координаты, имеющие сингулярную часть для описания трёхмерного пространства, в которых акцент делается именно на выделенности одной из координат, выделенности радиуса.

В основном я подразумеваю, что для описания мира мы используем полностью регулярные координаты. В этих координатах локально выполняется соотношение (2.8), в котором все компоненты трёхмерной части метрического тензора выражаются весьма просто — матрица тензора диагональна, и на диагонали стоят только единицы. Определитель полного метрического тензора равен произведению единицы, учитывающей наличие временной координаты, причём уже согласованной с пространственной единицей, на равный единице же определитель тензора $g_{\alpha\beta}$. Соответствующая Δ -плотность g также имеет величину, равную единице. И метрика, и её плотность в этом случае яв-

ляются *стандартизованными* структурами, и, поэтому, являются безразмерными числами. В отличие от обычного применения представления о размерностях компонент тензоров и их плотностей. Как я указал выше, сейчас нам будет полезнее использовать кроме регулярных ещё и другой вид координат, таких, в которых матрица метрического тензора, оставаясь диагональной, имеет заметно другой вид. Вид, явным образом устанавливающий наличие зависимости компонент классической метрики от введённых координат. Причём уже с самого начала, даже при условии использования самого “нулевого” предположения о виде связности — тождественного равенства её компонент нулю во всех точках области для всех регулярных ортонормированных систем координат. Важно при этом понимать, что эти сингулярные координаты и метрический тензор в них тоже следует рассматривать именно как **стандартизованные**. И именно эти стандартизованные координаты мы будем чаще всего использовать для построения базового описания мира в классических приближениях **изолированной, отделённой от остального мира** материальной точки.

Так что будем определять решение Шварцшильда для классической метрики и связности в специальной, сингулярной системе координат. Специальными координатами будут сферические полярные в пространственной части координаты: $\{ x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi, x^4 = ict \}$. Координаты θ и ϕ полагаются безразмерными параметрами, а радиус и время размерными. Как я уже не раз писал, эта система координат, вообще говоря, не принадлежит к допустимым, т.к. неадекватно описывает полную область. Причём неадекватность имеет место как при $\sin \theta = 0$ или $\sin \phi = 0$ (при непрерывном росте каждого из параметров θ и ϕ мы многократно описываем одну и ту же область пространства), так и на траектории масштаба, там где $r = 0$. А вот здесь уже координатная сингулярность (невозможность конкретизировать направление за отсутствием хотя бы кусочка линии, его реализующего) совпадает с наличием физической сингулярности, с наличием в этом месте материальной точки. Если мы припомним замеча-

ние о том, что вблизи самой материальной точки, т.е. вблизи координатной сингулярности само наше приближенное описание мира будет терять смысл, станет мало применимым, или совсем не применимым уже при значениях радиуса меньше некоторого значения, то эта координатная сингулярность особо беспокоить нас не будет. Формально мы её учесть обязаны, более того, наличие физической сингулярности при $r = 0$ будет определяющим детали решения фактором, но слишком близко к сингулярной точке полученное решение применяться не должно.

Кроме того, в такой системе координат у компонент стандартизованной метрики появляются размерности, причём не для всех компонент, а только для некоторых, тех, которые соответствуют *несущественным* координатам, рассматриваемым как безразмерные параметры (т.е. θ и ϕ).

В указанных координатах сферически симметричная и не меняющаяся во времени метрика тоже является, естественно, диагональной. Более того, эти координаты тоже ортогональные, хотя и не ортонормированные. Ортонормированными они быть не могут, т.к. две координаты, углы, явным образом стандартизованы, сделаны безразмерными параметрами. А координаты “радиус” и “время” остаются результатами измерений.

Запишем квадрат бесконечно малого интервала через компоненты метрики в “нулевом” случае евклидова пространства. Пространства с равной всюду нулю в декартовых координатах связностью (но не в этих специальных). Нулевая связность ведь тоже входит в подмножество метрических связностей.

$$-dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - c^2 dt^2. \quad (2.46)$$

Обратите внимание на то, что компонента метрики, соответствующая единственной существенной пространственной координате, радиусу, по-прежнему остаётся единицей. Безразмерной единицей, постоянной во времени и пространстве. А временная компонента метрики, также будучи постоянной, служит для пересчёта единицы времени в единицу расстояния. В терминах введённой нами координаты x^4 она тоже остаётся безразмерной еди-

ницей. Этим, по сути дела, сохраняется *декартова, ортонормированная* структура классической метрики в выделенной поверхности, описываемой двумя существенными координатами — $\{x^1 = r, x^4 = \mathbf{i}ct\}$. А вот компоненты, соответствующие дополнительным параметрам, определяющим положение в пространстве линии, по которой изменяется существенная координата, радиус, приобрели как зависимость от неё, так и её размерность. Обусловлено это тем, что сделав две дополнительные координаты пространства фактически **стандартизованными** параметрами *подразумеваемого возможного поворота выделенной линии*, а не полноценными координатами, т.е. фактически включив неявным образом *возможность преобразования части координат в само определение системы координат*, мы переместили их размерности в метрику. Причём явным образом закрепили этим единство величины масштаба для всех трёх координат. По сути дела, параметры эти явно указывают на то, что система координат, которую мы строим, не единственна, а определена с точностью до преобразований из группы **чисто пространственных поворотов** с параметрами поворотов θ и ϕ . Выбор нулевого направления отсчёта, нулевых значений этих углов при этом ничем не обусловлен, произволен.

Из соотношения (2.46) видно, что сингулярными являются не только сами координаты, но и метрический тензор, и, как мы увидим ниже, коэффициенты связности в этих координатах. Связано это с тем, что сингулярности явным образом присутствуют в нелинейных функциях пересчёта сферических полярных координат в ортонормированные декартовы и наоборот. Хотя и те и те являются ортогональными.

Чтобы иметь возможность сравнивать функциональный вид компонент метрического тензора и связности для пустого пространства (по определению евклидова) и области пространства-времени, содержащей материальную точку, я выпишу эти величины (только те, что не обращаются в нуль) сначала для пустого

пространства в нашей специальной системе координат²⁹:

$$\begin{aligned} g &= r^2 \sin \theta \\ g_{11} &= 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{44} = 1 \\ g^{11} &= 1, \quad g^{22} = r^{-2}, \quad g^{33} = r^{-2} \sin^{-2} \theta, \quad g^{44} = 1 \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= -r, \quad \tilde{\Gamma}_{33}^1 = -r \sin^2 \theta, \quad \tilde{\Gamma}_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \\ \tilde{\Gamma}_{12}^2 &= \tilde{\Gamma}_{21}^2 = \tilde{\Gamma}_{31}^3 = \tilde{\Gamma}_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \tilde{\Gamma}_{32}^3 = \tilde{\Gamma}_{23}^3 = \cot \theta. \end{aligned}$$

Мы хотим иметь возможность описать переход от нулевой (в регулярных декартовых координатах) связности, соответствующей пустому пространству-времени, к какой-то иной, обусловленной наличием материальной точки. Для этого мы модифицируем вид компонент метрики и запишем квадрат бесконечно малого интервала как форму с неопределёнными **безразмерными** коэффициентами, зависящими только от расстояния r до нашей материальной точки, которую мы поместили в начало наших пространственных координат (сферическая симметрия и настоящая сингулярность):

$$-dl^2 = V(r)dr^2 + W(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - U(r)c^2 dt^2. \quad (2.48)$$

Такое, достаточно простое выражение для бесконечно малого интервала возможно потому, что метрика в нашей специальной сингулярной системе координат остаётся диагональной при сохранении сферической симметрии, т.е. при признании того факта, что зависеть она может только от радиуса и ничего более. А радиус является одной из координат напрямую. Диагональность метрики, т.е. условие $g_{ik} = 0$, $i \neq k$, существенно облегчит в дальнейшем решение нашей задачи.

²⁹Обратите внимание на отсутствие компонент связности с индексами в различных комбинациях 1 и 4, т.е. теми, которые включают только пару существенных координат. Все они равны нулю, т.к. пространство-время пока полагается евклидовым и сечению по этой паре индексов соответствует ортонормированная стандартизованная **декартова** метрика

В “группе” специальных систем координат, допускающих представление бесконечно малого интервала в виде (2.48), можно конкретизировать определение радиуса, переменной r так, чтобы коэффициент W превратился в единицу. Естественно, если в данной системе это не так, то *делается переход в другую систему координат*, простым переопределением радиуса как одной из координат. Мы будем считать, что наш “пространственный радиус” уже выбран именно так. Такой выбор соответствует требованию, чтобы длина всякой окружности с центром в начале координат в этой системе координат была равна $2\pi r$. Этим мы *оставляем выбор параметров поворота всей трёхмерной части репера как целого всегда стандартизованным* и одним и тем же для всех значений определённой таким образом координаты “радиус”. Это также означает, что на самом деле сейчас мы определяем не единственный способ распространения масштабов с материальной точки на область, а всю возможную совокупность таких способов, описываемую этими параметрами.

Следовательно, нам нужно определить только вид функций V и U , коэффициенты при существенных координатах, и функции эти *не могут обращаться в нуль*. Они также **должны быть строго положительными**, если мы хотим, чтобы имела разность между пространственным (непосредственно не реализуемым) масштабом и реализуемым (существующим) масштабом времени.

Определим, как будут выглядеть коэффициенты связности в такой системе координат. Сначала получим формулы для их выражения через компоненты метрики в общем виде. Легко видеть, что отличаться от нуля могут только те коэффициенты связности, которые имеют хотя бы два одинаковых индекса. Т.к. если все три индекса разные, то соотношения Кристоффеля, связывающие метрическую связность и саму метрику, сразу говорят нам, что в силу диагональности метрики такие коэффициенты связности обязаны быть равными нулю. Выпишу коэффициенты связности, которые не обращаются в нуль при учёте диагональ-

ности метрики:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{kk}^k &= \frac{1}{2} g^{kk} \partial_k g_{kk} = \frac{1}{2} \frac{\partial_k g_{kk}}{g_{kk}} = \frac{1}{2} \partial_k \ln g_{kk}, \\
\tilde{\Gamma}_{kk}^i &= -\frac{1}{2} g^{ii} \partial_i g_{kk}, \quad i \neq k, \\
\tilde{\Gamma}_{ik}^k &= \frac{1}{2} g^{kk} \partial_i g_{kk} = \frac{1}{2} \frac{\partial_i g_{kk}}{g_{kk}} = \frac{1}{2} \partial_i \ln g_{kk} = \tilde{\Gamma}_{ki}^k, \quad i \neq k, \\
\tilde{\Gamma}_{jk}^i &= 0, \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Здесь $i, j, k = 1, 2, 3, 4$. **Важно! В этих формулах суммирования по повторяющимся индексам не производится.** Мы учли только диагональность классической метрики. Кроме того, из-за выбора системы покоя, для всех значений $i = 4$ или $k = 4$, появляющихся в формулах для коэффициентов связности как индекс производной по соответствующей координате (x^4), соответствующие коэффициенты в (2.49) тоже будут равны нулю.

Теперь я выпишу соотношения для компонент классической метрики и для коэффициентов связности уже через введённые нами неопределённые коэффициенты $V(r)$ и $U(r)$. Только те, которые не исчезают. При этом будут учтены все имеющиеся (и, конечно, отсутствующие) зависимости компонент метрики от на-

ших координат:

$$\begin{aligned}
 g &= \sqrt{VU} \, r^2 \sin \theta \\
 g_{11} &= V, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{44} = U \\
 g^{11} &= V^{-1}, \quad g^{22} = r^{-2}, \quad g^{33} = r^{-2} \sin^{-2} \theta, \quad g^{44} = U^{-1} \\
 \tilde{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{1}{2V} \frac{dV}{dr} = \frac{d \ln \sqrt{V}}{dr}, \quad \tilde{\Gamma}_{44}^1 = \frac{1}{2V} \frac{dU}{dr}, \\
 \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= -\frac{r}{V}, \quad \tilde{\Gamma}_{33}^1 = -\frac{r \sin^2 \theta}{V}, \\
 \tilde{\Gamma}_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\
 \tilde{\Gamma}_{21}^2 &= \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \tilde{\Gamma}_{31}^3 = \tilde{\Gamma}_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \tilde{\Gamma}_{32}^3 = \tilde{\Gamma}_{23}^3 = \cot \theta, \\
 \tilde{\Gamma}_{41}^4 &= \tilde{\Gamma}_{14}^4 = \frac{1}{2U} \frac{dU}{dr} = \frac{d \ln \sqrt{U}}{dr}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Сравните с (2.47). В классической метрике появились введённые нами неопределённые коэффициенты, V и U . Естественно, в ковариантной форме метрического тензора напрямую, а в контравариантной как обратные величины. В метрической плотности явным образом появилась *возможная* зависимость этой величины, а значит и напрямую связанного с ней локального метрического объёма области, от расстояния до базовой материальной точки.

В связности появились новые коэффициенты, описывающие зависимость радиального и временного масштабов при изменении радиуса. Они представлены в первой строке таблицы коэффициентов связности (2.50). Немного модифицированы коэффициенты, превращающие наши безразмерные параметры θ и ϕ в координаты, имеющие длину. Модификация эта обязана своим появлением учёту возможной зависимости величины радиального масштаба от значения радиуса как координаты. В последней строке (2.50) представлены переставшие быть нулевыми коэффициенты с индексами 1 и 4, описывающие взаимозависимость между временным и радиальным масштабами. Остальные коэф-

коэффициенты связности остались неизменными.

Компоненты тензора Риччи я сначала запишу через коэффициенты связности и метрику. При этом учту лишь соотношение $\tilde{\Gamma}_{kp}^p = \tilde{\Gamma}_k = \partial_k \ln \mathbf{g}$ между метрической плотностью и свёрнутой связностью³⁰:

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_{11} &= \partial_1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 - \partial_1^2 \ln \mathbf{g} + \tilde{\Gamma}_{11}^1 \partial_1 \ln \mathbf{g} - \\
&\quad - (\tilde{\Gamma}_{11}^1)^2 - (\tilde{\Gamma}_{12}^2)^2 - (\tilde{\Gamma}_{13}^3)^2 - (\tilde{\Gamma}_{14}^4)^2, \\
\tilde{r}_{22} &= \partial_1 \tilde{\Gamma}_{22}^1 - \partial_2^2 \ln \mathbf{g} + \tilde{\Gamma}_{22}^1 \partial_1 \ln \mathbf{g} - 2\tilde{\Gamma}_{22}^1 \tilde{\Gamma}_{12}^2 - (\tilde{\Gamma}_{23}^3)^2, \\
\tilde{r}_{33} &= \partial_1 \tilde{\Gamma}_{33}^1 + \tilde{\Gamma}_{33}^1 \partial_1 \ln \mathbf{g} + \partial_2 \tilde{\Gamma}_{33}^2 + \tilde{\Gamma}_{33}^2 \partial_2 \ln \mathbf{g} - \\
&\quad - 2\tilde{\Gamma}_{33}^1 \tilde{\Gamma}_{13}^3 - 2\tilde{\Gamma}_{33}^2 \tilde{\Gamma}_{23}^3, \\
\tilde{r}_{44} &= \partial_1 \tilde{\Gamma}_{44}^1 + \tilde{\Gamma}_{44}^1 \partial_1 \ln \mathbf{g} - 2\tilde{\Gamma}_{44}^1 \tilde{\Gamma}_{14}^4
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Остальные компоненты метрического тензора Риччи равны нулю тождественно.

Подставляя сюда соотношения (2.50), мы получим выражения для приведённых выше не равных тождественно нулю компонент метрического тензора Риччи через наши неопределённые

³⁰Обратите внимание на то, как часто эта свёртка связности появляется в наших выкладках. Это отнюдь не случайно. Дело в том, что коэффициенты связности являются в некотором роде “слишком детализированным” описанием изменения масштабов. Во многих случаях мы регистрируем проявления только некоторых общих для группы связностей свойств. Вот таким обобщением и является указанная свёртка. Здесь она отслеживает изменение метрического объёма. Далее мы увидим, что некоторая её часть описывает электромагнитные явления. А при изучении квантовых приближений обнаружится, что и само формирование векторов энергии-импульса элементарных частиц описывается именно этой величиной. А всё многообразие самих коэффициентов связности как полноценного геометрического объекта нужно лишь для покрытия всех возможностей изменения масштабов, хотя для описания мира мы вполне можем ограничиться лишь их частью. Просто потому, что имеем некоторую, и довольно большую *свободу выбора* описания. Которой и пользуемся для собственного удобства.

коэффициенты V и U :

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{11} &= -\left[\frac{1}{2}\frac{d^2 \ln U}{dr^2} - \frac{1}{4}\frac{d \ln U}{dr}\frac{d \ln V}{dr} + \frac{1}{4}\left(\frac{d \ln U}{dr}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d \ln V}{dr}\right] \\ \tilde{r}_{22} &= \frac{1}{V}\left[1 + \frac{1}{2}r\left(\frac{d \ln U}{dr} - \frac{d \ln V}{dr}\right)\right] - 1 \\ \tilde{r}_{33} &= \sin^2 \theta \quad \tilde{r}_{22} \\ \tilde{r}_{44} &= \frac{U}{V}\left[\frac{1}{2}\frac{d^2 \ln U}{dr^2} - \frac{1}{4}\frac{d \ln U}{dr}\frac{d \ln V}{dr} + \frac{1}{4}\left(\frac{d \ln U}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{d \ln U}{dr}\right]\end{aligned}\tag{2.52}$$

Для определения зависимости от радиуса наших функций V и U (решения Шварцшильда) вдали от базовой материальной точки (полагая на бесконечности совпадение нашей метрики с евклидовой) этих соотношений уже достаточно. Ведь вне базового масштаба событий нет и тензор Риччи должен быть равен нулю. Соответственно, (2.52) следует рассматривать как уравнения, приравнявая все $\tilde{r}_{kk}$ нулю. Воспользуемся этими соображениями.

Совместное равенство нулю $\tilde{r}_{11}$ и $\tilde{r}_{44}$ накладывает на функции V и U требование $V \cdot U = \text{const}$. Поскольку мы хотим, чтобы классическая метрика для пустого пространства-времени была (псевдо)евклидовой, то и V и U при очень больших r должны очень мало отличаться от единицы. Следовательно, $\text{const} = 1$ и $V = 1/U$. При этом **сразу для всех значений радиуса** устанавливается единое соотношение между единицами измерения радиуса и времени, т.е. значение постоянной c фиксируется как постоянная для **всей области**, но сами эти единицы, точнее, только одна из них, ещё остаются не фиксированными.

Всё, что нам теперь нужно определить — это единственная функция радиуса U . Все компоненты метрического тензора Риччи обращаются в нуль, если $r dU/dr + U = 1$, что эквивалентно условию $U(r) = 1 + \text{const}/r = 1 + A/r$.

Таким образом, компоненты сферически симметричной, не зависящей от времени классической метрики, ассоциируемой с пустым пространством-временем достаточно далеко от единственной массивной частицы, обеспечивающей определение базового масштаба времени, в специальных сингулярных системах

координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} g_{11} &= (1 + A/r)^{-1}, \quad g_{22} = r^2, \\ g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{44} = 1 + A/r, \\ g &= r^2 \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.53)$$

Постоянная A должна быть размерной и имеет размерность расстояния. Легко видеть, что отличие этой метрики от (псевдо)евклидовой состоит только в наличии поправки A/r в g_{11} и g_{44} , и, чем дальше от масштаба, тем ближе метрика к (псевдо)евклидовой. Важно отметить также, что метрическая плотность и, соответственно, метрический объём области остаются теми же самыми, как и для евклидовой метрики. Т.е. мы остаёмся в принятых нами ограничениях на группу возможных преобразований репера при смещении от точки к точке. Репер может только поворачиваться как целое. Величины его масштабов при этом не изменяются.

Компоненты согласованной с этой метрикой связности (метрической) записываются следующим образом как функции радиуса (и параметров θ и ϕ):

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{1}{2r} (1 + A/r)^{-1} \frac{A}{r} = -\tilde{\Gamma}_{41}^4 = -\tilde{\Gamma}_{14}^4, \\ \tilde{\Gamma}_{44}^1 &= -\frac{1}{2r} (1 + A/r) \frac{A}{r}, \\ \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= -(1 + A/r) r, \quad \tilde{\Gamma}_{33}^1 = -(1 + A/r) r \sin^2 \theta, \\ \tilde{\Gamma}_{21}^2 &= \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \tilde{\Gamma}_{31}^3 = \tilde{\Gamma}_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\ \tilde{\Gamma}_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \quad \tilde{\Gamma}_{32}^3 = \tilde{\Gamma}_{23}^3 = \cot \theta. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Теперь нам требуется установить, чему равна постоянная A в полученных зависимостях компонент классической метрики и метрической связности от радиуса. Для этого мы можем опереться только на известный нам вид тензора энергии-импульса базовой материальной точки (2.30).

Плотность собственного действия нашего базового масштаба представлена у нас как плотность дважды контравариантного

тензора. Для описания области мы использовали дважды ковариантный метрический тензор Риччи. А сравнивать нужно тензоры и плотности одинакового строения. Поэтому, для большей очевидности, будем сравнивать не два выражения для плотности энергии-импульса, а соответствующие им следы на метрике. Ведь именно они, в конечном счёте, и являются выражениями, позволяющими интегрированием определить значение действия в области.

Всюду вне нашей материальной точки и метрический тензор Риччи и, естественно, его след равны нулю, также как и тензор энергии-импульса самой материальной точки, вследствие его сингулярности, записанной с помощью δ -функций. Поэтому только эта сингулярность, которая должна присутствовать и в **функциональной** зависимости следа тензора Риччи от радиуса может нам позволить определить искомую постоянную.

Что нам следует делать при этом очень аккуратно — так это следить за размерностями геометрических величин при таких замещениях, т.к. классическая метрика в нашем описании это отнюдь не полноценный тензор, позволяющий при работе с ним отслеживать изменение размерностей автоматически. Это относительный тензор, геометрический объект, который преобразуется как тензор только относительно ограниченной группы локально лоренцевых преобразований координат. Более того, это ещё и стандартная структура, имеющая в регулярных координатах все свои компоненты безразмерными, наподобие стандартных функций — $\sin$, $\cos$, $\exp$ и т.д. Да ещё и плотность собственного тензора энергии-импульса базовой материальной точки записана весьма специфически, с помощью обобщённой функции а не стандартными средствами геометрии. Поэтому анализу размерностей в получающихся соотношениях нам придётся уделить особое внимание.

Для начала, мы запишем функциональное выражение для $\tilde{r}$,

сохраняя соотношение между U и V пока ещё не определённым:

$$\begin{aligned}\tilde{r} &= \mathbf{g}^{11}\tilde{r}_{11} + \mathbf{g}^{22}\tilde{r}_{22} + \mathbf{g}^{33}\tilde{r}_{33} + \mathbf{g}^{44}\tilde{r}_{44} = \\ &= \frac{2}{UVr} \frac{dU}{dr} + \frac{2}{Vr^2} - \frac{2}{r^2}.\end{aligned}\quad (2.55)$$

Далее, с учётом $V^{-1} = U = 1 + A/r$ мы можем записать

$$\begin{aligned}k_{\mathbf{g}}\tilde{r} &= k_{\mathbf{g}}\left(\frac{2}{r} \frac{d}{dr} \frac{A}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{2A}{r^3} - \frac{2}{r^2}\right) \\ &= k_{\mathbf{g}} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{A}{r}\right) \\ &= k_{\mathbf{g}} \nabla^2 \left(\frac{A}{r}\right).\end{aligned}\quad (2.56)$$

Последнюю строку мы получили, проделав замену дифференциального выражения в первой строке (2.56) на эквивалентную ему запись через функцию Грина (1.30) оператора дивергенции ∇^2 . Кроме того, явным образом учли, что в нашем случае функция, к которой он применяется, зависит только от радиуса и в операторе дивергенции остаются только соответствующие компоненты.

След главной части, собственного для материальной точки тензора энергии-импульса можно вычислять в любой, в том числе и регулярной системе координат. В той, в которой мы и записали его выражение через “четырёх скорость” и массу покоя, (2.30). Кроме того, поскольку мы можем делать это и в системе покоя базовой материальной точки, где у тензора собственной энергии-импульса имеется только одна не нулевая компонента, соответствующая временной координате, то значение этого следа очевидно: $T = m_0 c \delta(r)$.

Только нужно помнить ещё, что в этом соотношении размерность выражения соответствует не “правильной”, естественной размерности следа тензора (отсутствию размерности), а естественной размерности *плотности* скаляра, т.к. для относительного метрического тензора $\mathbf{g}_{ik}$ и его плотности $\mathbf{g}$, как для стандартных геометрических объектов, размерности установлены нами такие же, как для настоящих скаляров (т.е. их компоненты в

регулярных координатах являются безразмерными числами). И, соответственно, размерность плотности переключивается в тензор энергии-импульса. Для распределённой его формы за этим частично следит коэффициент k_g , а здесь часть размерности, связанная со временем, остаётся в массе покоя, а часть размерности, связанная с пространством, отслеживается δ -функцией, да и то только её радиальная часть.

Приравнивая эти два **функциональных** образа следа, мы получаем уравнение

$$T = k_g \tilde{r} = k_g \nabla^2 \left(\frac{A}{r} \right) = m_0 c \delta(r). \quad (2.57)$$

Из определения δ -функции вполне ясно следует, что $\tilde{r} = 0$, как и все $\tilde{r}_{ik}$ всюду вне особой точки $r = 0$. То самое условие, которое ранее нами было использовано для определения функционального вида U , заведомо выполняется.

Сравните это уравнение с классическим уравнением для гравитационного потенциала Φ :

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi \gamma m_0 \delta(r). \quad (2.58)$$

Здесь через γ обозначена классическая гравитационная постоянная, и все величины берутся в обычных для физики единицах (например — сантиметр, грамм, секунда). Достаточно очевидно, что уравнения (2.57) и (2.58) совпадают в точности в главном — в зависимостях от радиуса и массы. Различие в уравнениях имеется только в постоянных коэффициентах.

Вспоминая соотношение (1.30) для функции Грина, $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(r)$, мы, вслед за Эйнштейном, отождествим появление поправки к единичной для пустого пространства компоненте g_{44} с наличием в области гравитационного потенциала Φ :

$$\frac{A}{r} = \frac{2\Phi}{c^2} = -\frac{2\gamma m_0}{c^2} \frac{1}{r}, \quad (2.59)$$

с учётом стандартного решения уравнения (2.58) для гравитационного потенциала (через функцию Грина). Напоминаю, что

функцию A/r мы используем как стандартизованную, безразмерную функцию. Соответственно, при приведении всех величин в (2.59) к естественным единицам, она должна быть безразмерным числом, и коэффициент перед $1/r$ обязан иметь размерность расстояния.

Кроме того, мы получаем также и выражение для пока не определённого нами коэффициента k_g (устанавливающего связь между метрическим тензором Риччи в естественных единицах и безразмерным в естественных единицах действием) через гравитационную постоянную и другие постоянные — стандартный “угловой объём” 4π и принятое нами соотношение между единицами времени и пространства, скорость света c :

$$\frac{1}{k_g} = \frac{8\pi\gamma}{c^3}. \quad (2.60)$$

Соотношение между классическим гравитационным потенциалом Φ и полученной нами поправкой A/r устанавливается с помощью определения движения какой-либо материальной точки в поле тяжести нашей базовой материальной точки, которое мы будем рассматривать в следующей главе. Там мы и увидим причину появления коэффициента “ $2/c^2$ ” перед гравитационным потенциалом Φ .

Посмотрим теперь на полученные нами соотношения с разных сторон.

Во-первых, в нашем описании появилось давным-давно введённое в физику понятие “поле притяжения”, “поле гравитации”, влияние которого в классическом приближении на взаимное положение материальных точек сводится к взаимному притяжению массивных тел. В раннем изложении физики, начиная с Ньютона, это влияние описывалось наличием в пространстве, окружающем массивное тело, некоторого **потенциала** этого поля, проявляющегося в движении любого другого массивного тела, находящегося на некотором расстоянии от тела, помещённого в центр системы отсчёта, с **постоянно** увеличивающейся скоростью (с постоянным ускорением) **строго по направлению**

к центральному телу (“притяжение”). Причём важной характеристикой этого поля являлась **независимость** ускорения от каких-либо свойств “пробного” тела (т.е. того тела, за движением которого мы наблюдаем). Все эти свойства поля гравитации выражаются с помощью описания этого поля только одной скалярной величиной — гравитационным потенциалом. Потенциалом, определяющимся для всех расстояний от центрального тела только величиной массы этого тела и расстоянием до него.

Нетрудно видеть, что и в нашем описании мира имеется именно такая характеристика для каждой точки непрерывного пространства, окружающего выделенную нами в качестве базы системы отсчёта материальную точку. Полученный нами знак потенциала явно указывает на то, что скорость “пробной” частицы будет увеличиваться при приближении к центру системы отсчёта. Т.е. полученные нами поправки к виду метрического тензора описывают именно притяжение. Никакое “отталкивание” в виде каких-либо поправок к метрике *за счёт учёта наличия в области материальной точки* появиться в принципе не может. Я не буду здесь подробно останавливаться на описании взаимного движения массивных тел при этих условиях. Этому вопросу будет посвящена следующая глава. А сейчас я хочу сместить акцент рассмотрения на ту его сторону, которая находится в главном русле нашего подхода к описанию мира. На то, каким образом все эти свойства описания непрерывной области мира формулируются на языке изменения от точки к точке репера наших масштабов, создающих это описание. На свойствах подходящей для этого связности как образа непрерывных преобразований самих масштабов.

Чтобы уяснить, о чём с этой точки зрения говорит полученное нами выше решение Шварцшильда, достаточно сравнить два представленных ниже выражения. Одно для связи локального времени с временем глобальной системы координат для некоторой **материальной** точки, отстоящей на расстояние r от начала отсчёта глобальной системы координат, а другое для такой же инерциальной системы отсчёта, как и базовая, но движущейся в

этой точке относительно неё со скоростью v (2.12):

$$\begin{aligned} dl &= c \cdot d\tau = c \cdot dt \sqrt{1 - [-2\Phi]/c^2} = c \cdot dt \sqrt{1 - \frac{2\gamma m_0}{r} \frac{1}{c^2}}, \\ dl &= c \cdot d\tau = c \cdot dt \sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Как и ранее, через $d\tau$ обозначено *собственное* время для этой материальной точки. Не базовой материальной точки, система отсчёта которой распространена на окружающую область пространства. А именно той материальной точки, которая может находиться на расстоянии r от базовой.

Легко видеть, что оба выражения следует трактовать совершенно одинаково — как поворот Лоренца локальной *собственной* инерциальной системы отсчёта относительно базовой системы отсчёта на бесконечном удалении от центральной материальной точки. Что, собственно, мы могли предполагать заранее — ведь для того, чтобы иметь возможность использовать глобально в интересующей нас области стандартизованную классическую метрику, мы изначально ограничили возможные преобразования координат во всех точках области только локально лоренцевыми преобразованиями. Что и получили как решение нашей задачи — задачи построения такой глобализованной системы отсчёта в области вокруг материальной точки с заданной массой покоя. Мы просто показали, что наше предположение действительно можно реализовать как самосогласованное в рассматриваемом приближении. И получили нужное нам решение **в форме локализованных поворотов Лоренца**, а не чего-то другого. Причём, в **стандартизованной** форме описания этой группы преобразований. В той её части, которая затрагивает совместное преобразование масштабов времени и расстояния. Чисто пространственные повороты при этом заведомо учтены как стандартизованное описание самих локальных систем координат (и глобальной тоже) специальным выбором сингулярной системы отсчёта. Метрическая Δ -плотность в решении осталась всюду равной единице, гарантируя независимость от точки области общей для всех реперов в области величины принятого нами

для измерений времени масштаба. А с ним и остальных масштабов в репере, определяемых стандартизованными условиями наших постулатов.

То, что такой выбор системы отсчёта для рассматриваемой нами непрерывной области пространства-времени **всегда возможен**, обусловлено самим нашим классическим приближением — совокупность событий, для которой мы ищем описание, сосредоточена на единственной времени подобной линии. Соответственно, для пространства это материальная точка и описание его свойств возможно (даже обязательно, если мы хотим максимально простого описания, годного для всех таких приближений) в предположении строгой сферической симметрии относительно этой особой точки³¹. И полагая нашу метрику евклидовой на бесконечном удалении от центральной материальной точки мы зафиксировали как то место, где нет потенциала гравитационного поля (он там положен нами равным нулю), так и положение “базового” репера, относительно которого значения этого потенциала можно рассматривать как численный индикатор потенциального поворота текущего локального репера.

Что тогда в нашем решении является существенным? Существенной является полученная нами форма зависимости параметра локального лоренцева поворота от расстояния r до начала отсчёта глобализованной системы отсчёта и от главной характеристики базовой материальной точки, её массы покоя m_0 . Именно такая форма **необходима для согласования всех локальных инерциальных систем отсчёта** для всех материальных точек, которые могли бы быть в нашей непрерывной области, и введённой нами в этой области глобализованной системы отсчё-

³¹Приведённая интерпретация, вполне очевидная для нашего способа описания мира, **обосновывает** тот выбор знака, как у стандартизованной функции A/r , так и перед постоянной k_g в выражении для плотности действия через тензор Риччи, который мы сделали. Только при таком выборе Δ -плотность, построенная из тензора Риччи и классической метрики, может быть пропорциональна **заведомо положительному** действию области, содержащей материальную точку. Положительному потому, что в нашем описании действие является непрерывным образом числа событий. Которое может быть только положительным по своему смыслу.

та. При этом нам не следует забывать, что в условия согласования мы ещё явно внесли соответствие нашей связности евклидовой не около начала отсчёта, а на “бесконечности”, т.е. достаточно далеко от базовой материальной точки.

Правильно ли будет рассматривать “ -2Φ ” как квадрат некоторой “скорости”? И да, и нет.

Нет — потому, что это всё-таки вполне самостоятельное понятие, описывающее влияние выделенной материальной точки на окружающую её область пространства, и как таковое, обладает столь же самостоятельными свойствами, отличными от понятия какой-либо “скорости”.

И да — потому, что некоторые из этих свойств проявляются в описании мира так, что их можно связать с рассмотрением явлений с двух точек зрения одновременно — с точки зрения некоторой покоящейся системы отсчёта, и с точки зрения некоторой другой, движущейся относительно данной со скоростью $v = \sqrt{-2\Phi} = \sqrt{2\gamma m_0/r}$.

Важным моментом в понимании соотношения между гравитационным потенциалом и скоростью, величиной, связанной с углом поворота локальной инерциальной системы относительно глобализованной системы отсчёта, базирующейся на свойствах выделенной материальной точки, является осознание того, что это **потенциально возможная** скорость. Это та скорость (тот угол поворота), которая **накопится в результате переноса, движения** пробной материальной точки “из бесконечности” в данную точку пространства-времени. А если движение происходит не “из бесконечности”, то реальный накопленный в его результате поворот будет определяться **“разностью потенциалов”** между начальной и конечной точками перемещения. Точнее, результатом интегрирования вдоль линии перемещения. Подробнее описание проявления гравитационного поля в форме относительного движения материальных точек мы рассмотрим позже. Сейчас же я хочу остановиться на двух моментах.

- Гравитационный потенциал в нашем описании является **стандартизированной** функцией. Эта функция одинакова

для любых классических приближений, рассматривающих некоторые совокупности событий как материальные точки. Любые массы в этих приближениях рассматриваются сосредоточенными в единственной точке пространства. И как непрерывные линии в пространстве-времени. Соответственно, все такие приближения обязательно **имеют ограничение** — масштабы, меньшие некоторой величины, **не должны рассматриваться**. Запрещено выходить за рамки приближения, полагая, что полученные именно для этого приближения свойства описания остаются верными. Не остаются.

В каждом приближении ограничение должно быть своё — для бильярдных шаров одно, для планет другое, для звёзд третье. Некоторые расстояния, *измеримые масштабами*, вполне годными для “вложенных” приближений, **не должны** рассматриваться вообще. Описания в каждом из приближений разные, и их бесконтрольное смешивание может вести к неправильным результатам.

- Это ограничение совершенно аналогично ограничению допустимых скоростей движения. Никакое массивное тело не может иметь в наших описаниях мира системами отсчёта скорость равную, или большую скорости света. Просто потому, что мы **не можем** приписать масштаб времени линиям в пространстве-времени, которые в нашем описании ассоциируются с распространением света (с распространением электромагнитных волн). С особыми линиями, содержащими лишь два конечных события, находящихся на траекториях **разных** материальных точек. Но между этими точками есть бинарная связь причина-следствие, а значит и обязательный для нашего описания **промежуток времени и “кусочек” действия**. Поэтому мы принудительно обязываем наше описание мира приписать таким линиям некую скорость. Максимально возможную для связей между событиями.

Мы ещё не показали, что свет как физическое явление соответствует именно нашим выделенным цепочкам из двух событий на разных траекториях массивных частиц. К этому мы придём уже скоро. Хотя уже можно ясно видеть, что только на метрической связности мы остановиться не сможем. **Тензор Риччи метрической связности, и вместе с ним соответствующий тензор энергии-импульса в области вне материальных точек, при игнорировании их бинарных, особых связей, обязательно равен нулю и не может дать описания каких-либо волн, связывающих разные материальные точки.** А значит, метрической связности для описания таких бинарных связей нам не достаточно. Сейчас же мы опираемся пока только на то, что построенное нами описание, использующее особый смысл таких цепочек событий, в точности соответствует Специальной Теории Относительности.

- Для каждого приближения (т.е. для каждой конкретной массы, ассоциируемой с материальной точкой) можно вычислить свой **размер**, который в этом приближении необходимо рассматривать как “нулевой” пространственный размер. Конечно, это будет **предел, число оценочное**, в реальных приложениях следует отказываться от применения полученного описания на расстояниях от “центра” системы отсчёта заметно больших этого предельного значения. Эту величину часто называют **гравитационным радиусом** данной массы. Вычислить его можно, если положить $v^2 = -2\Phi = 2\gamma m_0/r = c^2$:

$$r_g = \frac{2\gamma m_0}{c^2}. \quad (2.62)$$

Полезно сделать некоторые оценки, как гравитационного радиуса, так и величины поправок r_g/r в компонентах классической метрики, соответствующих тем или иным массам обычных для нас массивных тел и расстояниям r от этих

тел. Это позволит составить представление о том, насколько важно или не важно учитывать возможное наличие таких поправок в конкретных ситуациях.

Для этого нам необходимо знать значение гравитационной постоянной. В классических приближениях (об этом я скажу немного больше в следующем параграфе) её значение мы можем получить только из опыта, изучая взаимное движение массивных тел, рассматриваемых как материальные точки. Полноценного описания движения мы пока ещё не касались. Ему будет посвящена следующая глава. Сейчас я просто буду использовать то значение гравитационной постоянной (приближённое конечно), которое получено из анализа огромного массива опытных данных. На сегодняшний день $\gamma \approx 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{сек}^2)$. Следующие десятичные знаки установлены уже не настолько точно. Но для наших оценок такой точности вполне достаточно. Значение скорости света мы для простоты возьмём ещё менее точное, $3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$. Нам ведь сейчас достаточно оценить лишь порядок величин. В результате мы получаем $r_g \approx 1.48 \cdot 10^{-28} \cdot m_0 \cdot \text{см/г}$.

Легко видеть, что фактически во всех достоверно известных нам случаях, когда мы применяем такого рода приближения для описания влияния больших масс (количеств событий, собранных в некотором ограниченном пространственном объёме) на окружающее их пространство, их реальные размеры заведомо превышают соответствующий **вычисленный** гравитационный радиус. А значит мы по необходимости перестаём применять такое приближённое описание заведомо не доходя до этого предела. Просто потому, что внутри массивного тела полагать его точечным никому не приходит в голову. Точечными считают уже малые части такого тела, а значит по факту применяются совсем другие классические (или даже квантовые) приближения.

Также совершенно пренебрежимо малой по сравнению с

единицей выглядит и стандартизованная поправка к компонентам классической метрики в случае обычных для нас тел с массами от граммов до десятков тысяч тонн на расстояниях от них порядка и больше одного сантиметра. А это означает, что при таких условиях в большинстве случаев мы можем пренебрегать отличием соответствующих компонент в метрическом тензоре от единицы, и использовать чисто евклидову классическую метрику. Но, заметьте, делать это можно только там и тогда, когда поправка добавляется к единице. Если же эта величина входит в соотношения отдельно от единицы, самостоятельно (как увидим ниже, это имеет место при описании движения материальных точек, там где главную роль играют переменные во времени величины), то, очевидно, пренебрегать ею никак нельзя.

Внимательный читатель может вспомнить, что ранее, в процессе обсуждения необходимости использования в нашем описании классической метрики, я сделал замечание о том, что распространение описания с линии существования материальной точки на полноценную область пространства-времени, эту линию содержащую, весьма похоже на переход от дискретных событий к непрерывной их последовательности. А там фигурировала постоянная Планка, как соединяющий дискретные точки минимальный кусочек непрерывности. И ожидал появления в описании чего-то аналогичного постоянной Планка, но для трёхмерного пространства, для “пространственной длины” как объединяющего уже особые линии в единый континуум кусочка непрерывности. Если посмотреть с этой точки зрения на параметр r_g , то должно быть понятно, что его роль именно такая — задавать некую минимальную “длину”, свою для каждого приближения, кусочек “пространственной непрерывности”. Эта величина в наши соотношения входит в трёх ипостасях — или как гравитационный радиус r_g , или как классическая гравитационная постоянная γ , или как постоянная k_g . Но входит всегда.

2.7 Калибровка классической метрики

Мы сформулировали и решили проблему расширения нашего описания мира системами отсчёта *специального, удобного для нас вида* с линий классических материальных точек на окружающее их пространство. Точнее, на непрерывную область не просто в пространстве, а в пространстве-времени.

Это именно очень специфическое описание мира, ограниченное нами сознательно. В чём состоят эти ограничения? Исходные, локализованные системы отсчёта базируются на явным образом выделенных непрерывных линиях, непрерывных образах цепочек событий. С этими линиями, и только с подобными им, связаны наши масштабы времени. Остальные, пространственные масштабы мы вроде бы можем выбирать произвольным образом, лишь бы они были линейно независимы, как в пространственной части, так и в общем репере, включающем масштаб времени.

Однако и здесь мы ограничили возможности выбора. Ограничили сами, хотя и опираемся при этом на свойства мира, которые нам требуется описать. Это необходимая нам уникальность описания цепочек из двух событий, лежащих на траекториях разных материальных точек, служащих реализацией разных масштабов времени. До сих пор эта часть описания остаётся не привязанной к какому-либо физическому явлению. Рассмотренная нами метрическая часть связности не даёт возможности описать связи такого рода, “через непрерывное пространство-время без участия имеющих массу покоя частиц”. Тензор энергии-импульса чисто метрической связности вне таких частиц тождественно равен нулю, а значит не может обеспечить изменение действия не только при смещении вдоль изотропных линий, но и вдоль вообще всех произвольных линий, соединяющих базовую материальную точку с какой-либо пробной частицей.

То, что мы рассматриваем достаточно компактные части мира как изолированные в пространстве точки, позволяет нам ещё больше сузить выбор пространственных масштабов — мы *имеем вполне обоснованную возможность* выбирать в таком приближении все три пространственных масштаба одинаковыми по ве-

личине. *Можем не делать этого, но тогда наше описание мира усложнится.*

Мы можем с большой долей уверенности утверждать, что такого рода локальные инерциальные системы отсчёта удастся связать с любой материальной точкой, отделённой от других некоторой непрерывной пространственной областью, где бы она не находилась.

Вот мы и захотели распространить описание мира системой отсчёта, связанной с какой-то одной линией существования материальной точки на всю содержащую её область пространства-времени так, чтобы и другие *возможные* в отдалённых от неё местах пространства-времени локальные системы отсчёта были некоторым образом (посредством аффинной связности) согласованы с нашей базовой системой и друг с другом.

И нам это в определённой степени удалось. Мы нашли ту связность, которая в первом приближении позволяет рассматривать все локально инерциальные системы отсчёта в нашей области совместно. Помимо уже выбранных нами ограничений на способ описания этой области мира, частично следующих из свойств мира, частично из наших произвольных (связанных с соображениями удобства и простоты описания) предпочтений, мы получили и навязанное принятыми нами предположениями о свойствах мира (о величине массы покоя базовой материальной точке) ограничение на зависимость наших локальных систем отсчёта от места в области с точки зрения глобализованной базовой системы отсчёта. **И должны рассматривать это ограничение на поведение как связности, так и нашей служебной стандартизированной структуры, классической метрики, как обязательное свойство самого пространства-времени, континуума,** который и является единственным связующим инструментом для всех имеющихся в нём событий. Пусть пока без описания особых цепочек из двух событий, но уже с описанием собственно непрерывности, неотъемлемой частью которой является базовая материальная точка.

Мы обязаны рассматривать введённое в описание поле гра-

витации, поле описывающей эти свойства части связности как **неотъемлемое свойство мира, рассматриваемого как непрерывность, целостность, содержащую выделенные нами события.**

Мы и рассматриваем ту стандартную функцию, которая описывает в нашем приближении необходимую согласованность, именно как свойство базовой материальной точки, распространённое на окружающее её пространство. Как физическое поле притяжения, порождаемое массой, сосредоточенной в этой точке. Точнее, на траектории выделенной базовой частицы. Как поле гравитации. В наших особых ограничениях на выбор координат это поле описывается, по сути дела, единственной стандартной функцией. Вот только не напрямую, как обычная скалярная функция во всех её проявлениях, а как составляющая в компонентах двух типов разных геометрических объектов — полноценного объекта связности и служебной классической метрики, являющейся для нас пока только относительным тензором. Тензором только относительно сильно ограниченной нами группы допустимых преобразований.

А что будет, если мы снимем часть или все наши **свободно принятые** ограничения на возможный выбор масштабов? Кроме того, ведь возможную для области связность мы тоже ограничили в некоторой степени сами. Ведь мы принудительно предположили её **полную** согласованность с нашей искусственной структурой, классической метрикой. А если расширить ещё и возможности для континуума иметь связность более широкого класса, удастся ли нам получить согласованное описание для учитываемых свойств выделенной области мира?

Вот на эти вопросы я и попытаюсь сейчас найти ответы.

Для начала посмотрим на наше определение классической метрики как стандартной структуры на траекториях материальных точек. Что значит “стандартная структура”? По определению, это диагональная матрица, со всеми единицами на главной оси. Почему мы берём такой стандарт?

Матрица потому, что нам нужно *связать в единое целое все*

четыре вектора репера, рассматривать *репер как единство, целостность*. Следим только за одной структурой, геометрической величиной, общей для всего репера, связывающей его в жёсткую конструкцию.

Единицы на главной оси потому, что мы подразумеваем, что все координаты измерены масштабами **одной и той же величины**. И сама возможность сравнения обусловлена наличием именно такой структуры. Т.е., если метрика является стандартной, то масштабы, **по определению**, имеют равные величины и взаимно ортогональны. Имея в своём распоряжении единственный прототип масштаба времени, мы всегда можем **считать** остальные масштабы такими и приписать **этому выбору** стандартный вид метрики. Но! Для этого нам требуется **уже чётко определённое описание особых, связывающих лишь два события, линий**. Требуется **зафиксировать** скорость, приписываемую таким линиям в каждой их точке равной единице. И такой эта скорость остаётся во всей группе локально инерциальных систем отсчёта, одним из экземпляров которой и является наша конкретная система координат, привязанная к выделенному масштабу времени.

А у нас фигурирует в стандартном описании в качестве такой скорости не единица, а некая “постоянная” c . В чём дело? Дело как раз в том, что у нас ещё нет необходимого описания таких важных для определения стандартной метрической формы линий. Но его существование мы уже предполагаем. Кроме того, масштабы времени и расстояния у нас традиционно различны. Вот эту разницу и **компенсирует** постоянная c . Её наличие в описании позволяет работать с разными величинами масштабов времени и расстояния как с одинаковыми, стандартным образом.

Почему мы ввели только одну такую постоянную, связывающую единицу нашего “расстояния” с единицей нашего времени? Ответ тоже очень прост. Сами наши классические приближения, все они, сколько бы мы их не наплодили, в основе своей базируются на главном предположении — существование массивных тел мы описываем непрерывными **линиями событий**, одномерны-

ми подпространствами. И мы всегда можем определить некоторое приближение, в котором, в той части пространства-времени, которую мы называем “пространством”, наше тело будет представлено точкой. И другие подобные тела будут точками. А для двух точек можно определить всего лишь одно единственное расстояние. Тем не менее, опыт и в таких приближениях требует введения трёхмерности “пространства”. Отсюда и стандартизация описания двух дополнительных измерений с помощью особой “угловой части”, и опора на единственную единицу для такого расстояния, и на единственную постоянную c .

Эта величина может рассматриваться нами как постоянная только при определённых условиях. Если выбраны конкретные единицы времени и расстояния, то специальное описание особых линий (которого у нас ещё нет!) должно позволить определить и конкретное значение этой постоянной. Постоянной потому, что далее мы имеем полное право так считать, и использовать только такие системы координат, в которых она одна и та же. Мы уже выяснили, что локально такая возможность у нас имеется всегда.

С другой стороны, в обще геометрическом смысле это вовсе никакая не постоянная величина. Достаточно изменить выбор единиц, хоть для времени, хоть для расстояния, и численное её значение будет другим. Т.е. это никак не скаляр с точки зрения геометрии. Величина этой “постоянной” зависит от выбора системы координат.

Именно по причине такой вот двойственности смысла c , “постоянная — не постоянная” мы и создаём стандартизованное описание, используем стандартную по определению метрику локально, **пересчитывая принудительно** координату времени в единицы расстояния. Вместо координаты $x^4 = it$ мы всюду в предыдущем рассмотрении использовали координату $x^4 = ict$. Полагая, что само значение этой константы всё-таки будет нам известно хоть для одного какого-то выбора единиц времени и расстояния. Пока это значение не было установлено мы используем буквенное обозначение для нашей “постоянной”.

А что произойдёт, если временная координата будет пересчи-

тываться в единицы расстояния с “неправильным” коэффициентом? Будет потеряно описание? Нет, будет потеряна **стандартность** описания, **если мы сохраним** за матрицей локальной метрики **свойство быть особым представлением** полноценного метрического тензора. При особых условиях. Также, как мы выделяем **собственное время** из всех других возможных времён. Как отделяем системы покоя от всех иных систем отсчёта (и координат в целом). Тогда в нашем описании изменится именно локальная матрица коэффициентов метрического тензора. И всё. Т.е. две эти стороны нашего описания, “постоянная” с и стандартная форма классической метрики неразрывно связаны друг с другом. Взаимно компенсируют друг друга. А при переходе к разным масштабам не только для расстояния “вообще” (в специальном, сферически симметричном случае) и для времени по-отдельности, но и к использованию разных единиц в пространственной части описания (а в некоторых случаях это будет нам гораздо удобнее), может появиться целых три таких разных “постоянных”. И усложнится строение матрицы метрического тензора.

А что будет со связностью? Если усложнение матрицы метрического тензора будет уходить от стандартизованного вида, следуя правилам сохранения за этой матрицей именно настоящих тензорных свойств, то метрическая часть связности (согласованная с метрикой как настоящим тензором) будет преобразовываться надлежащим образом, имея ввиду переход от особой, стандартной системы отсчёта, к произвольно выбранным **допустимым** координатам.

Что будет меняться ещё, кроме вида метрического тензора? На определённом этапе расширения группы допустимых преобразований координат будет потеряна установленная нами функциональная связь между тензором Риччи, метрическим тензором и плотностью действия. Формула с единственной постоянной k_g перестанет быть справедливой, её нужно будет весьма существенно усложнять. Однако, сам тензор Риччи не перестанет играть той роли, которую он играет в стандартизованном

описании. По-прежнему все проявления той части “физического поля” вовне материальной точки, которую мы называли гравитацией, можно будет отыскать в его компонентах. Все они должны быть равны нулю там, где связность регулярна.

Намного сложнее будет также описание поведения локальных реперов в каждой точке пространства-времени. Что важно для нас? То, что для любого такого допустимого описания **всегда** имеется возможность совершить обратный переход в стандартизованное описание подходящим выбором локальных масштабов. В особую, самую удобную для нас систему координат.

Таким образом, снятие *принятых нами* ограничений на преобразования координат, расширение группы этих преобразований до полной группы допустимых, будет эквивалентно использованию метрики как полноценного тензора. Однако, все те соотношения, которые мы получили как результат связи классической метрики с действием, те соотношения которые мы можем интерпретировать как проявления физического поля гравитации, могут быть правильно поняты только при переходе к описанию, стандартизованному в той или иной мере. Т.е. в произвольных координатах нельзя интерпретировать зависимость компонент метрического тензора (и компонент метрической части связности) от точки в континууме напрямую как проявление физического поля гравитации. Эта зависимость заведомо содержит в себе и все возможные следствия нестандартизованного выбора локальных реперов масштабов. Возможно весьма экзотического и мало полезного для понимания ситуации выбора.

На что ещё нужно обратить внимание? В использованной нами стандартизованной форме описания, классическая метрика — постоянная c — интервал dl , никак не фиксировано значение единицы расстояния. Она может быть произвольна, а метрику мы таким координатам приписываем одну и ту же, стандартную, с единицами на диагонали. Предположение это **не совместимо** с допущением для классической метрики быть частным образом полноценного тензора. Для локального описания инерциальных систем отсчёта эта проблема не решается никак. Только огра-

ничением группы преобразований. А вот в рассмотренном выше случае глобализации наших особых систем отсчёта на окружающее материальную точку пространство мы, по необходимости, попытались решить эту проблему практически тем же самым путём, как поступили ранее, “уравнивая” величины координат в единой формуле для интервала. Мы ввели дополнительную **компенсирующую** постоянную k_g , которая помогает нам обращаться с стандартизированной формой классической метрики также, как с настоящим метрическим тензором. Естественно, в тех ограничениях на выбор координат, которые позволяют такую трактовку наших конструкций описания мира. Ещё более прозрачной роль этой постоянной становится при её перемещении (в виде гравитационной “постоянной” γ или гравитационного радиуса r_g) в **стандартную** форму записи гравитационного потенциала. В форму, годную для всех классических приближений, рассматривающих совокупность событий как особую непрерывную линию в пространстве-времени, как материальную точку в пространстве.

Насколько эта новая постоянная, гравитационная постоянная, универсальна во всех её формах? Насколько же, насколько постоянна и универсальна постоянная c . Не больше, и не меньше. Т.е. она универсальна и постоянна **только** в специальных, стандартизованных системах отсчёта, **с выбранными единицами времени, расстояния, и массы**. И с выбранной стандартизированной формой матрицы классической метрики. Масса добавилась потому, что нам потребовалось согласовать величины масштабов не только в пространственной точке (на линии в пространстве-времени), но и в полном континууме, соответствующем некоторой полноценной (в смысле числа измерений) части мира. И точно также, как и в случае с постоянной c , скоростью света, конкретизация которой в нашем описании возможна только при ограничении некоторым конкретным выбором единиц времени и расстояния и с использованием стандартного описания электромагнитных волн (с привязкой этого описания к эксперименту), эта постоянная требует для своего определения

аналогичной конкретизации глобализованной системы отсчёта. С учётом произвольности центральной массы в таком стандартном описании, и отсутствия в классических приближениях связи единиц массы с единицами времени (и/или расстояния), значение этой гравитационной постоянной может быть получено только как результат экспериментов в стандартизованных условиях. Впрочем, и постоянная c в классических приближениях может быть получена только экспериментально, после выбора единиц и выбора математического образа того, что мы называем “светом”. Постоянную c мы надеемся далее определить как скорость света, стандартизованную скорость распространения электромагнитных волн, т.е. однозначно привязать её к определённом физическому, измеримому явлению. Встаёт вопрос, а к какому именно параметру пространства-времени, физическому, а в нашем способе описания мира и геометрическому, мы должны привязать гравитационную постоянную? Ответ на этот вопрос лежит в нашем определении действия для области через его пропорциональность метрической кривизне пространства-времени. Или наоборот, через установление пропорциональности метрической кривизны действию, а через него числу событий в области. Мы смогли ограничиться одним единственным коэффициентом в этой пропорциональности только потому, что предположили стандартность и единичность (евклидовость) нашей метрики вдали от базовой частицы. Наш коэффициент является компенсацией неверного с точки зрения тензорности (а значит измеримости) определения метрики. Он превращает метрическую кривизну, имеющую при стандартизованной метрике размерность $[l^{-2}]$ в безразмерное действие. В области, не содержащей частиц (событий), действие, а значит и метрическая кривизна равны нулю. Поэтому опереться на это соотношение для определения гравитационной постоянной в этом случае мы вроде бы не можем. Однако, мы знаем также, что практически “пустые” для нас области мира всё-таки содержат **в среднем** некоторое количество частиц (событий). И на практике, определяя гравитационную постоянную мы опираемся именно на эту усреднённую ве-

личину. Ведь в классических приближениях мы все более-менее компактные массивные тела рассматриваем на достаточно больших от них расстояниях как материальные точки. А это и значит, что на долю “пустоты” остаётся только та **разреженная** составляющая массивных частей мира, которую мы можем считать как некое “среднее” состояние для Вселенной как целого, как ту рассеянную всюду часть событий, которую мы не можем собрать в единое целое при классическом описании мира. Поэтому мы вполне можем рассматривать гравитационную постоянную в форме k_g как **среднюю метрическую кривизну** пространства-времени.

Всё, что было сказано о взаимосвязи постоянной c и классической метрики как ограниченного представления полноценного метрического тензора в полной мере переносится и на связь возможности формулировки описания поля гравитации с **единственным** представлением этой постоянной. В форме k_g это видно лучше, чем в форме γ . Введение единственного коэффициента k_g , призванного сделать стандартизованную метрику соответствующей по поведению полноценному метрическому тензору, работает правильно только при ограничении локальными координатами с единственной единицей измерения, расстояния или времени. Общая такая величина может изменяться сразу для всей области. Введённый коэффициент компенсирует это изменение. Но если мы расширим допустимый выбор координат возможной зависимостью этой единицы от точки в пространстве-времени, или, более того, допущением разных зависимостей единиц для разных координат, то сохранение за метрикой тензорного характера потребует либо увеличения числа таких коэффициентов, что совсем уж сложно, либо **обязательного поглощения** всех этих коэффициентов самим метрическим тензором. И это вполне возможно. Вот только хорошо известная и удобная нам стандартная форма описания гравитационного поля перестанет быть применимой для таких, произвольных (но допустимых!) систем координат. И объект **метрической части** связности при таком расширении употребления метрического тензора

нужно преобразовывать надлежащим образом, чтобы он оставался согласованным с метрикой.

Простой пример. В физике неоднократно обсуждалась гипотеза о *не постоянстве* “гравитационной постоянной”. В нашем описании мира мы можем эту гипотезу легко удалить из рассмотрения. В самом деле, пусть гравитационная постоянная изменяется, например, со временем для всего мира. Для нас уточнение “со временем” не значит ничего, т.к. мир для нас не пространство, существующее во времени, а имеет своим образом единую математическую конструкцию, “пространство-время”. Поэтому мы можем говорить просто о зависимости гравитационной постоянной от точки в пространстве-времени. Зависимость означает, что наша постоянная в таком описании является некой **функцией** точки. Но у нас эта постоянная неразрывно связана с матрицей классической метрики. Т.е. зависимость постоянной реализуется в виде зависимости от точки метрической нормы всех векторов. И, в первую очередь, единиц измерения в репере. Соответствующая метрическая связность будет иметь порождённую этой зависимостью свёртку, равную, как мы знаем, градиенту логарифма метрической плотности. Что нам мешает **переопределить** классическую метрику так для всей области разом, чтобы сделать этой градиент равным нулю? Ведь это не градиент скаляра, а градиент скалярной плотности. И можно компенсировать его подходящим выбором зависимости от точки в области **определителя** преобразования координат. Т.е. уточнением того, какие величины масштабов для разных локальных реперов мы полагаем равными **по определению**. Какие системы координат мы считаем согласованными. При таком способе согласования локальных реперов наша гравитационная “постоянная” **обязана** быть в нашем описании одинаковой для всех точек области пространства-времени. А ведь именно это мы и подразумеваем в нашем первом приближении к описанию мира, говоря о “согласованности” локальных реперов. Они могут быть “повёрнуты” (обязательно гладким образом в смысле зависимости параметров поворотов от точки) по отношению к базе или друг другу.

Но величины всех масштабов от точки к точке в этом приближении меняться не могут.

Что для нас важно? Как и в локальном случае при “освобождении” значений постоянной c , у нас **всегда** остаётся возможность перейти от такого, возможно очень сложного описания мира, к нашему стандартному описанию. К тому, которое мы называли решением Шварцшильда. Естественно, возможно это в конкретных условиях — в классическом приближении изолированной материальной точки.

Вот эту возможность построить стандартное описание для части континуума, мы будем называть **калибровкой классической метрики**. Калибровка — это переход в такую систему отсчёта, в которой классическая метрика обладает заданными стандартными свойствами, в которой применимы все наши ограничения на локальное поведение метрического тензора как стандартизированной структуры. Точнее, это выбор всей группы таких систем отсчёта, как базовых. Ведь я ранее ясно указывал, что в реальности мы определили стандартизированное описание не для единственной системы отсчёта, а для довольно обширной группы таких систем.

Из того, что я много раз уже повторял ранее, можно заключить, что калибровку нужно рассматривать состоящей из двух частей.

- Первая часть должна определить цель калибровки, т.е. какие системы отсчёта считаются откалиброванными. Эта задача ещё стоит перед нами, т.к. мы установили для себя лишь **свойства** классической метрики, которые мы **припишем** таким системам. Мы всё время говорим, что это будут такие системы, в которых нужным нам образом будут описываться электромагнитные волны. Пока электромагнитных явлений в нашем описании нет, нет и окончательных условий для определения наших привелигированных систем отсчёта.
- Вторая часть процесса калибровки состоит в преобразовании координат в нужные нам стандартизированные. Необхо-

димось этой части можно определить только если у нас уже имеется вид либо метрического тензора, либо метрической части связности как функций координат и он отличается от желаемого. Вторым критерием будет выполнение того условия на описание электромагнитного поля, которое мы ещё не сформулировали явно.

На настоящий момент учёт возможного строения связности, которая, в отличие от метрики, являющейся удобной, необходимой, но всё-таки дополнительной служебной структурой, остаётся по-прежнему для нас основной частью описания, ограничен только поведением той её части, которая согласована с метрикой. Мы фиксируем **возможное поведение только метрической части связности**. Ограничения на её вид, условия на изменение метрической части связности при смещении от точки к точке для областей пространства-времени **полностью** свободных от энергии-импульса получены нами в полностью ковариантном виде, справедливом для любых допустимых координат — это требование равенства нулю метрической части тензора Риччи (2.43, 2.44):

$$\tilde{r}_{ik} = 0. \quad (2.63)$$

Это очень ограничивающее условие, не принимающее во внимание ни наличие где бы то ни было событий в виде материальных точек (точнее, базирующееся именно на отсутствии их в данной области), ни тех самых особенных связей между материальными точками, которые и заостряют наше внимание именно на особой роли метрической связности. Эти особенные связи в нашем описании должны по необходимости изображаться распределённой в пространстве-времени плотностью энергии-импульса, дающей на метрике нулевой след, но тождественно в нуль не обращающейся. Потому что интеграл от вектора энергии-импульса вдоль любой такой связующей линии обязан давать пусть минимальное, но конечное, а не нулевое изменение действия. Соответственно, полученное нами решение Шварцшильда заведомо

даёт описание лишь части связей между материальными точками. В некотором роде “связи без непосредственной зависимости”, такие которые описывают некий общий фон, создаваемый наличием в области материальной точки. Бинарные связи и связи посредством других материальных точек, имеющих с данной общее событие этой, метрической связностью не описываются. Как это должно быть ясно из нашего рассмотрения вариации действия, ассоциированного с областью, проведённого в §2.5 (см. метод Палатини), выделение метрической части связности, т.е. той части, что может быть согласована с метрикой, не оставляет для метрического тензора Риччи возможности иметь такую составляющую, которая даёт нулевой след на метрике. Весь метрический тензор Риччи необходимо обязан обращаться в нуль всюду, где нет материальных точек. Иными словами, метрическая часть связности не может описывать нужные нам особые связи между материальными точками. Эта часть связности описывает только само наличие таких точек, имеющих массу и частично их влияние на некоторые свойства пространства-времени. Для более полного описания взаимосвязей континуума и событий в нём нам требуется принять во внимание дополнительные возможности для связности, расширить возможности континуума изменять репер масштабов при смещении от точки к точке.

И расширение это необходимо, даже если мы захотели бы остановиться только на уже рассмотренном нами приближении к описанию мира. Ведь само это приближение в одной, существеннейшей части не является полностью определённым. Мы полагаем, что можем определить пространственные масштабы заданным образом через временной. Однако, самой процедуры этого определения, базирующейся на интерпретации **конкретных** событий как нужных для этой процедуры пар, мы не имеем и **не можем** иметь в этом приближении.

В связи с этими замечаниями, я перепису соотношение между метрическим тензором Риччи и плотностью тензора энергии-импульса в виде, более подходящем для дальнейшего обобщения,

чем соотношение (2.45):

$$\tilde{r}_{ik} - \frac{1}{2}\tilde{r}\mathbf{g}_{ik} = \frac{1}{k_g\mathbf{g}}\mathfrak{T}_{ik}. \quad (2.64)$$

В такой форме мы можем рассчитывать на определение метрической части связности не только в простейшем случае материальной точки в пустом пространстве (т.е. только на основе учёта главной части тензора энергии-импульса), но и в тех случаях, когда принимается во внимание связность более широкого вида, чем метрическая. Тогда дополнительная часть связности тоже будет давать свой вклад как в действие области, так и в плотность тензора энергии-импульса, модифицируя описание возможных связей между событиями в области. Конечно, вклад этот должен быть представлен тензором энергии-импульса достаточно специфического вида — след этого тензора на метрике обязан быть нулевым. Потому, что **все возможные события уже учтены в массах материальных точек**. В главных частях тензора энергии-импульса.

Важно! В этом соотношении фигурирует постоянная k_g . Поэтому, принимая во внимание всё сказанное о соотношении общих систем координат и “стандартизованных” систем отсчёта, должно быть ясно что в такой форме его можно применять без ограничений только именно в “стандартизованных” системах отсчёта, т.е. **после их калибровки**, когда классическая метрика считается уже приведённой к стандартному виду. Классическая метрика **может** рассматриваться нами как **тензор** при использовании **произвольных допустимых (т.е. не вырожденных, регулярных, пусть и не всюду)** координат. Однако, как для её определения, так и для сравнения результатов вычислений с опытом, нам **всегда** необходимо использовать именно **стандартизованные** координаты, в которых часть истинной тензорности у метрики мы **сознательно отбираем**. А сама процедура стандартизации координат у нас не доведена пока до необходимой замкнутости. А значит и процедура калибровки точно также остаётся не до конца определённой.

Хочу сделать одно важное для будущих выкладок замечание. Тождества Бианки (1.15), справедливые для любого пространства аффинной связности, связность которого регулярна, а значит и для нашего описания там, где метрическая связность регулярна, требуют *тождественного* исчезновения ковариантной дивергенции³² (относительно метрической связности, конечно) левой части соотношения (2.64). Но это также означает, что и правая часть этого равенства обязана иметь **метрическую** дивергенцию равную нулю. Т.е. все тензоры энергии-импульса обязаны иметь нулевую метрическую дивергенцию. Грубо говоря, энергия-импульс в этой форме **сохраняется** в системах отсчёта, использующих откалиброванную классическую метрику.

Там, где сама связность сингулярна, поведение этой дивергенции требует особого рассмотрения. В §3.6 мы обсудим причины, из-за которых в нашем описании метрическая дивергенция плотности **полного** тензора-энергии импульса обращается в нуль **всегда**. Это свойство интерпретируется в физике в терминах сохранения энергии-импульса в области. Сохранения применительно к области, а не к линии существования материальной точки, на которой имеет место сохранение вектора энергии-импульса. И применительно к специальным для нас системам отсчёта, связанным с введением классической метрики. При учёте сингулярного характера тензора энергии-импульса на линиях существования материальных точек эти два типа сохранения объединяются в один. По сути дела, это объединение следует из двух основополагающих для нашего описания моментов:

1. Из сохранения базового масштаба времени и двойственного ему градиента действия, вытекающего из того простого факта, что базовую единицу времени мы определяем с помощью счёта событий, фактически действия. Т.е. из существования системы покоя для каждой материальной точки.
2. И из объединения всех событий в континуум только при-

³²По русски слово дивергенция звучит как “расходимость”, что должно говорить само за себя в нашем случае. Расходимость это и есть частный вид особенности, сингулярности.

нятием во внимание их связей, не допуская при этом появления новых событий, не учтённых ранее в локальных векторах энергии-импульса (локальных градиентах действия). Всё, что может существовать между материальными точками уже увязано с событиями, создающими массы покоя этих материальных точек. Учтено в них. Только наш подход к созданию описания последовательным усложнением связности концентрирует внимание на её отдельных составляющих.

2.8 Электромагнитное поле как общее понятие

Перейдём теперь к удалению некоторых принятых нами ограничений на вид связности, к расширению принимаемых во внимание возможностей для континуума изменять репер масштабов при смещении от точки к точке. При этом, как уже полученное первое приближение к возможному описанию мира, мы будем предполагать наличие в объекте связности метрической части. Возможно определяемой через распределение энергии-импульса в области несколько иначе, чем это было установлено для простейшего случая материальной точки, имеющей единственной своей характеристикой массу (энергию) покоя в качестве не зависящей от описания “постоянной” характеристики. Но новые соотношения обязаны будут явным образом учитывать все выводы, полученные ранее.

По-прежнему игнорируем возможность наличия кручения в нашей области. Формально мы можем просто расширить допустимую связность в области до произвольной симметричной связности. И так и поступим в процессе наших выкладок. Однако такой подход будет не до конца следовать нашей программе. Ведь мы хотим включить в описание только **необходимые и достаточные для описания мира** свойства связности, а не вообще все свойства, возможные в идеальном, чисто математическом описании. В математике метрический тензор Риччи может быть

каким угодно, если удовлетворяет тождествам Бианки. А мы получили утверждение о том, что только метрические пространства с равным нулю тензором Риччи могут годиться в первом приближении для описания нашего мира. Да, это приближение ещё не является само согласованным до конца, но эта-то часть в нём обязана присутствовать.

Так что же мы можем учесть дополнительно к метрической связности, оставаясь в ограничениях симметричной связности и в ограничениях нашей программы? Такое, что проявляется инвариантным образом — или есть, или нет? Вспомните соотношения (2.35) и (2.36). Наличие **ненулевого** тензора $\bar{F}_{ik}$, порождаемого симметричной связностью, оставляет соотношение между её полным тензором Риччи и плотностью действия в области формально точно таким же, как и для метрической части связности. Сохранение указанной связи позволяет нам сделать первый уточняющий шаг именно в этом направлении, будучи уверенными, что всё, что мы уже сумели определить касательно свойств метрической части связности останется при этом неизменным.

Посмотрим, как изменяется наше описание действия, ассоциируемого с областью, если вторая инвариантная свёртка полного тензора кривизны, тензор $\bar{F}_{ik}$ не обращается в нуль тождественно.

Для удобства я приведу здесь снова соотношение (2.35):

$$\mathfrak{s} = k_g \bar{R}_{ik} \mathfrak{g} g^{ik} = k_g (\bar{r}_{ik} - \frac{1}{2} \bar{F}_{ik}) \mathfrak{g} g^{ik} = k_g \bar{r}_{ik} \mathfrak{g} g^{ik}. \quad (2.65)$$

Очевидно, что в это соотношение интересующий нас тензор не даёт явного вклада в силу своей антисимметрии, даже если он и отличается от нуля. Если его влияние и имеется, то опосредовано, через тензор $\bar{r}_{ik}$, через его модификацию в сравнении с метрическим тензором Риччи $\tilde{r}_{ik}$.

Таким образом, из приведённого выше, *линейного* по одной из свёрток кривизны, тензору Риччи, соотношения пропорциональности между относительным скаляром, характеризующим свойства континуума в области и действием, как образом числа событий в этой же области, мы не можем увидеть как это

действие *определяет* те компоненты связности, которые ответственны за отличие от нуля второй свёртки кривизны, тензора $\bar{F}_{ik}$.

Чтобы увидеть это влияние нам придётся рассмотреть следующие по уровню сложности плотности (веса $+1$)³³, которые можно сформировать из имеющихся двух свёрток полного тензора кривизны и классической метрики. Их всего две, две квадратичных по своим составляющим плотности:

$$\bar{\mathfrak{R}}_{\mathbf{g}}^{(2)} = \mathfrak{g} \bar{R}_{kl} \bar{R}^{kl} = \mathfrak{g} (\bar{r}_{kl} \bar{r}^{kl} - \frac{1}{4} \bar{F}_{\mathbf{g}}), \quad (2.66)$$

и

$$\bar{\mathfrak{F}}_{\mathbf{g}} = \mathfrak{g} \bar{F}_{kl} \bar{F}^{kl} = \mathfrak{g} \bar{F}_{kl} \mathfrak{g}^{kj} \mathfrak{g}^{lp} \bar{F}_{jp} = \mathfrak{g} \bar{F}_{\mathbf{g}}. \quad (2.67)$$

Индекс (2) у первой из этих плотностей призван отметить её квадратичность по тензору Риччи и метрическому тензору. И то, что это **второй** кандидат на пропорциональность плотности действия области, не отменяющий, а дополняющий уже принятую нами пропорциональность плотности действия линейной по тензору Риччи плотности $\bar{\mathfrak{R}}_{\mathbf{g}}$. У плотности $\bar{\mathfrak{F}}_{\mathbf{g}}$ я его не поставил по простой причине — линейного по тензору $\bar{F}_{ik}$ кандидата на такую пропорциональность не имеется. Это первая и единственная подходящая на такую роль плотность. Заметим, что вторая плотность естественным образом входит как составная часть в первую. Тогда в качестве соотношения пропорциональности между плотностью действия (возможно только её некоторой дополнительной частью) и нашими квадратичными по метрике и обоим свёрткам полного тензора кривизны мы можем без потери общности использовать следующее выражение:

$$\mathfrak{s}^{(2)} = k_{\mathbf{g}}^{(2)} \bar{\mathfrak{R}}_{\mathbf{g}}^{(2)}. \quad (2.68)$$

³³Только плотности веса $+1$ могут дать нам пропорциональность их интегралов действию через свои сингулярности. Плотности другого веса интегрировать нельзя, это неинвариантная операция. Формально проведённое интегрирование даст результат, который не будет скаляром, инвариантом.

Индекс (2) для плотности действия, пропорциональной нашей квадратичной по тензору Риччи плотности появился здесь снова потому, что мы пока не можем установить, является ли эта плотность полной плотностью действия в области или описывает только некоторую её часть. Хотя можем с уверенностью сказать, что вклад $g\bar{F}_g$ в эту плотность будет совершенно определённо именно дополнительным к рассмотренному нами ранее вкладу метрического тензора Риччи. Следовательно, нам всё-таки нужно различать все введенные нами плотности, пропорциональные полной плотности действия или её частям. Мы обсудим этот вопрос подробнее ниже.

Соотношение это априори должно быть справедливо тогда, когда справедливо и соотношение (2.35, 2.65). Т.е. для стандартизованных систем отсчёта, подразумевающих процедуру калибровки уже совершенной. Для более общих систем координат это не обязательно. Могут возникнуть те же соображения относительно смысла и единственности новой “постоянной” $k_g^{(2)}$, что и для постоянной k_g . Обсуждение происхождения, размерности и величины этой новой постоянной мы отложим на более позднее время, когда проясним смысл добавленных в рассмотрение свойств связности, которые проявляются при $\bar{F}_{ik} \neq 0$.

Использование этой, дополнительной плотности, существующей в пространствах аффинной связности с введенной метрикой как пропорциональной действию области не может вести к противоречиям с выводами, полученными ранее. В самом деле, при $\tilde{r}_{ik} = 0$ и $\bar{F}_{ik} = 0$, и с учётом результатов метода Палатини, вариация этой плотности исчезает всюду, где равна нулю и вариация линейной по тензору Риччи плотности.

Соответственно, рассматривать сейчас то, что может дать вариация только первой составляющей плотности (2.68, 2.66), подразумевая, что расширение вида симметричной части связности от чисто метрической возможно и при выполнении условия $\bar{F}_{ik} = 0$, смысла не имеет. Согласно методу Палатини мы придём опять к требованию метричности связности.

Поэтому мы сосредоточимся именно на выяснении тех новых

возможностей, дополнительных к уже установленным ранее, которые могут появиться при $\bar{F}_{ik} \neq 0$. Опираясь при этом будем на те выводы, которые следуют из рассмотрения условий стационарности только пропорциональной (2.67) инвариантно выделенной части плотности действия (2.68).

Легко видеть, что тензор $\bar{F}_{ik}$ является инвариантно независимым как от тензора $\tilde{r}_{ik}$, так и от тензора $\bar{r}_{ik}$. Это означает, что ещё один скаляр, определённый для произвольной области пространства-времени и входящий в скаляр, получаемый интегрированием плотности (2.68) как инвариантное слагаемое, причём совершенно независимое от остальных слагаемых, его составляющих, имеет вполне самостоятельное значение, описывающее тот вклад в плотность действия, который обусловлен именно тензором $\bar{F}_{ik}$. Поэтому поведение той части связности, которая формирует этот скаляр, эту часть действия в любой непрерывной области пространства-времени можно и нужно изучать независимо от влияния остальной части симметричной связности (которое в первом приближении мы уже и так изучили).

Прежде чем вплотную заняться этим, напомним, что, как с тензором F_{ik} , так и с тензором $\bar{F}_{ik}$, для любого пространства аффинной связности могут быть связаны соответствующие скалярные плотности $\mathfrak{F}$ и $\bar{\mathfrak{F}}$ (1.8), которые можно рассматривать как производящие структурные тождества (1.17, 1.19). Тождества, не зависящие от того, вводим мы в рассмотрение классическую метрику или нет. Приведу здесь снова определение для плотности этого тензора, порождённого симметричной частью связности, и соответствующее ему структурное тождество:

$$\bar{\mathfrak{F}} = \mathcal{E}^{ijkl} \bar{F}_{ij} \bar{F}_{kl}. \quad (2.69)$$

$$\mathcal{E}^{ijkl} \nabla_j \bar{F}_{kl} = \mathcal{E}^{ijkl} \partial_j \bar{F}_{kl} = 0. \quad (2.70)$$

Плотность $\bar{\mathfrak{F}}$ тоже является квадратичной по компонентам производящей её свёртки полного тензора кривизны. Более того, её можно также считать и корнем квадратным из определителя этой свёртки (который следует рассматривать как плотность веса +2). Вследствие антисимметричности этой свёртки корень

квадратный извлекается в явном виде. Наличие в нашем распоряжении метрического тензора позволяет определить (без интегрирования) ещё и распределённый скаляр, существующий при наличии метрики вместе с этой плотностью:

$$\bar{F}_g^* = g^{-1} \bar{\mathfrak{F}}. \quad (2.71)$$

Таким образом, при совместном рассмотрении классической метрики и не обращающегося в тождественный нуль тензора $\bar{F}_{ik}$ мы можем опираться на два скаляра и две скалярных плотности, позволяющих поставить в соответствие этим **распределённым** в области скалярам интегральные по области скаляры. Как мы видим, вторая плотность (и второй скаляр) требуют **тождественного** выполнения уравнений (2.70) в области, даже и без введения классической метрики и наличия нашей главной опоры в физике — событий. Уравнения ею генерируемые обязательны вообще для всех пространств аффинной связности. Эти уравнения в точности совпадают с уравнениями, известными в физике как первая пара уравнений Максвелла для напряжённостей электромагнитного поля. Поэтому возникает вполне обоснованная возможность рассматривать интересующий нас в настоящий момент тензор $\bar{F}_{ik}$ именно в качестве тензора Максвелла, тензора напряжённостей электромагнитного поля. Ещё одного **физического** поля, ещё одного понятия, введённого физикой независимо от понятия пространства-времени. Здесь же это свойство именно пространства-времени, рассматриваемого как непрерывность, континуум, содержащий события³⁴.

³⁴Естественно, когда мы говорим о поле, то нужно уточнять поле чего мы имеем ввиду. В случае поля гравитации мы вели речь о зависимости некоторой физической величины, потенциала, от точки в области. Мы связали это физическое понятие с необходимой для правильного, согласованного геометрического описания нашей выделенной области стандартной функцией, участвующей как в формировании компонент классической метрики, так и в формировании компонент метрической части связности. Назвав тензор $\bar{F}_{ik}$ тензором Максвелла, мы можем добавить, что в физике это тензор **напряжённостей** электромагнитного поля. А компоненты **геометрического** объекта, компоненты $\bar{\Gamma}_k$, антисимметризованными производными которых

Чтобы убедиться окончательно, что это именно так, нам необходимо получить для тензора, который мы хотим отождествить с тензором Максвелла напряжённостей электромагнитного поля, ещё и вторую пару уравнений Максвелла. Уравнения, связывающие распределённое в пространстве-времени поле с источниками этого поля. При этом помним, что в нашем описании источниками любого поля могут быть только траектории материальных точек, содержащие события.

Δ -плотность $\bar{\mathfrak{F}}$ от метрики не зависит вообще и, кроме того, будучи варьирована как функционал области, уже дала нам одну из пар уравнений Максвелла. Причём определила их как структурные тождества, не зависящие вообще от наличия в пространстве-времени как математической, идеальной конструкции особых точек, изображающих события. Поэтому нам остаётся ассоциировать с действием электромагнитного поля в области *при введённой классической метрике* только функционал от плотности $\bar{\mathfrak{F}}_g = g\bar{F}_g$, тем более именно он входит как слагаемое в соотношение (2.68) для квадратичного вклада в полную плотность действия области:

$$s^{(em)} = ik_g^{(2)} \frac{1}{4} \int \bar{F}_g g d^4x = ik_g^{(2)} \frac{1}{4} \int \bar{F}_{ik} \bar{F}_{jp} g^{ij} g^{kp} g d^4x. \quad (2.72)$$

Прежде чем варьировать этот функционал, проведём некоторое обсуждение общего характера методов и геометрических величин, которые помогут нам изучить **отдельно** от уже исследованных нами проявлений метрической части связности те новые свойства, которые появляются при этом в симметричной части связности. Это требуется для того, чтобы ясно представлять, что именно мы получаем и что новое принимаем во внимание, расширяя связность до симметричной связности общего вида.

Пусть калибровка проведена, классическая метрика построена и в полной (пока всё ещё симметричной) связности выделе-

являются компоненты тензора Максвелла, в этом случае отождествляются с физическим понятием вектор-потенциала электромагнитного поля. Хотя последнее отождествление требует определённых уточнений, которые будут даны ниже.

на метрическая часть. Выделение метрической части связности позволяет строить ковариантные производные не только относительно полной связности или её симметричной части, но также и относительно её метрической части. Более того, эти производные будут иметь особое значение, поскольку описывают изменения полей различных тензоров **относительно системы отсчёта, связанной с классической метрикой**. А способ введения такой системы отсчёта глобально для некоторой области пространства-времени мы уже имеем³⁵. Пусть для частного случая единственной материальной точки в области, но этот частный случай является фундаментальным для всех классических приближений. На его основе можно будет находить соответствующие решения во многих других, гораздо более сложных случаях.

Разница между двумя произвольными связностями всегда является тензором, поэтому все такие производные тензоров или их Δ -плотностей всегда будут тензорами или плотностями соответствующего строения.

Ковариантные производные введённой метрики $g_{ijk} = \bar{\nabla}_i g_{jk}$ относительно произвольной симметричной связности не обязаны быть равны нулю, хотя относительно метрической части связности они равны нулю повсюду в области. Соответственно, произвольная симметричная связность $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ может отличаться от символов Кристоффеля (2.20) только на тензор A_{jk}^i , который можно выразить через g_{ijk} , если они известны, в полном соответствии с соотношением (2.19) :

$$A_{jk}^i = -\frac{1}{2}g^{ip}(g_{jkp} + g_{kjp} - g_{pjk}). \quad (2.73)$$

Этот тензор очевидным образом симметричен по ковариантным индексам. Если у этого тензора есть не равная нулю свёртка, то она единственная вследствие симметрии тензора. Это век-

³⁵**Полагаем, что имеем.** На самом деле мы знаем, что этот способ нами ещё не определён до конца. И именно проводимое сейчас рассмотрение позволит завершить его определение.

тор $A_j = A_{jk}^k$, который может содержать как не интегрируемую часть, так и градиент некоторой функции.

Метрика и её определитель (точнее, корень квадратный из него, метрическая плотность пространства-времени) остаются ковариантно постоянными только в метрической части связности. В полной, пока ещё симметричной связности они перестают быть таковыми. Соответственно, $\tilde{\nabla}_j \mathbf{g} = 0$ и

$$\bar{\nabla}_j \mathbf{g} = \partial_j \mathbf{g} - \bar{\Gamma}_j \mathbf{g} = \partial_j \mathbf{g} - \tilde{\Gamma}_j \mathbf{g} - A_j \mathbf{g} = \tilde{\nabla}_j \mathbf{g} - A_j \mathbf{g} = -A_j \mathbf{g}. \quad (2.74)$$

Если A_j является градиентом некоторой глобальной для области функции, то пространство является эквиаффинным и мы можем поставить вопрос, правильно ли мы осуществили калибровку метрики. В том смысле, что этот градиент можно удалить глобально в области, достаточно добавить в рассмотрение *возможную* зависимость от точки величин масштабов в репере, остающемся при этом ортогональным всюду. И изменить соглашение об определении классического метрического тензора. Т.е. откалибровать метрику немного иначе³⁶.

Если A_j содержит не интегрируемую часть, т.е.

$$\bar{F}_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \neq 0, \quad (2.75)$$

то пространство-время уже не является эквиаффинным³⁷. Однако метрическую плотность $\mathbf{g}$ можно по-прежнему интегрировать по области пространства-времени, также как и взвешенные с её помощью скаляры. Результатом будут относительные скалярные функционалы области (её *метрического* размера и того, что она содержит), имеющие инвариантный смысл в пределах той группы координат, в которой имеет смысл стандартизованная классическая метрика. Т.е. они будут иметь скалярные свойства до

³⁶За счёт калибровки метрики и выбора подходящих координат мы можем гарантированно сделать равным нулю только свёртку такой связности. Утверждать, что при этом все дополнительные к метрическим коэффициенты A_{jk}^i тоже обратятся в нуль мы, вообще говоря, не можем.

³⁷Далее мы учитываем отличие A_k от $\bar{\Gamma}_k$ только на градиент регулярной в области функции, не дающий вклада в тензор $\bar{F}_{ik}$ и при необходимости компенсируемый калибровкой $\tilde{\Gamma}_j$.

тех пор, пока будут рассматриваться только с точки зрения систем отсчёта, образом которых и является классическая метрика. Совместная калибровка классической метрики и вектора A_k ³⁸ и выбирает этот набор привилегированных с нашей точки зрения систем отсчёта из общего возможного набора систем координат. Привилегированных тем, что они для нас удобнее всего, описание мира в них выглядит для нас яснее и проще. Обратите также внимание на то, что на первый план при этом выступает не полная добавка к метрической связности A_{jk}^i , а вектор A_k , описывающий некоторое её общее действие на изменение метрического объёма области как целого.

Имея ввиду, что ниже мы полагаем всюду тензор Максвелла определённым соотношением (2.75) через A_k , а не $\bar{\Gamma}_k$, учитывая то, что вся остальная связность, включающая метрическую часть, не даёт никакого вклада в этот тензор, запишем ряд полезных нам далее соотношений, которые возникают при введённой классической метрике.

Наличие классической метрики ассоциирует с дважды ковариантным антисимметричным тензором Максвелла $\bar{F}_{jk}$ (относительный) дважды контравариантный антисимметричный тензор (контравариантную форму тензора Максвелла)

$$\bar{F}^{jk} = g^{ji} g^{kp} \bar{F}_{ip}. \quad (2.76)$$

С этим тензором связаны (относительные) контравариантные векторы, две дивергенции контравариантной формы тензора Максвелла. Одна возникает при дифференцировании по полной симметричной связности

$$\bar{J}^k = \bar{\nabla}_i \bar{F}^{ik} = \partial_i \bar{F}^{ik} + \bar{\Gamma}_i \bar{F}^{ik}, \quad (2.77)$$

а другая, гораздо более важная для нашего описания, т.к. привязана к выделенным нами классическим системам отсчёта, получена при ковариантном дифференцировании тензора Максвелла

³⁸Этот вопрос мы обсудим подробнее позже, после того, как изучим последствия существования в области пространства-времени не нулевого тензора Максвелла.

(в его контравариантной форме) относительно метрической части связности:

$$\tilde{J}^k = \tilde{\nabla}_i \bar{F}^{ik} = \partial_i \bar{F}^{ik} + \tilde{\Gamma}_i \bar{F}^{ik}, \quad (2.78)$$

Между двумя этими дивергенциями имеется очевидная связь $\bar{J}^k = \tilde{J}^k + A_i \bar{F}^{ik}$.

Из соотношений (2.78) и (2.21) легко заметить, что Δ -плотность $\tilde{J}^k = \mathfrak{g} \tilde{J}^k = \partial_i (\mathfrak{g} \bar{F}^{ik})$ является производной Δ -плотности антисимметричного тензора. Следовательно, обычная дивергенция этой плотности тождественно обращается в нуль:

$$\partial_k \tilde{J}^k = 0. \quad (2.79)$$

Вместе с ней исчезают³⁹ и ковариантная относительно метрической связности дивергенция плотности вектора $\tilde{J}^k$, и как ковариантная по метрической связности дивергенция самого вектора $\tilde{J}^k$, так и его обычная дивергенция:

$$\tilde{\nabla}_k \tilde{J}^k = 0, \quad \tilde{\nabla}_k \tilde{J}^k = 0, \quad \partial_k \tilde{J}^k = 0. \quad (2.80)$$

Соотношения вида (2.79) и (2.80) в приближении классической метрики имеют особое значение. Как и в случае тензора энергии-импульса, они говорят о том, что с полем тензора $\bar{F}^{ik}$

³⁹ Для любой регулярной симметричной связности можно выбрать систему координат так, чтобы **коэффициенты связности в заданной произвольной точке обращались в нуль**. Ковариантная дивергенция плотности вектора отличается от её обычной дивергенции только на члены пропорциональные свёртке связности, а значит эти члены в таких координатах равны нулю. Соответственно, и сама эта ковариантная дивергенция при тождественном исчезновении обычной равна нулю в этой точке. Такая процедура может быть проделана **для всех точек области, где связность регулярна**. Так как ковариантная дивергенция плотности вектора сама является скалярной плотностью, то это означает, что она равна нулю **всюду в области, где симметричная связность регулярна**. Кроме того, напоминая, что метрика и её плотность ковариантно постоянны относительно метрической связности, их ковариантные производные относительно этой связности равны нулю. Поэтому вывод об исчезновении дивергенции плотности вектора переносится и на дивергенцию самого вектора.

классическая метрика ассоциирует *сохраняющийся относительно метрической системы отсчёта* вектор $\tilde{J}^k$. Будем называть далее его **вектором тока** электромагнитного поля. Кроме того, эти соотношения являются также калибровочно инвариантными, справедливыми для любой калибровки классической метрики и вектор-потенциала электромагнитного поля. Только нужно помнить, что полученные из тензора $\bar{F}^{ik}$ векторы и плотности для разных калибровок сами могут быть разными из-за возможного переопределения классической метрики и согласованной с ней метрической части связности, т.к. изменение метрики, вообще говоря, меняет контравариантное представление тензора Максвелла при остающемся неизменным его базовом, ковариантном виде.

Вернёмся теперь снова к обсуждению возможных следствий требования отсутствия вариаций в рассматриваемой области той части действия, которую мы ассоциируем с электромагнитным полем в этой области посредством соотношения (2.72).

Для того, чтобы определить действие электромагнитного поля в некоторой области, мы интегрируем по метрическому объёму метрическую плотность (2.67). При этом мы ограничиваем рассмотрение только полученным в результате какой-либо калибровки набором допустимых классических систем отсчёта. Подынтегральное выражение полностью независимо как от интегрируемой части A_{jk}^i , так и от $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$. Поэтому результат его интегрирования будет *калибровочно инвариантен*. Следовательно, можно рассматривать *отдельную от других функционалов* (в первую очередь от функционала, полученного для метрического тензора Риччи) стационарность функционала от плотности $\tilde{\mathfrak{F}}_g = \bar{F}_g \mathfrak{g}$ при вариации A_{jk}^i (**независимой** от вариации $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$, т.е. $\mathfrak{g}_{jk}$). Все соотношения, которые могут быть получены при этом, будут калибровочно инвариантными, т.е. справедливыми *при любой калибровке классической метрики*. Но, естественно, калибровка как таковая должна быть при этом сделана.

Вариация A_{jk}^i входит в этот функционал только как δA_k :

$$\begin{aligned}\delta \int \bar{F}_{\mathbf{g}} d^4x &= \int \delta(\bar{F}_{ik} \bar{F}^{ik} \mathbf{g}) d^4x = \\ &= \int 2\bar{F}^{ik} \mathbf{g} \delta \bar{F}_{ik} d^4x = \int 4\bar{F}^{ik} \mathbf{g} \partial_i(\delta A_k) d^4x.\end{aligned}\quad (2.81)$$

Поскольку $\partial_i(\bar{F}^{ik} \mathbf{g} \delta A_k) = \partial_i(\bar{F}^{ik} \mathbf{g}) \delta A_k + \bar{F}^{ik} \mathbf{g} \partial_i(\delta A_k)$ и интеграл по объёму d^4x от дивергенции плотности, стоящей слева, даёт интеграл по ограничивающей области поверхности, где вариации дополнительной к метрической части связности равны нулю по условию, функционал (2.81) записывается так:

$$\delta \int \bar{F}_{\mathbf{g}} d^4x = -4 \int \partial_i(\bar{F}^{ik} \mathbf{g}) \delta A_k d^4x = -4 \int \tilde{\mathcal{J}}^k \delta A_k d^4x. \quad (2.82)$$

Там, где связность регулярна и классическая метрика существует (при уже сделанной калибровке), эта вариация должна обращаться в нуль. Так как метрика у нас регулярна и $\mathbf{g}$ в нуль обращаться не может, а вариации δA_k произвольны, то это может иметь место только если выполняется следующее условие на вектор тока электромагнитного поля и его плотность:

$$\tilde{\mathcal{J}}^k = \mathbf{g} \tilde{J}^k = \mathbf{g} \tilde{\nabla}_i \bar{F}^{ik} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{J}^k = \tilde{\nabla}_i \bar{F}^{ik} = 0 \quad (2.83)$$

всюду вне классических частиц. Там, где нет материальных точек, там, где нет событий, **метрическая дивергенция контравариантной формы тензора Максвелла, вектор электромагнитного тока обязан быть равным нулю.**

При вариации классической метрики мы получили аналогичное требование на **весь** метрический тензор Риччи. Здесь имеем требование только на метрическую дивергенцию тензора Максвелла. Тензор Максвелла и производящие его потенциалы A_j имеют гораздо большую чем тензор Риччи метрической связности свободу принимать различные значения в области.

А там, где связность сингулярна, т.е. на траекториях материальных точек, относительный вектор $\tilde{J}^k$ обращаться в

нуль не обязан. Хотя, вообще говоря, может быть равным нулю и на траекториях материальных точек.

Уравнение (2.83) говорит нам, что этот вектор, если он не нулевой тождественно, с точки зрения континуума является *распределением, сосредоточенным на траекториях классических частиц*. Регулярная часть этого распределения равна нулю всюду. А с каждой из материальных точек мы должны ассоциировать уже обычный вектор, но определённый только на линии существования этой классической частицы. Полная аналогия с вектором градиента действия, а также касательным к траектории вектором и вектором масштаба времени.

Вспомним, что связность возникает как относительная скорость изменения масштабов. Все реально доступные нам для реализации масштабы (масштабы времени) существуют на ограниченных подпространствах, на одномерных линиях в классических приближениях, поэтому все такие скорости сингулярны. Сингулярны и все построенные из них скаляры, векторы и т.д. Классическая метрика по определению вводится как регулярная структура, *существующая в области* и не добавляющая никаких искусственных дополнительных сингулярностей. Значит и все *относительные* скаляры, векторы и т.д., формируемые из связности с участием классической метрики также наследуют **только исходные сингулярности связности**. Поэтому их главные части являются распределениями, сосредоточенными всегда только на траекториях классических массивных частиц.⁴⁰

Сохранение вектора $\tilde{J}^k$ относительно метрической системы отсчёта, записанное уравнением (2.80), из-за его сингулярности требует также его параллельного переноса вдоль траектории **в метрической связности, относительно метрического канонического параметра l** :

$$\frac{\tilde{\nabla}}{dl} \tilde{J}^k = 0. \quad (2.84)$$

⁴⁰Сингулярность *дивергенции* тензора напряжённостей электромагнитного поля означает также наличие сингулярности определённого типа и в компонентах тензора напряжённостей и в самих потенциалах A_i этого поля в тех же точках (на тех же траекториях).

Как следствие, между этим вектором как главной сингулярной частью распределения, существующей лишь на траектории материальной точки и касательным к этой траектории относительным вектором dx^k/dl обязано существовать соотношение пропорциональности:

$$\tilde{\mathfrak{J}}^k = \mathfrak{e} \cdot \frac{dx^k}{dl}, \quad (2.85)$$

где множитель $\mathfrak{e}$ постоянен на каждой классической траектории и равен нулю всюду вне траекторий. Этот множитель является скалярным **распределением** относительно стандартизованных метрических систем отсчёта. Поэтому я использовал для его обозначения тот же шрифт, что и для обозначения плотностей, и записал эту пропорциональность для плотности вектора. Если вспомните о том, что основным представлением распределений скаляра у нас служит δ -функция, то такая запись позволит правильно отследить возможные размерности в этом соотношении. На траектории классической частицы это будет просто постоянная e в системе покоя этой частицы, но определена эта постоянная только именно на траектории и нигде больше. В остальном пространстве-времени она тождественно равна нулю. Более того, для каждой классической частицы значение этой постоянной вполне может быть уникальным, своим. Определить его в нашем приближении мы не можем, также как не можем определить ещё одну уникальную постоянную для каждой классической частицы, её массу покоя. В физике эту новую постоянную называют электрическим (электромагнитным) зарядом классической частицы. Сравнение между зарядами разных классических частиц возможно вследствие того, что они обуславливают (посредством уравнений Максвелла) величины вектор-потенциала электромагнитного поля, которые могут (и должны!) измеряться не только в тех единицах, которые могут быть произвольно связаны нами с единицами заряда, но и в естественных единицах пространства-времени — сантиметрах или секундах. Точнее в обратных им единицах, т.к. вектор-потенциал является ковариантным вектором, удельной величиной. Величины

постоянной ϵ также напрямую связаны и со способом калибровки классической метрики. Ведь калибровка эта не только “делает” единицы измерений одинаковыми во всех точках, поглощая градиент некоторой функции из электромагнитного потенциала, но также связывает пространственно-временные единицы с единицами потенциала. Соответственно, единицы заряда и массы не являются полностью независимыми в том смысле, что когда (и если) изменяются вследствие изменения калибровки классической метрики локализованные соотношения между пространственной единицей и единицей массы, то определённые изменения должны появиться и в соотношении между пространственной единицей и единицей заряда, которая определяет и определяется из связи заряда с вектор-потенциалом электромагнитного поля. Соответствие это при изменении калибровки должно быть принято во внимание глобально, для всей области, для всех классических частиц в ней.

С учётом свойств вектора $\tilde{J}^k$, записанных соотношением (2.85), вместо уравнения (2.83), справедливого только вне траекторий классических частиц, можно написать справедливое уже всюду в области соотношение

$$\tilde{\nabla}_i(\mathfrak{g}\bar{F}^{ik}) = \tilde{J}^k, \quad (2.86)$$

которое является определением $\tilde{J}^k$ и без соотношения (2.85) было бы чистой тавтологией.

Это соотношение является второй парой уравнений Максвелла, определяющей связь электромагнитного поля в области с сосредоточенным на траектории материальной точки источником, сингулярным вектором. Наличие этой, дополнительной к сосредоточенному на траектории градиенту действия сингулярности, обусловлено возможным отличием изменения со временем локального репера материальной точки от учитываемого тем набором преобразований, который описывается метрической частью связности. Т.е. полная расширенная связность в стандартизованных системах отсчёта соответствует группе преобразований более широкой, чем только стандартные повороты группы Лоренца. Что это за дополнительные преобразования локальных

реперов, *осуществляемые континуумом* для согласования всех локальных реперов с базовым, мы обсудим позже.

Обратите внимание, что это соотношение явным образом указывает на то, что введённое нами представление о пропорциональности действия на траектории метрическому интервалу, связывающему две точки, в том числе и бесконечно близкие, является не точным, если с траекторией пробной материальной точки, находящейся в поле другой заряженной материальной точки, помимо касательного вектора связан также и **не нулевой** вектор электромагнитного тока. Соотношение между действием и бесконечно малым интервалом должно быть модифицировано с учётом наличия этого вектора, ещё одной характеристики материальной точки. Характеристики, учитывающей дополнительные к гравитационному полю возможности взаимодействия этой материальной точки, как образа цепочки связанных событий, со всем остальным миром, континуумом, согласованным с базовой для системы отсчёта заряженной классической частицей. К рассмотрению этого вопроса мы тоже вернёмся позже.

2.9 Принцип суперпозиции

Мы сделали второй шаг на пути выяснения тех свойств аффинной связности, которые позволяют согласовать локальные процедуры измерения в глобальную (для некоторой выделенной области пространства-времени, а не для всего мира как целого) систему отсчёта. И первый на пути добавления к базовой метрической связности новых возможностей для континуума влиять на локальные системы отсчёта.

Важно уяснить одно важное свойство связностей, характеризующих этот путь усложнения описания, с которым мы уже явным образом познакомились в предыдущем параграфе. Свойство это принято называть в физике **принципом суперпозиции**.

Во-первых, как было отмечено уже не раз, хотя всякая связность и преобразуется при замене процедуры измерения, при преобразованиях координат, по закону, отличающемуся от тен-

зорного, однако **разница, отличие** между **любыми** двумя связностями является тензором. А это значит, что, с чисто математической точки зрения, к любой связности можно добавить произвольный тензор подходящего строения, например B_{jk}^i , и результирующий объект снова будет связностью.

В физике это свойство связности может быть использовано как возможность добавления в рассмотрение изначально произвольно расположенных в многообразии, приписанных тем или иным его точкам **особенностей, событий**. Лишь бы точки эти отличались друг от друга. Всё, что в связности может появиться вследствие особого смысла этих точек, обязательно будет тензором. Поэтому не существует никаких соображений, причин самого общего плана на объединение таких точек в единое целое.

Однако, для описания мира нам требуется определить его именно как целостность с математической точки зрения. Всё, что можно добавить к минимально необходимой для этого связности обязано соответствовать либо каким-то неучтённым ранее событиям, либо связям между ними. Определёнными чертами такой целостности обладает введённая нами для описания мира на первом этапе метрическая связность. К ней ещё можно добавлять новые материальные точки, имеющие некоторую массу покоя. В этом смысле наше описание не закончено ни в коей степени. Но тот способ, те уравнения, которые позволяют нам определить метрическую связность через свойства материальных точек, позволяют ожидать, что итоговая конструкция — пространство аффинной связности — может рассматриваться как целостность после принятия во внимание всей доступной нам информации о мире. Ожидание это связано с тем, что та структура, через которую мы и пытаемся определить нужные нам свойства связности через простейшие факты наличия в мире особенностей, тензор Риччи, является **нелинейной** функцией самой связности, её компонент.

На втором шаге мы приняли во внимание уже другую порождаемую связностью тензорную структуру — тензор Максвелла. А этот тензор строится совершенно **линейным** образом из компо-

нент связности. Точнее, из её производных, но всё равно линейно. Те ограничения, которые мы получили на свойство соответствующих компонент связности, которым они должны удовлетворять чтобы тензор Максвелла отличался от нуля, никак не влияют на то, что всегда можно будет **просто добавить** новый вектор-потенциал к свёрнутой связности и соответствующий ему тензор Максвелла к уже имеющемуся и описание мира останется приемлемым. Вот эту возможность применительно к описанию электромагнитного поля и называют принципом **суперпозиции**. Суперпозиции любых допустимых решений уравнений Максвелла. Это весьма важное свойство нашего описания мира. Ну и, конечно, это свойство не просто описания, а свойство самого мира, присущее одной из сторон проявления связей между событиями в мире, которую мы обозначаем как электромагнитное поле.

Может показаться, что и гравитационное поле тоже подчиняется принципу суперпозиции. Ведь в том приближении единственной в области материальной точки, стандартизованная функция, описывающая потенциал гравитационного поля тоже аддитивна. Масса покоя точки ведь величина произвольная, добавили массу — форма решения остаётся той же. Но это верно только до тех пор, пока мы не выходим за рамки довольно локального стандартизованного описания. Уже для двух разных материальных точек описание становится не таким уж простым, если довести его до определения коэффициентов метрической связности. Потенциал гравитационного поля не является аддитивной составляющей метрической связности напрямую, в отличие от вектор-потенциала электромагнитного поля. Поэтому определение метрической связности в случае достаточно большого (уже три в этом смысле много) числа материальных точек является нетривиальной задачей. В отличие от разных, достаточно сложных конфигураций заряженных частиц, для которых мы тем не менее имеем возможность вполне легко решать соответствующие уравнения Максвелла. Именно из-за наличия принципа суперпозиции как вектор-потенциалов, так и тензоров напряжённостей электромагнитного поля.

Следует ли из этого, что вследствие наличия суперпозиции в описании электромагнитного поля полностью законченного самосогласованного описания мира пространством аффинной связности нельзя получить в принципе? Нет, не следует. Мы использовали для получения решения Шварцшильда только известную нам структуру тензора энергии-импульса для единственной материальной точки. Для полного описания мира в каком-либо классическом приближении нужно знать хотя бы положение всех таких материальных “точек”. Но и этого недостаточно. Ведь мы отмечали уже, что сингулярности тензора Риччи, а через него метрическую связность можно определить через события и их связи лишь при знании **полного** тензора энергии-импульса в **непрерывной четырёхмерной области**. А внесение в область дополнительного тензора Максвелла, с которым тоже связан некоторый распределённый тензор энергии-импульса, приводит к изменению её полного тензора энергии-импульса. И, как следствие, к изменению и тензора Риччи метрической связности, и самой метрической связности, и согласованной с ней классической метрики. Через нелинейные соотношения.

Кроме того, не стоит забывать, что тензор Максвелла и производящие его вектор-потенциалы, манифестация наличия в пространстве-времени дополнительных к метрической связности составляющих, не вводятся нами сами по себе, отдельно от материальных точек. Сингулярности этих величин жёстко привязаны к материальным точкам, которые и рассматриваются нами как **источники**, создающие эти компоненты связности в окружающих эти точки областях.

А в случае электромагнитных волн, когда эти сингулярности вроде бы отсутствуют? И может показаться, что уж эта часть электромагнитного поля может быть добавлена произвольно, без связи с материальными точками. Это вовсе не так. Электромагнитные волны в нашем описании должны быть учтены только те, которые **всегда** ассоциированы только с двумя событиями — излучения и поглощения. С событиями на линиях существо-

вания двух разных материальных точек. “Свободные” электромагнитные волны в нашем описании лишние, не нужные. Да, в классических приближениях мы не имеем возможности установить эти пары событий как **отдельные**, ведь события на траекториях материальных точек рассматриваются как непрерывно их заполняющие. Ситуация такая же, как и с физическим смыслом массы покоя. Для его понимания нужна опора за пределами классических приближений. Так и у необходимости связывать с любой элементарной электромагнитной волной два и только два события опора тоже находится за пределами классических приближений.

Так что в гипотетическом случае, в предположении, что кому-то удастся собрать всю информацию о мире в целом, о его событиях и связях между ними, можно с уверенностью сказать, что результирующее описание мира пространством аффинной связности тоже будет целостностным. Не единственным с математической точки зрения, но целостностной математической идеей.

2.10 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

В параграфе §2.8 мы обсудили причины, которые позволяют нам рассматривать изменения в согласовании локальных реперов, распределённых в некоторой области пространства-времени, описываемые на языке геометрии отлицием от нуля тензора $\bar{F}_{ik}$, как проявления наличия в этой области распределённого в ней электромагнитного поля. Понятия, сформулированного на языке, принятом в физике. Причём в этом случае мы обошлись без введения каких-либо дополнительных структур, вроде классической метрики. Уже введённой ранее классической метрики и естественных для любого пространства аффинной связности величин — одной из свёрток полного тензора кривизны и порождающей её свёртки объекта аффинной связности — нам оказалось достаточно, чтобы получить полное соответствие набора уравнений, которым они обязаны подчиняться, теории Максвелла, при-

нятой в физике для описания электромагнитного поля. Однако, мы всё-таки не обошлись без введения в наше описание мира ещё одной внешней к понятиям пространства-времени как чисто геометрической конструкции величины — заряда классической частицы. Конечно, также как и в случае с массой покоя материальной точки, мы имеем ясное понимание, что эта величина должна возникать из геометрических понятий и понятия о событиях. Для того, чтобы правильно сформулировать возникающие соотношения нам потребуется выйти за границы наших классических приближений. Нам ведь нужно уметь не только считать события на траекториях наших классических частиц (масса покоя), но также необходимо определять ещё и всевозможные связи между **отдельными** событиями на траекториях **разных** классических частиц, которые и характеризует электромагнитный заряд. Но в том-то и дело, что классические приближения не могут этого позволить принципиально. События на траекториях классических частиц не дискретны, а непрерывны. Поэтому эти важнейшие характеристики материальных точек и являются внешними к геометрии в классических приближениях нашего описания мира.

Займёмся теперь формулировкой соответствующих физической теории электромагнитного поля понятий (здесь я полагаю их хорошо известными) на нашем языке описания мира только с помощью реперов масштабов, хорошо определённых на линиях существования материальных точек и согласованно распространяемых на окружающие их области пространства-времени как четырёхмерного континуума.

Сначала установим вид тензора энергии-импульса для чистого электромагнитного поля, для той части связности которая отвечает только за его проявления в континууме. Это легко сделать, потому что вклад электромагнитного поля в полную плотность действия, как самостоятельного, отдельного понятия, выделен в ней инвариантным образом. Для получения выражения плотности тензора энергии-импульса электромагнитного поля, имеющегося в произвольной области пространства-времени, нам

достаточно вычислить *функциональную* производную по классической метрике этой части плотности действия, определённой соотношением (2.72):

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{T}_{ik}^{(em)} &= \frac{k_g^{(2)}}{4} \frac{\delta(\mathfrak{g}\bar{F}\mathfrak{g})}{\delta\mathfrak{g}^{ik}} \\
 &= \frac{k_g^{(2)}}{4} (\bar{F}_{jp}\bar{F}^{jp} \frac{\delta(\mathfrak{g})}{\delta\mathfrak{g}^{ik}} + 2\bar{F}_{jp}\bar{F}_{mn}\mathfrak{g}\mathfrak{g}^{jm} \frac{\delta\mathfrak{g}^{pn}}{\delta\mathfrak{g}^{ik}}) \\
 &= \frac{k_g^{(2)}}{4} (-\frac{1}{2}\mathfrak{g}\bar{F}_{jp}\bar{F}^{jp}\mathfrak{g}_{ik} + 2\mathfrak{g}\bar{F}_{ji}\bar{F}_{mk}\mathfrak{g}^{jm}).
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

Перепишем полученное соотношение в форме, явным образом использующей тензор-энергии импульса:

$$\mathfrak{T}_{ik}^{(em)} = \mathfrak{g}T_{ik}^{(em)} = \frac{k_g^{(2)}}{2} \mathfrak{g}(-\frac{1}{4}\bar{F}_{jp}\bar{F}^{jp}\mathfrak{g}_{ik} + \bar{F}_{ji}\bar{F}_{mk}\mathfrak{g}^{jm}). \tag{2.88}$$

Легко видеть, что полученное нами выражение совпадает с классическим для плотности тензора энергии-импульса электромагнитного поля при $k_g^{(2)} = 2$.

Почему коэффициентом пропорциональности, связывающим квадратичные по свёрткам полного тензора кривизны плотности с плотностью (частью плотности) действия оказалось простое, безразмерное число? Ответ легко увидеть, если внимательно посмотреть на структуру этих плотностей. Их размерности, по крайней мере, в стандартизованных системах отсчёта являются правильными естественными размерностями настоящих скалярных плотностей. Все нарушения размерностей вследствие искусственности классической метрики (когда они имеют место) взаимно компенсируются в произведении метрической плотности на два контравариантных экземпляра метрического тензора. Поэтому коэффициент пропорциональности обязан быть безразмерным числом. Каким конкретно — пока из имеющейся у нас информации не ясно. Значение “2” мы получили как опытный факт, безо всякого дополнительного обоснования.

Сейчас мы можем лучше понять, является ли плотность действия $\mathfrak{s}^{(2)}$ полной плотностью действия или только некоторой её

частью. То, что её составляющая, $\mathfrak{s}^{(em)}$ должна нами рассматриваться только как определённая часть полной плотности действия, обусловленная наличием у классических частиц (материальных точек) электромагнитных зарядов, а в окружающих их областях электромагнитного поля, проявляющегося в форме отличия от нуля тензора Максвелла, вполне очевидно из проведённого выше рассмотрения проблемы.

Кроме того, обращаю ваше внимание на то, что соответствующий $\mathfrak{s}^{(em)}$ тензор энергии-импульса обладает важнейшим для нас свойством — его след на классической метрике *тождественно* равен нулю, *если напряжённость электромагнитного поля регулярна*:

$$\begin{aligned} T^{(em)} &= T_{ik}^{(em)} g^{ik} \\ &= \left(-\frac{1}{4} \bar{F}_{jp} \bar{F}^{jp} g_{ik} + \bar{F}_{ji} \bar{F}_{mk} g^{jm} \right) g^{ik} \\ &= -\frac{1}{4} \bar{F}_{jp} \bar{F}^{jp} \cdot 4 + \bar{F}_{ji} \bar{F}^{ji} \\ &\equiv 0. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Это означает, что электромагнитное поле *вне частиц* не создаёт событий, его вклад в действие области имеет место только на траекториях классических частиц, но не в пространстве между ними. А тензор энергии-импульса этого поля и тензор его напряжённостей при этом вовсе не обязаны быть равны нулю. Но обязаны иметь строго определённую структуру. Структуру такую, чтобы описываемые такими тензорами связи между событиями на траекториях разных частиц при их сужении на линии, соединяющие эти события, давали (квадратичный) след градиента действия на классической метрике вдоль таких линий равным нулю. Конечно, при наличии изменения самого действия между конечными точками линий. Аналогично тому, как след тензора энергии-импульса на метрике при его сужении на линию существования классической частицы обязан давать квадрат массы покоя. Что соответствует нашему описанию таких связей линиями, на которых действие изменяется ($\partial_j s \neq 0$), но “масса покоя” такого градиента действия равна по определению нулю. Т.е.

нельзя приписать таким связующим событиям линиям систему покоя с некоторым масштабом времени.

Уже при обсуждении свойств поля гравитации изолированной материальной точки мы отметили, что решение Шварцшильда учитывает только главную часть тензора энергии-импульса. Ту, которая обусловлена событиями на базовой для нашей системы отсчёта траектории классической частицы. И ещё связями между событиями только на этой выделенной линии. С учётом, конечно, того факта, что описание этих связей доведено нами до экстремального — события на траектории полагаются нами непрерывными. Все составляющие тензора энергии-импульса, которые только и могли бы описывать связи выделенной частицы с другими частицами при этом игнорируются. Нами была также отмечена и формальная структура тензора энергии-импульса, который мог бы описывать такого рода связи — по необходимости такой тензор обязан при полной свёртке с классической метрикой, т.е. при вычислении его следа на метрике, давать нуль. Просто потому, что **все** события, которые имеют место в любой области пространства-времени, обязательно уже принадлежат траекториям каких-то материальных точек. И, таким образом, уже учтены нами в ассоциированных с этими классическими частицами массах покоя. Полученный нами тензор энергии-импульса электромагнитного поля обладает именно таким свойством. Соответственно, при определении гравитационного поля частицы в области, в которой также имеется электромагнитное поле, необходимо добавлять в правой части уравнения (2.64) на место общего обозначения тензора энергии-импульса сумму (2.31), в которой $\mathfrak{T}_{\Gamma}^{ik} = \mathfrak{g}T_{(em)}^{ik}$.

Следует также хорошо понимать, что в классических приближениях мы не имеем возможности поставить в соответствие любому тензору энергии-импульса, имеющему нулевой след на метрике, и таким образом описывающему связи между классическими частицами некоторое **конкретное** изменение действия. Даже принимая во внимание тот факт, что из самых общих соображений мы уже приписали каждой такой связи минимально

возможное изменение действия, равное постоянной Планка. Дело в том, что мы полагаем, что на траектории каждой материальной точки в классических приближениях за любой конечный отрезок времени в её истории происходит бесконечное число событий. И сколько конкретно связей минимальными цепочками с другими классическими частицами имело место в любой такой промежуток времени, в том числе и бесконечно малый, установить в классических приближениях невозможно принципиально. То, что на самом деле это только приближение к реальному положению дел, и число событий всё же конечное, мы можем учесть только в квантовых приближениях.

Отвлечёмся немного от обсуждения свойств электромагнитного поля. В данный момент мы можем также легко увидеть некоторые важные свойства и у тензора энергии-импульса, который можно, в принципе, связать и с первой составляющей плотности $\bar{\mathfrak{A}}_g^{(2)}$ (2.66). Перепишем эту плотность в виде

$$\bar{\mathfrak{t}}_g^{(2)} = \mathfrak{g} \bar{r}_{kl} \bar{r}^{kl} = \mathfrak{g} \bar{r}_{kl} \mathfrak{g}^{ki} \mathfrak{g}^{jl} \bar{r}_{ij}. \quad (2.90)$$

Совершенно очевидно, что симметричная часть тензора Риччи входит в эту величину в точности тем же самым образом, что и тензор Максвелла в $\mathfrak{s}^{(em)}$. А это значит, что при вычислении плотности тензора энергии-импульса, как функциональной производной $\bar{\mathfrak{t}}^{(2)}$ по классической метрике, вместе с соответствующим тензором энергии-импульса, мы получим в точности выражения (2.87) и (2.88), с простой заменой тензора Максвелла на симметричную часть тензора Риччи.

След соответствующего $\bar{\mathfrak{t}}^{(2)}$ тензора энергии-импульса на классической метрике вследствие своей структуры точно также обращается в нуль всюду, где симметричная часть тензора Риччи регулярна. Таким образом, и та часть добавочной плотности действия, которая описывается $\bar{\mathfrak{t}}^{(2)}$, если она не равна нулю тождественно, тоже не производит новых событий. И если соответствующий ей тензор энергии-импульса не равен нулю в области тождественно, то он тоже, как и в случае электромагнитного поля, описывает наши особенные, парные связи событий с тра-

екторий разных классических частиц.

Интерпретация наличия в полном тензоре энергии-импульса для области такой возможной составляющей несколько затруднена. Дело в том, что если рассматривать эту составляющую действия как инвариантно независимую (а это именно так), то речь может идти только о расширении вида принимаемой в расчёт связности до чисто эквиаффинной при $\bar{F}_{ij} = 0$. Как я уже писал ранее, при этих условиях связность принудительно ограничивается только метрической связностью. Соответственно, её тензор Риччи в области равен нулю тождественно и точно также тождественно равна нулю и плотность $\bar{\tau}^{(2)}$, вместе со своим тензором энергии-импульса. По сравнению с чистой гравитацией в физике области нет ничего нового. Однако, в случае $\bar{F}_{ij} \neq 0$ свёртка коэффициентов связности может содержать некую интегрируемую часть, т.к. вектор потенциал A_j определяется для электромагнитного поля только с точностью до градиента **глобальной для области регулярной** функции. Этот градиент не изменяет тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Но его принципиальное наличие, которое мы принимаем во внимание возможной перекалибровкой классической метрики, т.е. метрической связности, может поставить вопрос о роли рассматриваемого вклада за счёт изменения симметричной части тензора Риччи уже полной связности. Т.е., в принципе, дополнительно к нулевому метрическому тензору Риччи и соответствующему сингулярному тензору энергии-импульса, можно теоретически рассматривать некоторый вклад в полный тензор Риччи неметрической части симметричной связности, которому соответствует вот этот тензор, имеющий нулевой след на метрике. Такие же эффекты могут, в принципе, иметь место и при наличии в рассматриваемой области не нулевого тензора кручения.

Принимая во внимание эти факты, и особенно замечания, сделанные при применении метода Палатини, я склонен полагать,⁴¹ что никакого **дополнительного** описания чисто бинар-

⁴¹ Отыскать надёжное доказательство этого предположения мне не удалось. Однако, обратите внимание на обсуждение действия симметричной

ных связей, **отдельного** от возможно описываемых электромагнитным полем (как мы увидим ниже речь пойдёт об электромагнитных волнах в этом качестве) при этом появиться не должно.⁴² Максимум что можно ожидать — это уточнение связи симметричной части тензора Риччи с классической метрикой. Т.е. отпечаток наличия электромагнитного поля (и, возможно, поля кручения) в метрике. Причём этот отпечаток может иметь, в принципе, как “общую, корректирующую метрику, составляющую”, так и некоторую дополнительную к метрической связности “волновую” составляющую симметричной части связности.⁴³ Конечно, при этом на траекториях материальных точек не должно появляться новых сингулярностей в этой, добавочной симметричной связности. Она должна быть регулярной всюду в области. А антисимметричная часть тензора Риччи полностью описывается тензором Максвелла. Более подробное рассмотрение этого вопроса будет представлено ниже, при обсуждении геометрического смысла вектор-потенциала электромагнитного поля, и, кроме того, при обсуждении поля кручения. Завершено это обсужде-

части связности на репер масштабов как на представление двух подгрупп общей группы преобразований, накрывающих вместе всю общую группу. Это обсуждение проводится ниже, в конце §2.11. При этом всё-таки остаётся вопрос о влиянии на описание области наличия в ней не нулевого кручения.

⁴²Это утверждение касается только симметричной части связности. Как мы увидим позже, та часть связности, которую называют кручением, тоже может описывать чисто бинарные связи (волны в континууме) между разными материальными точками.

⁴³В качестве аналогии представления связностью таких процессов **в континууме, свободном от частиц**, могу предложить хорошо известные в физике сплошных сред **коллективные** явления, такие как звуковые волны, например. В этом случае ведь речь идёт не о волнах типа электромагнитных, **всегда** имеющих **элементарные, точечные в квантовых приближениях** события излучения и поглощения, а о явлениях, описывающих **нелокальные** изменения в относительных положениях составляющих сплошную среду материальных точек. “События” их генерации и затухания не локальны по своему смыслу, они **всегда** “большие”, **не элементарные**. Это *синтетические, классические* понятия. Также и континуум, как наиболее общая такая сплошная среда может, в принципе, потребовать для полноценного описания больших областей аналогичных составляющих в связности. Но такого рода вопросы я здесь обсуждать не буду.

ние будет в следующей главе, посвящённой описанию движения материальной точки в разных полях.

2.11 Электромагнитное поле материальной точки

Что нового может внести в наше описание области пространства-времени вокруг некоторой материальной точки учёт возможного отличия от нуля тензора Максвелла? Для начала, постараемся определить каким может быть электромагнитное поле в этой области, если мы потребуем единственно его согласованности только со свойствами самой материальной точки.

Начнём со случая, когда с траекторией материальной точки ассоциирован не нулевой вектор тока электромагнитного поля. Т.е. точка имеет некоторый заряд $e \neq 0$. Нам требуется найти функциональную зависимость вектор-потенциала A_j и соответствующего ему тензора Максвелла $\bar{F}_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ в какой-либо системе отсчёта, распространённой с траектории материальной точки на окружающую её область. Такую зависимость, которая согласовывала бы вводимые в области локальные системы отсчёта с базовой локальной системой отсчёта на траектории классической частицы. Точно также, как мы делали при распространении на область классической метрики введением распределённой там метрической связности. Только теперь связность не чисто метрическая, а дополненная некоторым тензором A^i_{jk} , на который накладываются гораздо менее ограничивающие условия, чем мы имели для метрической части связности. Эти условия ограничивают только свёртку $A_j = A^k_{jk}$, а не весь добавляемый к связности тензор. Вот эти условия на свёртку, обязанные существованием у классической материальной точки некоторой дополнительной к массе покоя характеристики — “заряда” — мы сейчас и будем определять. Геометрический смысл этих условий, их влияние на локализованные системы отсчёта в сравнении с базовой локальной, мы обсудим уже в самом конце, когда определим основные черты требований на свойства дополнительной

свёртки коэффициентов связности A_j .

Метрическую часть связности при этом мы полагаем известной. Сначала в самом базовом приближении евклидовой метрической связности. Почему? Вспомните, сколь малы поправки к компонентам классической метрики при рассмотрении обычных для нас тел в качестве материальных точек. Так что мы можем с вполне хорошей точностью ими пренебречь при таких условиях. Это позволит нам уяснить основные черты, основные свойства электромагнитного поля, не усложняя наше описание мало существенными деталями. Т.к. все наши уравнения записаны в виде полностью ковариантных соотношений, то при необходимости можно искать и более точные решения этих уравнений. Однако, для понимания существа дела это совсем не требуется. Моей главной целью в этом томе является именно уяснение взаимосвязей, вводимых в описание понятий, осознание того, как мы можем сформулировать последовательно **основы описания мира — основания физики** — а не изучение всех возможных вытекающих из них следствий. Поэтому я ограничиваюсь обсуждением только тех вопросов, которые высвечивают основы физики максимальным образом. Без освещения которых нельзя увидеть все взаимосвязи физики как описания мира.

Достаточно очевидно, что для выделенной единственной классической частицы, для единственной материальной точки с характеристиками m_0 и e , нам выгодно изучать ситуацию в тех же самых стандартизованных системах координат, которые мы использовали для получения решения Шварцшильда. Специальных системах координат, соответствующих системам покоя базовой материальной точки. В сингулярных в пространственной части координатах $\{r, \theta, \phi\}$ с четвёртой координатой $x^4 = ict$, выбранной так, что $dx^i/dl = \{0, 0, 0, i\}$ на траектории базовой материальной точки. Время в этой системе отсчёта предполагается **собственным** временем базовой классической материальной точки. Все величины, характеризующие как саму материальную точку, так и поле связности, создаваемое ею в окружающем пространстве-времени, обязаны быть постоянными в соб-

ственном времени этой классической частицы. Зависимость от пространственных координат сводится только к зависимости от расстояния до материальной точки. По определению, в этом случае мы имеем центрально симметричное и стационарное описание области в таких системах отсчёта.

Искомые нами величины обязаны удовлетворять уравнениям (2.70) и (2.86), которые я повторяю здесь:

$$\mathcal{E}^{ijkl}\partial_j\bar{F}_{kl}=0 \quad (2.91)$$

и

$$\tilde{\nabla}_i(\mathfrak{g}\bar{F}^{ik})=\tilde{\mathfrak{J}}^k. \quad (2.92)$$

Внимательный читатель должен был заметить, что я называю эти уравнения “парами уравнений Максвелла”, хотя их вид явным образом указывает на то, что речь идёт всего о двух уравнениях для двух контравариантных векторов, сформированных из компонент одного и того же тензора. Точнее, об определении каждой из четырёх компонент этих векторов. Возникает вопрос — с чем это связано? Ответ достаточно прост. Такое название возникло чисто исторически, поскольку вначале два проявления одного и того же поля физики — электромагнитного — долго рассматривались совершенно независимо, как отдельные электрическое и магнитное поля. И только после того, как Д.К.Максвелл представил свою систему уравнений, объединяющую оба этих поля в единое, электромагнитное, стало ясно, что все известные (а к ним добавились и неизвестные в то время) явления могут быть описаны единым образом. Но систему уравнений пришлось изначально записывать именно для двух разных полей, электрического и магнитного. Более того, понятие о тензоре Максвелла является гораздо более поздним, чем сами уравнения Максвелла, и введено другими людьми. Да и сами уравнения были представлены Максвеллом в форме, несколько отличающейся от современной записи их через векторные обозначения. Не говоря уже о рассматриваемой здесь тензорной форме этих уравнений. Однако, это не умаляет достижений Максвелла.

В нашем описании мы идём от общего к конкретному, поэтому сразу используем те обозначения, которые являются естественными для описания мира пространством аффинной связности, идеальной математической конструкцией, а не введёнными физикой феноменологическими понятиями отдельно “электрического” и отдельно “магнитного” поля. В этом параграфе, помимо вывода вида функциональной зависимости дополнительных к метрической компонент связности от точки пространства-времени, мы пройдем и обратную дорогу от единого электромагнитного поля к его представлению совокупностью электрического и магнитного полей вместе. На этом пути в определённый момент и станет видна причина, почему каждое из двух уравнений (2.91, 2.92) при таком подходе выглядит как “пара уравнений”.

Для большей наглядности изложения я перепису уравнение (2.91) в покомпонентной форме в самом общем виде, а в уравнении (2.92) сделаю те упрощения, которые следуют из принятых нами условий на систему отсчёта, в которой мы ищем решения этих уравнений, и из выбора метрики в простейшем виде.

Первое из этих уравнений превращается в систему из четырёх уравнений, утверждающих, что все четыре компоненты некоторого вектора⁴⁴, сформированного из производных компонент тензора Максвелла должны быть **тождественно** равны нулю **всегда, для любого** описания мира пространством аффинной связности:

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad & \partial_2 \bar{F}_{34} + \partial_3 \bar{F}_{42} + \partial_4 \bar{F}_{23} = 0 \\ i = 2 : \quad & \partial_1 \bar{F}_{34} + \partial_3 \bar{F}_{41} + \partial_4 \bar{F}_{13} = 0 \\ i = 3 : \quad & \partial_1 \bar{F}_{24} + \partial_2 \bar{F}_{41} + \partial_4 \bar{F}_{12} = 0 \\ i = 4 : \quad & \partial_1 \bar{F}_{32} + \partial_3 \bar{F}_{21} + \partial_2 \bar{F}_{13} = 0. \end{aligned} \tag{2.93}$$

⁴⁴Эти величины можно рассматривать как компоненты вектора **только в евклидовом пространстве**. Для нас очевидно, что это либо компоненты плотности контравариантного вектора, либо антисимметричного тензора с тремя ковариантными индексами, а не вектора. Но исторически евклидовость пространства не подвергалась сомнению, и сейчас мы работаем именно в приближении метрической части связности как евклидовой, поэтому я использую соответствующую терминологию.

Если мы подставим в эту систему уравнений явные выражения тензора Максвелла через вектор-потенциал A_j , и учтём, что обычные вторые производные не зависят от порядка дифференцирования, то, естественно, обнаружим, что эти соотношения выполняются тождественно для всех тензоров вида $\bar{F}_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$. Как и следовало ожидать. Т.е. роль этого уравнения в нашей системе сводится именно к требованию на структуру тензора Максвелла, утверждение о его происхождении как антисимметризованной производной от некоторого ковариантного вектора. Для нас это не уравнения, а структурные тождества. Однако, в классическом изложении физики это именно уравнения, позволяющие **установить структуру** тензора Максвелла. Ту структуру, которая в нашем описании мира следует из самого способа описания. Вполне понятно, что если мы исходим из самого этого факта и пытаемся определить именно производящий тензор Максвелла вектор-потенциал A_j , то нужды в этих уравнениях мы не имеем.

Всё, что мы сможем сказать о возможной функциональной зависимости от радиуса компонент A_j мы должны получить из второго нашего уравнения, (2.92), связывающего свойства материальной точки с окружающей её областью в части проявления наличия у этой точки не нулевого электромагнитного тока $\tilde{J}^k$.

В системе покоя этот ток имеет всего одну не нулевую и постоянную в собственном времени компоненту $\tilde{J}^4 = e \cdot dx^4/dl = ie$. При распространении электромагнитного тока на окружающую материальную точку область нам следует вместо компоненты вектора рассматривать компоненту его сингулярной плотности $\rightarrow \tilde{J}^4 = ie\delta(r)$. Вектор-потенциал, создаваемый этой плотностью, может зависеть только от расстояния r до сингулярности (материальной точки), обязан быть постоянным во времени и иметь только одну не нулевую компоненту $\rightarrow A_4 \neq 0$. При этих условиях все компоненты тензора Максвелла, кроме $\bar{F}_{14} = -\bar{F}_{41} = \partial_1 A_4$ обращаются в нуль. Т.к. мы пренебрегаем поправками в коэффициентах классической метрики, возникающими из наличия у нашей материальной точки массы покоя

($\bar{F}^{14} = g^{11}g^{44}\bar{F}_{14} = 1 \cdot 1 \cdot \bar{F}_{14} = \partial_1 A_4$), то уравнение (2.92), с учётом обращения в нуль ещё и всех производных по времени превращается в следующее уравнение:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} A_4 \right) = ie\delta(r). \quad (2.94)$$

С учётом соотношения (1.30) получаем функциональную зависимость от радиуса для единственной не нулевой компоненты вектор-потенциала:

$$A_4 = -\frac{i}{4\pi} \frac{e}{r}. \quad (2.95)$$

$A_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$. Мнимая единица здесь присутствует из-за нашего определения мнимой четвёртой координаты вместо действительного времени.

Что можно сказать об этом соотношении уже сейчас? Вектор-потенциал, будучи полноценным ковариантным вектором, по своему геометрическому смыслу является удельной величиной. Каждая его компонента в естественных единицах имеет размерность $[A_i] = [x^i]^{-1}$. Следовательно, естественной размерностью A_4 в нашей системе координат является размерность $[x^4]^{-1} = [ct]^{-1} = [r]^{-1}$. Тогда в естественных единицах введённая нами характеристика электромагнитных свойств материальной точки — заряд e — является величиной безразмерной. Исходя только из этого соотношения, мы пока ничего сказать не можем о том, какова может быть конкретная величина этого заряда. Однако, уже то, что в естественных единицах число это безразмерное, указывает нам, что скорее всего для всех материальных точек имеется единственное такое общее число, которому должны быть кратны заряды всех классических частиц. И, как мы знаем из опыта, это действительно так. Далее, можно сказать, что в таком случае это общее для всех классических частиц число можно и переопределить, включив в него множитель $(4\pi)^{-1}$. Такое переопределение может быть даже вполне удобным, если мы посмотрим на соотношение $\tilde{\mathfrak{J}}^4 = ie\delta(r)$ как на полноценную трёхмерную плотность, а не только как на плотность

по отношению к радиусу, главной координате в пространстве. В этом случае мы обязаны включить в неё и “стандартный объём” не принятых во внимание угловых координат. Кроме того, поскольку заряд во всех классических приближениях величина для теории внешняя, то можно даже вообще использовать некоторое произвольное число в качестве единицы заряда. Но тогда во всех наших соотношениях должны появиться дополнительные коэффициенты взаимного пересчёта всех взаимосвязанных величин (в первую очередь, компонент A_j и $\bar{F}_{ij}$). Мы с самого начала видим, что проявление этих полей в нашем описании в определённой степени изолировано от проявлений метрической части симметричной связности в силу инвариантной выделенности тензора $\bar{F}_{ij}$. Поэтому такого рода изменения классических единиц для описания явлений электромагнетизма отдельно, без связи с основными единицами пространства-времени и массы, в принципе возможны.

В классической физике большинство изложений теории электромагнетизма используют систему единиц Гаусса (сантиметр, грамм, секунда и множитель $(4\pi)^{-1}$ включен в определение заряда). В этой системе единиц соотношение (2.95) будет выглядеть так:

$$A_4 = -\mathbf{i} \frac{e'}{r} = -\mathbf{i}\varphi. \quad (2.96)$$

Кроме того, обычно мнимая координата вместо времени не используется, тогда и мнимая единица в этой формуле будет отсутствовать. Правильная расстановка знаков при этом обеспечивается либо отрицательным знаком при $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$ с положительной единицей для $\mathbf{g}_{44}$, либо наоборот. Величину A_4 (без мнимой единицы) при этом обозначают символом φ и называют потенциалом **электрического** поля частицы с зарядом e' .

Однако, довольно часто употребляется и та форма записи соотношений электромагнитной теории, к которой мы пришли естественным путём. Такую систему единиц обычно называют системой единиц Хевисайда-Лоренца. Понятно, что нам явно гораздо удобнее работать именно в этих предположениях, поскольку

ку наличие тех или иных коэффициентов в наших соотношениях находит совершенно естественное объяснение. В частности, как я уже упоминал неоднократно, 4π у нас всегда возникает в результате учёта “стандартизированной угловой части” трёхмерного объёма для “стандартизованных” центрально симметричных систем отсчёта. И для нас важно, что, если мы вдруг откажемся от такой стандартизации, то все наши исходные уравнения для общих систем координат будут по-прежнему прекрасно работать.

Обратите внимание на то, что для тока $\tilde{J}^k$ размерности компонент при безразмерном заряде не будут естественными автоматически. Обусловлено это тем, что этот вектор не является полноценным контравариантным вектором априори. Это относительный вектор, в определении которого присутствует классическая метрика. Соответственно, его размерности обязаны учитывать соглашения о размерностях компонент метрического тензора. Именно поэтому в приведённом выше анализе я опирался на выражение для компонент вектор-потенциала, а не вектора тока.

Обсуждение электромагнитных свойств области, окружающей заряженную материальную точку, не будет полным, если мы не рассмотрим выражение для основной структуры, характеризующей отличие свойств этой области от чисто метрической геометрии, тензор Максвелла:

$$\begin{aligned}\bar{F}_{ik} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_r A_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_r A_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{i}{4\pi} \frac{e}{r^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{4\pi} \frac{e}{r^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.97}$$

Хочу напомнить, что в первом томе я сформулировал соглашение, которому по возможности следуя всюду, о соответствии контравариантного индекса тензора номеру строки, а ковариантного

— номеру столбца, когда даю представление элементов тензора в виде матрицы. Здесь мы не можем в точности следовать такому соглашению потому, что представляем в виде матрицы тензор с одинаковым типом индексов. В данном случае дважды ковариантный тензор. Поэтому нужно уточнить, какой из индексов, первый или второй будет рассматриваться нами как номер строки. Здесь и далее в похожих случаях это всегда будет первый индекс.

А теперь вопрос по терминологии. Почему в физике вектор A_j называют вектор-потенциалом? Да и я тоже следую этой исторически обусловленной практике. Более того, полагаю что в уточнении “потенциал” имеется важный физический смысл. Чтобы легче уяснить происхождение этого термина полезно перейти из нашей специальной, сингулярной в части описания трёхмерного пространства системы координат в регулярную декартову систему. Всё ещё систему покоя базовой материальной точки, и всё ещё стандартизованную, ортонормированную. Т.е. систему отсчёта мы не изменяем. Таких систем координат, отличающихся выбором опорного направления, от которого отсчитываются углы, бесконечно много. Матрица классической метрики имеет в таких системах простейший вид — она диагональна и все диагональные элементы равны единице.

Переход к декартовым координатам осуществляется с помощью следующих определений для преобразования координат:

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin \theta \cos \phi \\ x^2 &= r \sin \theta \sin \phi \\ x^3 &= r \cos \theta \\ x^4 &= x^4 = \mathbf{i}c \cdot t. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Достаточно ясно, что, поскольку мы не покидаем системы покоя и система отсчёта фактически остаётся прежней, время в ней не преобразуется вовсе, то и четвёртая компонента вектор-потенциала остаётся той же самой. И функциональный вид единственной не нулевой компоненты можно оставить в прежнем виде, если рассматривать переменную r , радиус в сингулярных

координатах, как **обозначение, символ** для определённой комбинации трёх пространственных координат:

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}. \quad (2.99)$$

А вот вид тензора Максвелла несколько изменится, т.к. производные по всем пространственным координатам от единственной компоненты вектор-потенциала быть равными нулю уже не обязаны. Только производная по времени остаётся нулевой. Поэтому в таких координатах в системе покоя заряженной материальной точки тензор Максвелла в общем виде выглядит так:

$$\bar{F}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_1 A_4 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_2 A_4 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_3 A_4 \\ -\partial_1 A_4 & -\partial_2 A_4 & -\partial_3 A_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.100)$$

В классической физике, в теории электромагнитного поля принято использовать⁴⁵ как **напряжённость электрического поля трёхмерный** вектор $\mathbf{E} = -\mathbf{i}\partial_\alpha A_4 = -grad \varphi$. Перепишем тензор Максвелла в этих обозначениях:

$$\bar{F}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{i}E_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{i}E_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{i}E_3 \\ -\mathbf{i}E_1 & -\mathbf{i}E_2 & -\mathbf{i}E_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

Важно ясно понимать, что $\mathbf{E}$ преобразуется как настоящий вектор только в группе координат, связанных чисто пространственными поворотами. И всё. Т.е. это не вектор с точки зрения

⁴⁵Такие обозначения сложились исторически. Сначала описывались электрическое и магнитные поля по-отдельности. И только после многих исследований, завершившихся работами Максвелла (*полноценное* осознание искусственности такого разделения пришло заметно позже), эти две совокупности явлений стали описываться вместе, как единое электромагнитное поле. Но как вы можете видеть здесь, имеется множество ситуаций, когда проявляется только одна из сторон электромагнитного поля. В системах покоя зарядов это только их электрическое поле, причём потенциального вида с единственным производящим напряжённость потенциалом. Термин “потенциальный вид” означает буквально, что напряжённость является **градиентом** некоторой функции.

полного пространства-времени. Однако, в физике очень длительное время (а часто и сегодня тоже) пространство рассматривалось отдельно от времени, как нечто цельное, существующее во времени. Поэтому **Е** по-прежнему называют вектором, к сожалению очень часто забывая об имеющихся ограничениях на употребление этого термина в данном случае. Так или иначе, но сейчас мы ввели в употребление явным образом **отдельно** одно из полей, которое является составной частью единого, электромагнитного поля. И имеем уже одно из уравнений для него, которое связывает это поле с источником, зарядом, и входит во вторую группу уравнений Максвелла при их записи в исторически обусловленном виде. С учётом происхождения этого поля из вектор-потенциала можно отметить, что в нашем распоряжении имеется также и одно из уравнений из первой группы уравнений Максвелла. Кроме того, мы видим, что в тензоре Максвелла электрическое поле можно явным образом ассоциировать с его четвёртым (временным) столбцом. И, естественно, также и с четвёртой строкой. То, что это четвёртые столбец и строка обусловлено принятым нами ещё в самом начале построения описания мира ограничением на выбор нумерации масштабов в процедурах измерения.

Теперь нужно ещё уяснить, как проявляется в тензоре Максвелла вторая сторона единого электромагнитного поля — поле магнитное. Какие компоненты этого тензора можно называть компонентами напряжённостей магнитного поля. Для этого посмотрим, как выглядят поля A_j и $\bar{F}_{ij}$ с точки зрения одной из *систем отсчёта*, принадлежащих к той же самой группе локально инерциальных, что и система покоя нашей заряженной материальной точки. Рассмотрим случай, когда система покоя нашей материальной точки (а значит она сама) движется прямолинейно относительно новой системы отсчёта с координатами $\{x^{i'}\}$ с постоянной скоростью v . Движение происходит только вдоль оси $x^{1'}$. В момент времени $x^4 = \mathbf{i}c \cdot t = 0$ начала координат и оси обеих систем совпадают в точности. Знак скорости не имеет значения, нам всё равно в каком направлении, увеличения

$x^{1'}$, или уменьшения происходит это движение. Преобразование координат, связывающее эти две системы координат представляет собой стандартный поворот Лоренца в плоскости $\{x^1, x^4\}$ на некоторый мнимый угол $\mathbf{i}\vartheta$ или обратный ему поворот в плоскости $\{x^{1'}, x^{4'}\}$ на угол $-\mathbf{i}\vartheta$:⁴⁶

$$\partial_{i'}^i = \begin{pmatrix} \cos \mathbf{i}\vartheta & \sin \mathbf{i}\vartheta \\ -\sin \mathbf{i}\vartheta & \cos \mathbf{i}\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & \mathbf{i} \sinh \vartheta \\ -\mathbf{i} \sinh \vartheta & \cosh \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.102)$$

Здесь $i, i' = 1, 4$.

Величина угла поворота, стандартизованного параметра преобразования, определяется скоростью взаимного движения двух наших систем отсчёта:

$$\sinh \vartheta = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad \cosh \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (2.103)$$

Пользуясь этими соотношениями легко получить компоненты $A_{j'}$:

$$\begin{aligned} A_{1'} &= \partial_{1'}^4 A_4 = -\mathbf{i} \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} A_4 \\ A_{4'} &= \partial_{4'}^4 A_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} A_4. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Выражения для компонент вектор-потенциала столь просты потому, что пространственная часть вектор-потенциала A_j в системе покоя заряженной материальной точки строго нулевая. А теперь мы видим, что в системе, относительно которой наша материальная точка движется, у этого вектора уже появляется одна пространственная компонента, именно в направлении движения. И временная компонента тоже модифицируется. Нужно учесть также, что изменение временной компоненты как функции координат не сводится только к появлению указанного выше множителя. Преобразование Лоренца изменяет также и расстояния между двумя точками, вычисленные через координаты в

⁴⁶Знак угла нам не важен, так как он напрямую связан со знаком скорости, т.е. направлением движения вдоль оси. А это нам здесь не интересно.

разных системах отсчёта, неподвижной и движущейся. Поэтому нужно ещё переписать выражение для символа r , записанное нами с помощью координат в системе покоя нашей материальной точки через координаты в новой (неподвижной, но не для нашей материальной точки) системе отсчёта. Чтобы избежать путаницы с “евклидовым расстоянием”, я добавлю уточняющий штрих для этой величины при её записи через новые координаты

$$r' = \sqrt{\frac{(x^{1'} - v/c \cdot x^{4'})^2}{1 - (v/c)^2} + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2}. \quad (2.105)$$

Эту величину следует ставить в выражение для A_4 вместо r .

Мы выделили вполне определённое направление для относительного движения наших систем отсчёта. Сделать его произвольным можно двумя последовательными преобразованиями, определяемыми двумя действительными параметрами, углами θ и ψ , параметрами обычных пространственных поворотов в плоскости $\{x^{1'}, x^{2'}\}$ и затем в плоскости $\{x^{1''}, x^{3''}\}$. Преобразования, соответствующие этим поворотам, выглядят точно также, как и (2.102), только мнимой единицы в них нет. Легко видеть, что временная компонента вектор-потенциала в результате таких последовательных чисто пространственных поворотов никак не изменяется. А вот в пространственной части вектора последовательно появляются компоненты по обоим оставшимся осям. Причём вычислить их достаточно просто, т.к. в вычисления всегда оказывается вовлечённой лишь одна единственная пространственная компонента вектор-потенциала из предыдущей системы координат. Конечный результат после всех этих поворотов представлен ниже. Чтобы не плодить новые штрихи, я итоговую систему координат пометил всего одним штрихом, но следует представлять ясно, что это именно итоговая система отсчёта, с произвольным направлением (определяемым стандартизованными угловыми параметрами) **прямолинейного и равномерного** движения заряженной материальной точки. Углы $(-\theta)$ и $(-\psi)$ при

этом часто называют “направляющими углами”.

$$\begin{aligned}
 A_{1'} &= -\mathbf{i} \cos \theta \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} A_4 \\
 A_{2'} &= -\mathbf{i} \cos \psi \sin \theta \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} A_4 \\
 A_{3'} &= -\mathbf{i} \sin \psi \sin \theta \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} A_4 \\
 A_{4'} &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} A_4.
 \end{aligned} \tag{2.106}$$

В функциональном выражении (2.95) для A_4 через координаты в итоговой системе отсчёта вместо r следует подставлять символ r' (2.105) с правильно модифицированными пространственными координатами (уже всеми). Поэтому, хотя компоненты вектор-потенциала в итоговой системе координат и выглядят не зависящими от времени, на самом деле такая зависимость имеется, одинаковая для всех компонент вследствие изменения со временем “текущего расстояния” от движущейся заряженной частицы r' . Напряжённость электрического поля $\mathbf{E}$ не может уже рассматриваться как полноценный градиент “скалярного” потенциала φ . Однако, при обычных для нас условиях, когда $v/c \ll 1$, вкладом производных по времени в соответствующие компоненты тензора Максвелла часто можно пренебречь.

Поскольку в наших соглашениях A_4 является мнимым числом⁴⁷, то все компоненты пространственной части вектор-потенциала будут числами действительными.

Запишем матрицу тензора Максвелла в неподвижной для нас системе отсчёта, относительно которой заряженная материаль-

⁴⁷При условии, что заряд e выбран числом действительным. Хотя это мы пока ещё не можем рассматривать как окончательный выбор, т.к. не довели до конца изучение влияния наличия не нулевого тензора Максвелла на описание мира. Соображения о том, что заряд должен быть действительным числом достаточно тривиальны. С одной стороны, это ведь **коэффициент пропорциональности** между двумя **измеренными** векторами. Измеренные компоненты векторов не могут иметь компоненты мнимыми, если единица измерения является действительной и наоборот. С другой стороны, как мы увидим позже, вектор электромагнитного тока даёт свой вклад в действие на траектории частицы. А значит этот вклад **обязан** быть действительным, т.к. действие пропорционально действительному числу событий.

ная точка движется указанным выше образом. Компоненты вектор-потенциала A_j в этой системе определяются согласно соотношениям (2.106) через имеющееся у нас решение для системы покоя этой заряженной материальной точки. Для удобства сменим взаимно штрихованные координаты и нештрихованные между указанными системами отсчёта. Т.е. теперь нашей системе отсчёта соответствуют нештрихованные индексы. Для компонент четвёртого столбца и четвёртой строки матрицы тензора Максвелла сохраним введенные ранее обозначения через компоненты $\mathbf{E}$, а также введём следующие новые обозначения для компонент оставшейся 3×3 матрицы:

$$\begin{aligned} -H_1 &= \bar{F}_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ -H_2 &= \bar{F}_{31} = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ -H_3 &= \bar{F}_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{aligned} \quad (2.107)$$

В классической физике (естественно, в ограничениях евклидовой геометрии) именно таким образом был определён **аксиальный вектор** напряжённости **магнитного** поля $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$, где $\mathbf{A} = \{-A_\alpha\}$ рассматривается как трёхмерный ковариантный вектор, искусственно выделенный в полноценном четырёхмерном ковариантном векторе. Как вы должны уже понимать, процедура эта является полностью осмысленной только при ограничении чисто пространственными преобразованиями. Т.е. полноценное употребление $\mathbf{H}$ как трёхмерного вектора ограничено теми же условиями, что и $\mathbf{E}$. Однако, применять E_α и H_α как **обозначения для определённых компонент** $\bar{F}_{ik}$ можно без каких-либо ограничений, в любых используемых нами системах координат. В этих обозначениях тензор Максвелла приобретает тот вид, в котором его обычно и записывают в книгах по теории электромагнитного поля (кроме имеющейся у нас мнимой единицы, присутствие которой связано с использованием мнимых чисел для

временной координаты):

$$\bar{F}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -H_3 & H_2 & iE_1 \\ H_3 & 0 & -H_1 & iE_2 \\ -H_2 & H_1 & 0 & iE_3 \\ -iE_1 & -iE_2 & -iE_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

Используя такие обозначения, оба наших уравнения для электромагнитного поля (2.91, 2.92) можно переписать в форме двух пар уравнений, связывающих **H** и **E**. Эту форму записи можно увидеть в §4.6. Должен заметить, что такие специальные векторные обозначения в уравнениях для напряжённостей электрического и магнитного полей сам Максвелл не применял, их ввели позже. И удобство их использования исчезает как только приходится рассматривать мир не как пространство, существующее во времени, а как единое пространство-время. Так что в дальнейшем я по-прежнему буду использовать естественные геометрически ясные величины A_j и $\bar{F}_{ik}$, а не **H** и **E**, обращаясь к этим обозначениям только тогда, когда как и сейчас будет нужно переформулировать результаты на языке привычном в физике, чтобы сделать их легко узнаваемыми.

Мы выяснили, какой функциональный вид должны иметь свёртки⁴⁸ тензорного добавка к метрической связности при расширении возможных свойств континуума изменять векторы локального репера, масштабы локальных процедур измерений до произвольной симметричной связности так, чтобы при этом согласовывались все локализованные процедуры измерений. Выяснили мы это для специального случая стандартизованных систем отсчёта. Для группы таких систем отсчёта, в которых реперы масштабов локально выбираются в строгом соответствии с некоторым требованием на внутреннюю самосогласованность. Требование это записывается нами как локальное существование классической метрики, позволяющей описывать весь локальный репер как единое целое.

⁴⁸При условии, что они не равны нулю и, более того, имеют не интегрируемую составляющую.

Так что же должно изменяться в локальном репере, чтобы соответствовать полученному нами решению для A_j при необращении в нуль ротора этого ковариантного вектора, который мы также называем потенциалом электромагнитного поля, чтобы описание нашей выделенной области в пространстве-времени было самосогласованным?

Ответ на этот вопрос нам немедленно даёт соотношение (2.74), часть которого я для удобства повторяю ниже:

$$\bar{\nabla}_j \mathbf{g} = -A_j \mathbf{g}. \quad (2.109)$$

Из него видно, что вектор-потенциал A_j , взятый со знаком минус, описывает **относительное изменение** метрической Δ -плотности веса $+1$, величины обратной к локальному метрическому объёму, построенному на векторах локального репера, которое возникает из несогласованности классической метрики с реальной связностью в области. С той связностью, которая должна быть распределена в области, чтобы наше описание области системой отсчёта было самосогласованным. Той связностью, которая должна существовать в каждой точке выделенной области пространства-времени, чтобы эта область включала в себя естественным образом, как необходимую часть, нашу базовую заряженную материальную точку. Чтобы описание области было описанием единого целого.

Т.к. произведение метрической плотности на локальный метрический объём является полноценным локализованным инвариантом, то это означает, что сам локальный метрический объём $d\tilde{V}$ следует рассматривать также как Δ -плотность, но уже веса -1 . А это значит, что мы можем написать ещё одно соотношение, связывающее уже изменение метрического объёма с вектор-потенциалом:

$$\bar{\nabla}_j d\tilde{V} = A_j d\tilde{V}. \quad (2.110)$$

Из самой структуры элемента объёма,

$$dV = d^4x = dx^1 \cdot dx^2 \cdot dx^3 \cdot dx^4,$$

достаточно очевидно, что любые изменения в его величине могут возникать **только** при изменении **величин** масштабов. Поскольку в нашем ограниченном стандартизованном описании имеется один единственный масштаб для всех направлений (и для пространственных, и для времени подобного направления), то изменение локального метрического объёма означает изменение **с локальным временем** этого масштаба **для каждой точки вне заряженной материальной точки с относительной** скоростью, определяемой единственной не нулевой в нашем решении компонентой вектор-потенциала A_4 . Собственно, такое решение необходимо возникло именно из специального выбора системы отсчёта — другие возможности просто исключены нашим выбором описания. При расширении допустимого выбора систем отсчёта с системы покоя на все (локально) инерциальные, для самосогласованности нашего описания масштаб времени, положенный в основу каждого локального репера как целого, должен зависеть от расстояния до заряженной материальной точки так, как диктуют приведённые выше соотношения для A_4 . И вместе с ним, в соответствии со своими A_α , и масштабы по пространственным направлениям. Притом, что сама матрица метрического тензора может полагаться в нулевом приближении всё ещё полностью стандартной, евклидовой.

Напомню, что простой учёт наличия событий на выделенной траектории в области привёл нас к необходимости принять то, что сама область как часть континуума, **поворачивает** стандартизованный локальный репер **как целое** на некоторый угол в плоскости $\{r, x^4 = \mathbf{i}c \cdot t\}$. Угол разный для разных расстояний от базовой материальной точки, задающей эталонные свойства репера. Что для нас выглядит как потенциальное движение всякого стандартизованного локального репера относительно общей, глобализованной системы отсчёта с некоторой скоростью v , зависящей от массы покоя базовой классической частицы и от расстояния от неё до данной точки. Важным моментом является то, что **на этом уровне приближения** описания мира **каждый локальный метрический объём всё ещё остаётся неиз-**

менным. Т.е. “величина” масштаба, положенного в основу глобализованной системы отсчёта, остаётся для всех точек области одной и той же. Это поле связности, её метрическое воплощение, мы связали с полем гравитации, притяжения, введённым в физику Ньютоном как явление независимое от свойств **вмещающего** (т.е. индифферентного к тому, что оно вмещает) пространства-времени. У нас это необходимое условие согласованности целого и его части. Свойство самого континуума, учитывающее характеристики его частей.

Теперь оказывается, что наличие во **вмещающем** пространстве-времени (уже возможно поправленном на согласие с наличием событий, рассматриваемых как одномерная непрерывность) ещё одного определённого экспериментальной физикой и описанного теоретической физикой поля, электромагнитного, тоже можно без проблем ввести в естественное геометрическое описание области пространства-времени как целостности в виде такого же требования **взаимного согласия всех локальных реперов с основой**, распространённой на всю область с базовой классической заряженной частицы процедурой измерения. Если *гравитационное поле является представлением в связности подгруппы поворотов стандартизованных локальных реперов как целого* в пространстве-времени, выделенной из всех возможных допустимых преобразований реперов в точке, то *электромагнитное поле является представлением в связности также отдельно выделенной подгруппы масштабирований*.

Электромагнитное поле ответственно за согласование в области отклонений величины локальных метрических стандартизованных объёмов от той величины, которая соответствует стандарту, основанному на материальной точке, взятой за базу описания в области.

Более того, на самом деле мы уже и ранее подразумевали опору на такую возможность, когда говорили о стандартизации системы отсчёта и совместной для гравитационного и электромагнитного полей калибровке связанной с такой системой отсчёта классической метрики. Просто сейчас у нас появляется воз-

можно уточнить, что конкретно мы понимаем под выбором уже откалиброванной и стандартизированной системы отсчёта.

Мы уяснили, что наличие в области пространства-времени электромагнитного поля означает возможность изменения при смещении от точки к точке локальных метрических стандартизованных объёмов вследствие изменения **величин** локальных масштабов в репере. Но ведь мы рассматриваем всю нашу систему масштабов, распространённую на континуум, как “откалиброванную”. Что стоит за этим словом? А то, что мы **полагаем**, что все эти локальные реперы **в точности совпадают друг с другом** и, считая так, без зазрения совести сравниваем результаты наших измерений, сделанных в **разных** точках пространства-времени. И в это “полагаем” входит также представление о неизменности величин масштабов. Т.е. напрямую мы **не отслеживаем** именно эту изменчивость в наших реперах. А что отслеживаем? Только модификацию того, что уже раньше проявилось как признак наличия гравитации. Локальные повороты Лоренца, выражающиеся в приобретении пробной материальной точкой некоторой **скорости** относительно нашей **метрической откалиброванной глобальной** системы отсчёта вследствие наличия в данной точке пространства-времени ещё одного физического поля, или, иными словами, ещё одной причины локальному реперу изменяться. Просто потому, что всё, что нам доступно для измерений в рассматриваемом классическом приближении хотя бы теоретически, это **различие в линиях существования материальных точек**. Локальный масштаб времени мы принудительно (“откалибровав”) считаем всюду одинаковым. Остаётся только изменение его направления. Соответственно, это необходимо означает, что **в зависимости метрического тензора от точки в пространстве-времени обязаны появиться поправки, учитывающие и наличие дополнительного к гравитационному электромагнитного поля**. Причём в стандартизованных координатах и для единственной материальной точки это будут поправки к единственной стандартизированной функции в полученном нами решении Шварцшиль-

да. Я не буду останавливаться здесь на получении этих поправок, т.к. в следующей главе мы напрямую займёмся определением скорости пробной материальной точки относительно нашей глобализованной (и стандартизированной) метрической системы отсчёта, обусловленной каждым из физических полей (т.е. каждой из возможностей для репера изменяться) с несколько других позиций.

Дело в том, что гораздо более важные изменения в описании, чем поправки в стандартизованных компонентах метрики, возникают из того факта, что при наличии в области заряженной материальной точки нам следует пересмотреть **локальные соотношения между действием на линиях существования других частиц, которые могли бы иметься где-то в области, и нашими определениями масштаба времени и дифференциала метрического интервала на этих линиях**. Как именно это должно быть описано, я укажу в следующей главе. Но, если выразить наши результаты в общих словах, то наличие электромагнитного поля в области будет проявляться как **отличие траекторий материальных точек от геодезических метрической связности**.

Требования взаимного согласия всех локальных реперов выражаются также и в необходимости изменения их общей нормы, единственного базового масштаба как некоторой **глобальной для области** функции пространственного расстояния от базового масштаба⁴⁹.

⁴⁹Впервые использовать связь между зависимостью от точки **величины** масштаба, т.е. его “длины” как объяснение электромагнитных явлений предложил Г.Вейль в двадцатых годах прошлого века. В то время и в математике ещё не существовало достаточно развёрнутого представления о роли аффинной связности в геометрии. Собственно, именно труды Вейля внесли немалый вклад в формирование понятий, важных для пространств аффинной связности. Но более-менее эта работа была завершена заметно позже того времени, когда в физике рассматривалось предложение Вейля для описания электромагнетизма с помощью геометрических понятий. Само это предложение было раздавлено авторитетом А.Эйнштейна, который в качестве критики использовал утверждение, что свойства, например, атомов не зависят от того, в каком месте вселенной они находятся. На эту тему мож-

Это то, что мы получаем из уяснения геометрического смысла вектора A_j . Но здесь имеется одна тонкость. Всё это справедливо только тогда, когда тензор Максвелла $\bar{F}_{ik} \neq 0$. Если он равен нулю, т.е. когда вектор A_j является градиентом некоторой **глобальной** (для области) функции, или даже равен нулю всюду в области⁵⁰, то весь добавочный к метрической связности симметричный тензор мы можем интерпретировать как *неправильную калибровку системы отсчёта и её образа — метрики* из-за того, что в этой системе отсчёта **величины** масштабов гладким образом изменяются от точки к точке. И **выбором** иной системы координат (с помощью масштабирований, замен **величин** единиц измерения, и, возможно, **не ортогональных** поворотов) сделать метрический объём (метрическую плотность) не зависящим от точки в области. И уже эти распределённые в области реперы считать **откалиброванными**⁵¹.

но сказать, что опыт явно нам говорит, что зависят. Именно эта зависимость приводит к необходимости принятия теории, развитой самим А.Эйнштейном. Разве важно то, что в ОТО идёт речь только о проявлении такой зависимости в виде **поворота** локального репера, при сохранении конструкции репера масштабов как целого? Ведь это тоже зависимость от места и времени. И проявляется в виде вполне измеримых физических эффектов — в частности в изменении свойств световых волн излучаемых атомами. Вопрос только в том, какие именно свойства масштабов могут изменяться от точки к точке.

Повторяю, именно Г.Вейль ввёл в математику представление о возможности изменения не только “направления” репера масштабов как целого при смещении в континууме от точки к точке, но и рассмотрел также возможность изменения общей для всего репера “длины”. Его работа, насколько я знаю, была пионерской. И он сразу заметил возможность связать полученные им результаты с электромагнетизмом. Не настоял, не довёл теорию до логического конца, не устоял перед авторитетом Эйнштейна... Но это не умаляет его заслуг.

⁵⁰Этот случай мы не рассматриваем отдельно, т.к. можем полагать, что при $A_j = 0$ следует вести речь о градиенте **постоянного для всей области** коэффициента. Т.е. этот случай отвечает простому умножению метрики всюду в области на некоторую постоянную.

⁵¹Таким образом мы устраняем из рассмотрения влияние на описание интегрируемой части A_j . Утверждать, что также полностью устраняется влияние полного такого тензора A_{jk}^i формально мы пока не можем. Однако, имеются причины (помимо результатов метода Палатини) для того, что-

Если $\overline{F}_{ik} \neq 0$, то ситуация упрощается. Наличие этой степени свободы делает комплекс {классическая метрика, единица массы и масштаб интервала} с одной стороны, определённым с точностью до гладкой функции точки, а вектор-потенциал электромагнитного поля с другой стороны, определённым с точностью до градиента этой функции. Производя калибровку классической метрики мы одновременно изменяем и вектор A_j , добавляя к нему градиент некоторой функции точки и наоборот. Возможно это по той простой причине, что именно с помощью принятия в рассмотрение этих поправок к метрической связности мы наеемся определить до конца и саму нашу классическую метрику и соответствующие ей системы координат как стандартизованные понятия⁵². Поэтому можно говорить не только о калибровке классической метрики, но также и о калибровке этого вектора. В классической физике так и делают, говоря о калибровке вектор-потенциала электромагнитного поля и неявно подразумевая, что классическая метрика всегда по определению остаётся откалиброванной, т.е. единицы пространственно-временных измерений, вся система отсчёта, не зависят от точки, и находятся во взаимном согласии с единицами, принятыми для описания электромагнитных явлений. Ну или зависят так, как требует имеющееся

бы **при отсутствии кручения в области** не включать в наше описание мира отдельное рассмотрение расширения симметричной части связности такими компонентами. Обратите внимание на то, что с точки зрения преобразования репера масштабов от точки к точке мы пришли к учёту **комбинированного действия двух независимых подгрупп** общей группы линейных преобразований — подгруппы ортогональных поворотов репера как целого, и подгруппы масштабирования, изменений величин масштабов. **Любое** преобразование из общей группы может быть представлено как результат некоторой совокупности последовательных преобразований из этих двух подгрупп. Т.е., мы фактически приняли во внимание **все** возможные изменения в репере, доступные за счёт наличия в области симметричной связности. А как же интегрируемая часть тогда? Каким изменениям в репере она соответствует? Частично гладкому глобальному переопределению величин масштабов, как это уже отмечено выше. И частично возможному способу представления общих линейных преобразований как **неортогональных** поворотов, описанных в [2], §1.3.

⁵²Это сделано в §2.12.

поле гравитации.

Таким образом, расширяя процедуру калибровки классической метрики до **совместной калибровки метрики и электромагнитного потенциала**, мы фактически расширяем описание области мира с описания только с помощью метрической части связности до описания с помощью почти произвольной симметричной связности. Безусловно, с обязательным учётом всех тех условий, которые мы получили для метрической части связности, и уже получили или ещё собираемся получить для потенциала электромагнитного поля (и для его напряжённостей, конечно). При этом всё, что отличает эквивариантную часть связности рассматриваемого пространства от метрической должно быть поглощено добавлением нужного градиента к A_j .

Соответственно, никакого изменения метрического объёма, а значит и изменения единого масштаба с переходом от точки к точке области в **откалиброванной** глобализованной (на область) системе отсчёта быть не должно. В мире заведомо должно наблюдаться лишь проявление отличия тензора Максвелла от нуля, а не отличие от нуля вектора A_j . Т.е. физически наблюдаемые явления связаны с ротором этого вектора, а не с самим вектором. Максимум что может быть в принципе измерено на опыте касательно вектор-потенциала — это его **изменение**, локальное или нелокальное. В первую очередь это должно быть понятно из того факта, что источником этого вектора является метрическая дивергенция именно тензора Максвелла. Дополнительная характеристика классической материальной точки, электромагнитный (электрический) заряд описывает именно некоторое свойство **распределённого по самому своему смыслу** тензора $\bar{F}_{ik}$ при его сужении (в классических приближениях с помощью предельного перехода) на линию существования материальной точки. Следовательно, нам нужно ещё уяснить о чём же говорит сам этот тензор с точки зрения геометрии области континуума.

Для этого нам проще всего обратиться к определению тензора Максвелла как одной из свёрток тензора кривизны. Тензор

кривизны пространства с симметричной связностью определяется как рассогласование в компонентах произвольного вектора за счёт влияния свойств континуума изменять локальные реперы при переносе его по **замкнутому контуру** и при стягивании этого контура в точку. Точнее, по **всевозможным** таким **двумерным** контурам, с результатами собранными в единый объект, тензор. Соответственно, и свёртки тензора кривизны являются описаниями таких же рассогласований при обходе по **замкнутым** контурам, только в некотором смысле менее детализированными. Описаниями более общего типа. Акцентирующими внимание на свойствах не конкретных связностей, а некоторых их совокупностей. Из таких совокупностей мы рассмотрели уже метрические связности, главные детали структуры которых описываются для нас свойствами метрического тензора Риччи. И вот теперь более общая группа связностей, симметричных, которая дополнительно может быть описана ещё и учётом свойств тензора Максвелла. Без детальной конкретизации этих связностей. Конкретизацию представляющих эти группы связностей экземпляров мы выбрали **принудительно** сами, ограничив наше описание вместо самого общего вида только стандартизованным описанием. Описанием системами координат удобного нам вида.

В случае метрического тензора Риччи все его свойства в стандартизованной системе отсчёта мы получаем из требования учёта этим тензором (через дивергенцию его компонент) существования в области заданной особенности, сингулярности, выражающейся в существовании некоторого ковариантного вектора (градиента действия), сосредоточенного только на одномерных линиях, всегда обязательно являющихся линиями времени. С точки зрения свойств локализованных реперов, рассматриваемых как единые объекты, эта сингулярность, простое наличие линии непрерывных событий, позволяет ввести в остальном регулярное, **интегрируемое** для всей области описание. Интегрируемое в том смысле, что общее свойство репера масштабов как единого целого, его метрический объём может рассматривать-

ся (может быть введён) как единственная функция координат. Причём для стандартизованных систем отсчёта функция простейшая — некоторая постоянная. Все изменения в коэффициентах метрики, создающей эту единость репера, тоже описываются как градиент некоторой единственной функции. Проявляется эта изменчивость в **повороте репера как целого** при смещении от точки к точке непрерывно и, значит, согласованно. Заметьте, что необходимым условием на связность там, где нет особенностей, является при этом равенство нулю метрического тензора Риччи. Т.е. рассогласования в локальных реперах при обходах по стягивающимся замкнутым контурам в таких точках области быть не должно. Обе свёртки тензора кривизны нулевые.

Возможность выбора стандартизованного описания нам гарантируется возможностью калибровки классической метрики. Но эта возможность частичная. Полноценное согласование метрики и связности исчезает, если связность области пространства-времени не является чисто метрической. Индикатором рассогласования классической метрики и связности является отличие от нуля тензора Максвелла.

Тензор Максвелла **симметричной** связности тоже характеризует свойства замкнутых двумерных контуров, стягивающихся в точку. Но уже не с точки зрения наличия в них “интегральной” особенности, а с точки зрения наличия или отсутствия в точке, к которой стягивается контур, “вихря”, “циркуляции”. Соответствующий дифференциальный оператор, позволяющий построить из компонент ковариантного вектора аналогичный антисимметричный тензор в евклидовой геометрии носит название “ротатор”, что на русский язык как раз и можно перевести как “вихрь”.

Что это значит, “вихрь”? Это описание уже не самой точки в центре стягивающегося контура, не описание наличия или отсутствия в ней чего-то особенного. Это описание области (двумерными срезами) вокруг этой точки, описание **связей** этой точки с окружающей её областью. Связей особенных, наличие которых заставляет описывать область, вырезанную стягивающимся кон-

туром, жёстко вписанной в оставшуюся область континуума. Или не жёстко вписанной, в зависимости от значения этого “вихря”, ротора. Или описание изменится после произвольного поворота области замкнутого контура относительно остальной области, из которой изъят этот контур (ротор не равен нулю), или не изменится, если ротор нулевой. Ротор описывает наличие или отсутствие связей через выделенные точки на контуре, через которые должны проходить эти связи. Эти точки на границе вырезанной области должны совпадать с соответствующими точками на границе внешней области. В классических приближениях дело не сводится к требованию соответствия отдельных точек границы контура “внутри” и “вовне”, а предполагается соответствие всей непрерывной линии границы. Именно наличие требования такого соответствия характеризуется отличием от нуля ротора произвольного вектора вдоль замкнутого контура, а значит тензора Максвелла как единого для всех векторов индикатора свойств данной области континуума с предельным переходом в окружённую контуром точку.

В евклидовой геометрии в соответствие ротору ковариантного вектора⁵³ можно поставить специальный вектор по так называемому “правилу буравчика”. Этот вектор по определению является ортогональным к **плоскости** контура. А знак направления выбирается, в общем-то, достаточно произвольно, из приписывания некоторому направлению обхода контура положительного знака. А именно, “правому вращению вдоль контура”, рассматриваемого как окружность в плоскости контура, т.е. обходу контура по часовой стрелке, в отличие от правила отсчёта углов, приписывается знак плюс, и направление вектора “ротор” такое, какое имеет острие буравчика⁵⁴, повернутого соответствующим

⁵³Который по своему смыслу является антисимметричным тензором с двумя индексами, обязательно ковариантными, т.к. они обязаны своим происхождением взятию альтернированной производной.

⁵⁴Обратите внимание на это слово. Здесь оно служит подпоркой рассуждений. Но далее, при обсуждении понятия кручения, станет прототипом важной геометрической идеи. Использование его здесь указывает на глубокую связь между понятиями, рассматриваемыми сейчас и теми, которые

образом. Изменение направления обхода требует изменения знака ротора и его направления относительно плоскости контура. Определение это полностью совпадает с порядком изменения знака компонент в полностью антисимметричных стандартных единичных тензорах или их плотностях $\mathcal{E}^{ijkl}$ или $\mathcal{E}_{ijkl}$. Можно даже сказать, что ротор это такой не единичный тензор, только для двумерного случая. Хотя это будет не совсем верно, т.к. в приложениях к описанию пространства играет роль именно его трёхмерный образ (ортогональность к плоскости контура обхода). Вот такие векторы и могут быть поставлены в евклидовом пространстве в соответствие компонентам ротора. Именно следуя этим правилам мы ввели обозначения для **E** и **H** выше. Подчеркнув, что в общем случае это всего лишь удобные обозначения, а не полноценные векторы.

Должно быть вполне понятно, что отличие от нуля тензора Максвелла означает отличие от нуля тех или иных компонент “векторов” **Е** и **Н**. Также можно легко понять разницу между массой покоя и электрическим зарядом, как характеристиками материальной точки. Пока мы рассматриваем эту точку просто именно как точку в пространстве, не отслеживая её связей с окружающим пространством, то единственной её характеристикой может служить простое число. Число событий в единицу времени, или масса покоя. Поскольку знак из числа “масса покоя” мы изымаем, добавляя к описанию точки направленный масштаб времени, необходимый для указания на её принадлежность к **непрерывной линии**, то масса покоя у нас принудительно всегда положительна. Если же мы дополнительно отслеживаем принадлежность данной точки ещё и окружающему её пространству (точнее, пространству-времени), и делаем это с помощью **объединения точки с произвольным, но замкнутым двумерным контуром**, пусть и сжимающимся в точку, то помимо величины этой связи, появляется ещё и направление обхода контура. Знак заряда, сосредоточенного в точке. И это тоже не просто скаляр, а временная компонента некоторого век-

вытекают из представления о не нулевом кручении в пространстве-времени.

тора, дополнительного к вектору энергии-импульса — вектора тока.

При опоре геометрического описания континуума на метрический тензор, пусть и не полностью соответствующий связности, как это делаем здесь мы, для тензора Максвелла существует и некоторый настоящий, хоть и относительный вектор, дивергенция контравариантной версии тензора Максвелла. Поскольку упор делается на метрические системы отсчёта, они для нас являются привилегированными с точки зрения простоты описания мира, то дивергенция относительно метрической связности позволяет нам описать некоторые **общие** для всех “частичных” двумерных роторов, составляющих тензор Максвелла, свойства. Дивергенция тензора Максвелла является при таком подходе относительным контравариантным вектором, некоторым “обобщённым вихрем”, скомпонованным из всех “частных” вихрей. Отличие его от нуля означает наличие обязанности сохранять связи на контуре областей внутренней и внешней. Даже при стягивании этого контура в точку.

Если в области континуума нет выделенной особенности, связи которой с другими особенностями не могут быть нарушены, то все такие контуры при стягивании в точку обязаны давать нуль “общего” вихря, хотя “частичные” двумерные вихри быть нулями при этом не обязаны.

При наличии непрерывной особой для связности линии внутри контура, т.е. материальной точки, эта дивергенция, “обобщённый вихрь” может принимать три разных значения.

Связи с другими особыми линиями могут быть таковы, что специального контроля за “поворотом” границы не требуется. Ничего при произвольном повороте области вырезанной контуром относительно объемлющей части континуума не изменяется. В этом случае вектор дивергенции тензора Максвелла на такой линии равен нулю.

А вот если он нулю не равен, то обязательно будет направлен локально вдоль линии и **пропорционален** вектору dx^i/dl , где l метрический (относительный) скалярный параметр на линии.

Однако, направления этих двух векторов могут как совпадать, так и быть прямо противоположными. Направлений “закрученности” пространства, окружающего линию существования материальной точки, направлений обхода, **согласованных** с этим пространством, может быть всего два, контур ведь это одномерная замкнутая линия. Поэтому коэффициент пропорциональности, заряд e будет **действительным** числом, которое может быть как положительным, так и отрицательным. Соответственно, знак заряда напрямую будет связан с выбором “положительного” направления обхода контура вокруг линии существования материальной точки. Пока контур не стянут в точку, “аксиальный вектор, ортогональный контуру” будет иметь и некоторое **пространственное** направление. Однако, при достижении точечного предела, все такие векторы должны вырождаться только в настоящие векторы, направленные “по” или “против” направления касательного к траектории настоящего четырёхмерного вектора. Нулевое значение e (нулевая дивергенция тензора Максвелла) должно быть включено в рассмотрение для полноты картины как третье значение заряда.

Как всё это сказывается на описании взаимного движения базовой заряженной частицы и аналогичной материальной точки, существующей в той же области пространства-времени мы будем подробно разбираться в следующей главе. Сейчас же я хочу заострить ваше внимание всё-таки на геометрическом смысле двух главных объектов, отличие которых от нуля мы ставим в соответствие наличию в области электромагнитного поля. Как можно понять из математического смысла тензора Максвелла, вектор $\tilde{J}^k$ метрической дивергенции контравариантной формы тензора Максвелла, порождающий вектор-потенциал A_j , явным образом характеризует наличие таких связей материальной точки с другими классическими частицами, которые **нельзя свести к единому для всей области изменению калибровки метрики** (локальных метрического объёма и метрической плотности). **Нельзя найти единую для области функцию, градиентом которой мог бы быть вектор-потенциал.** Нельзя

переопределить локальные масштабы так, чтобы существовал единый для области масштаб (в смысле его метрической нормы). Наличие электромагнитного поля в области соответствует **не интегрируемым** изменениям локальных масштабов такой областью. Локализованным изменениям в *величинах* масштабов, необходимым для согласования всех локальных стандартизованных реперов в области.

2.12 Электромагнитные волны

Теперь я хочу рассмотреть вопрос оставшийся пока вне нашего внимания. Мы нашли зависимость вектор-потенциала электромагнитного поля от точки в области, окружающей базовую заряженную материальную точку. Нашли как решение дифференциальных уравнений второго порядка для этого вектор-потенциала. Нашли не “вообще возможное решение уравнений Максвелла”, не произвольное возможное усложнение связности в области, а именно то, что нам требуется для уточнения нашего описания мира. Структура дополняющего метрическую связность вектор-потенциала следует из условий согласования всех характеристик базовой материальной точки вместе с построенным на её основе локальным репером с возможными для остальных точек области аналогичными локальными реперами. Насколько однозначным является представленное нами описание этой области? Есть ли что-то ещё, что вполне **можно добавить в это описание и при этом не потерять достигнутой согласованности**? Не “вообще добавить”, без изменения существа дела, а добавить к описанию что-то в действительности необходимое для его уточнения. Что-то, учитывающее те свойства мира, данные нам опытом, которые мы ещё не учли. А именно, наличие связей между разными материальными точками. Ведь мы уже видим, что за такие связи, определённым образом обобщённые, явным образом отвечает и тензор Максвелла, порождаемый заряженной материальной точкой. Возможно, он описывает и вообще все возможные связи такого рода? Тем более, что наша процедура стандартиза-

ции репера масштабов всё ещё не определена нами до конца.

В случае гравитационного поля мы можем сказать, что метрический тензор Риччи **вне сингулярностей**, возникающих из описания материальных точек обязан быть строго нулевым всюду. Поэтому в том приближении, в котором мы получили решение Шварцшильда, оно не позволяет ввести в рассмотрение метрической связности что-либо ещё, кроме тех эффектов, которые могут возникнуть из-за применения отличных от стандартизованных систем координат. И, конечно, тех эффектов, которые могут быть результатом того, что источниками метрической связности являются несколько (возможно много) **разных** материальных точек. Т.е. коллективных эффектов. Но и в этом случае на достаточно больших расстояниях от этих материальных точек метрическая связность в главных деталях, приближённо, будет соответствовать решению Шварцшильда.

Случай электромагнитного поля совсем иной. Тензор Максвелла не может быть равным нулю вокруг заряженных материальных точек. Да и в областях, окружающих незаряженные материальные точки он вполне себе может отличаться от нуля. На его свойства имеется лишь одно требование — метрическая дивергенция его контравариантной формы должна быть нулевой. А значит наше решение описывает лишь **главную сингулярную** часть электромагнитного поля заряженной материальной точки. И **определено оно именно с точностью до решений уравнения**

$$\frac{1}{g} \partial_i (g \bar{F}^{ik}) = 0. \quad (2.111)$$

В стандартизованной системе отсчёта мы свели уравнение (2.92) к уравнению (2.94). Использовали при этом три дополнительных условия на свойства системы отсчёта:

- Стандартизованность, т.е. оснащённость метрикой с заданными свойствами.
- Отсутствие зависимости от времени (система покоя).

- Отсутствие зависимости от угловых координат стандартизованной системы (центральная симметрия).

Вполне очевидно, что к вектор-потенциалу, являющемуся решением уравнения (2.94) можно безболезненно добавить **любое** решение уравнения (2.111). Правда, любое произвольное решение однородных уравнений Максвелла (с нулевой дивергенцией) нас интересует мало. Мы ведь стремимся добавлять в наше описание мира только то, что нам **необходимо**. А что именно нам необходимо ещё, кроме того, что мы уже учли? Наличие событий учли. Даже в определённой степени уже учли наличие связей между разными носителями событий, которые в классических приближениях мы называем материальными точками. Но только в определённой степени. Прямого описания тех связей, прототипами которых являются цепочки всего из двух событий мы ещё не имеем. Как не имеем пока и способа определения введённого нами параметра c , описывающего соотношение между непосредственно реализуемым масштабом времени и масштабом для пространственного расстояния, реализуемым посредством **специального, стандартизованного** с помощью классической метрики описания указанных выше особых “дуальных” связей.

Опыт нам ясно говорит, что наблюдаемые нами электромагнитные волны, давшие основание для развития Специальной Теории Относительности, проявляются при выходе за классические приближения, в квантовых приближениях как фотоны, с которыми можно связать только два события — излучения и поглощения. Это опыты по фотоэффекту и аналогичные. Они дают нам явное указание на то, что интересующие нас “дуальные”, состоящие только из двух событий связи **в классических приближениях проявляются именно в виде волн**. Электромагнитных волн — совершенно точно. Возможно и другого вида, но это вопрос, требующий дальнейшего специального рассмотрения. И сейчас мы подошли к тому моменту, когда можем вплотную заняться описанием электромагнитных волн нашими методами. Методами дифференциальной геометрии.

В описание электромагнетизма расширением свойств связно-

сти, существующей в области, окружающей заряженную материальную точку, мы постараемся добавить те решения однородных уравнений Максвелла (соответствующие, как мы знаем совершенно точно, электромагнитным волнам), которые не нарушают согласованности уже полученного описания.

Давайте откажемся от двух последних свойств, требующихся в зависимости от координат компоненты вектор-потенциала A_4 . Не фактически, а формально, просто допуская что зависимость от угловых параметров могла бы быть. При этом пойдём к расширению этих свойств **от** уравнения (2.94). Почему так? Потому, что таким образом мы **заведомо сохраним самосогласованность нашей конструкции**, делая вполне ясные шаги по расширению допустимых координат, но всё ещё оставаясь в рамках стандартизированной системы отсчёта. Причём полностью самосогласованной для данной области. Ну, за исключением постоянной c , присутствующей в её определении. Которая всё ещё остаётся не определённым нами, но необходимым параметром стандартизации.

На этом пути нам сначала нужно будет заменить усечённый оператор Лапласа, редуцированный вследствие наличия центральной симметрии, на полный оператор Лапласа для нашей сингулярной трёхмерной системы координат:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \rightarrow \frac{1}{g_{(\alpha\beta)}} \partial_\alpha (g_{(\alpha\beta)} g^{\alpha\beta} \partial_\beta). \quad (2.112)$$

Этот оператор в сферических полярных координатах в развёрнутом виде выглядит так:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi \partial_\phi, \quad (2.113)$$

Мы совершенно спокойно можем утверждать, что полученное нами решение для главной части A_4 является также решением для уравнения, получаемого из (2.94) заменой оператора в его левой части на такую его развёрнутую форму. Ведь главная часть A_4 от углов не зависит. Не зависит главная часть вектор-потенциала и от времени. А значит, если мы добавим к оператору Лапласа ещё и содержащую производные по времени часть, причём в

форме, соответствующей строению именно оператора Лапласа, то полученное ранее решение для A_4 будет также решением и следующего уравнения:

$$(\nabla^2 + \partial_4 \partial_4) A_4 = i e \delta(r). \quad (2.114)$$

В регулярных декартовых координатах это уравнение мы запишем в развёрнутой форме следующим образом:

$$(\partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2 + \partial_3 \partial_3 + \partial_4 \partial_4) A_4 = g^{ik} \partial_i \partial_k A_4 = i e \delta(r). \quad (2.115)$$

Заметьте, что записанное с помощью классической метрики, это уравнение имеет вполне ковариантную форму, если ту функцию, которую мы определяем с помощью этого уравнения рассматривать просто как скалярную неизвестную функцию, а не как определённую компоненту ковариантного вектора. Да, форма эта остаётся заведомо ковариантной только в группе локально инерциальных систем отсчёта. Но это именно та группа, которая для нас является наиболее удобной при описании мира. Причём я сейчас покажу, что именно опора на уравнение (2.115) и позволяет нам завершить определение этой группы систем отсчёта полностью самосогласовано. Наше определение этой группы систем отсчёта **в классических** приближениях ведь до конца ещё не доведено. Для завершения определения мы должны указать, что именно позволяет нам определить нашу локальную метрику в желаемой форме, и указать какое именно описание физического явления, которое мы уже многократно упоминали как “электромагнитные волны” требуется для того, чтобы наши **постулаты, определения** были все согласованы друг с другом.

Из всего выше сказанного должно быть ясно, что наше описание **главной части** электромагнитного поля заряженной материальной точки в **стандартизованной** системе координат никак не изменится, если мы добавим к **каждой компоненте вектор-потенциала**, а не только к A_4 , какую-либо функцию

f , являющуюся решением уравнения

$$g^{ik} \partial_i \partial_k f = 0, \quad (2.116)$$

$$\rightarrow = (\partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2 + \partial_3 \partial_3 - \frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t) f = 0, \quad (2.117)$$

$$\rightarrow = (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t) f = 0. \quad (2.118)$$

Причём для разных компонент эти функции могут быть **разные**. Определяющим фактором для реализации такой возможности является **принцип суперпозиции**, которому удовлетворяет **любое** поле связности, описываемое метрической связностью с добавлением какого-либо вектор-потенциала A_j . Естественно, метрическая часть связности остаётся при этом фиксированной. Суперпозиция имеет место только в отношении добавочных к метрической связности тензоров A_{jk}^i , которые группируются в совокупности с одной и той же свёрткой A_j .

Все такие функции можно безболезненно рассматривать как те или иные компоненты какого-то конкретного вектор-потенциала. Лишь бы они удовлетворяли некоторой конкретной реализации уравнений Максвелла. А то, что приведённое уравнение является частной формой общего уравнения (2.111) я продемонстрирую ниже.

Уравнение, для которого я дал запись в трёх разных формах, соответствующих произвольному выбору координат в группе локально инерциальных (2.116), только декартовым координатам в этой группе (2.117) и сингулярным полярным сферическим координатам из этой же группы (2.118), принято называть **волновым уравнением**. Чтобы это было совершенно ясно, я ещё явно заменил производные по мнимой координате $x^4 = ict$ на производные по действительному времени.

Сначала завершим с доказательством того, что уравнение, представленное в видах (2.116), (2.117) и (2.118), действительно является некоторой конкретизированной формой уравнения (2.111). Формой, которой, может быть, удовлетворяют не все возможные вектор-потенциалы. Но те, которые ей удовлетворяют, обязательно удовлетворяют и более общему уравнению (2.111).

С учётом условия (2.91) уравнение (2.111), записанное как условие на компоненты тензора Максвелла превращается в уравнение для компонент вектор-потенциала:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \partial_i [g g^{ip} g^{kl} (\partial_p A_l - \partial_l A_p)] &= \frac{1}{g} \partial_i [g g^{ip} g^{kl} \partial_p A_l] \\ &- \frac{1}{g} \partial_i [g g^{ip} g^{kl} \partial_l A_p] = 0. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Эти уравнения (их четыре, одно для каждого значения индекса k) справедливы для любых систем координат. В наших стандартизованных декартовых координатах мы имеем $g_{ik} = \delta_{ik}$, $g^{ik} = \delta^{ik}$, $g = 1$ и запишем первый и второй члены правой части в развёрнутом виде. Первый член выглядит так:

$$\partial_1 \partial_1 A_k + \partial_2 \partial_2 A_k + \partial_3 \partial_3 A_k + \partial_4 \partial_4 A_k = g^{ip} \partial_i \partial_p A_k. \quad (2.120)$$

И это как раз левая часть уравнения (2.116) или (2.117), где вместо функции f может фигурировать **любая из компонент** вектор-потенциала. Левая часть волнового уравнения.

Второй член записывается таким образом:

$$\partial_k \partial_1 A_1 + \partial_k \partial_2 A_2 + \partial_k \partial_3 A_3 + \partial_k \partial_4 A_4 = \partial_k \partial_p (g^{pl} A_l). \quad (2.121)$$

Если наложить на A_j **дополнительное условие** $\partial_p (g^{pl} A_l) = 0$, то и весь второй член будет равен нулю. И тогда общее уравнение (2.119) становится эквивалентным волновому уравнению (2.116)-(2.118). Условие это в физике называют **калибровкой Лоренца**. Калибровкой вектор-потенциалов, которая **не влияет** на результирующий вид соответствующего тензора Максвелла. Компоненты тензора **не чувствительны** к тому, наложено такое условие на вектор-потенциал, или нет. До тех пор, пока мы в качестве проявления электромагнитного поля рассматриваем только проявления **наличия не нулевого тензора Максвелла**, конкретизация вида вектор-потенциала роли в понимании этих эффектов не играет⁵⁵.

⁵⁵Однако в нашем описании к этому можно добавить ещё кое-что. Я всё время обращаю ваше внимание на то, что мы не должны строить своё опи-

Приступим теперь к обсуждению решений волнового уравнения. В применении к случаю столь важных для нас электромагнитных волн. Мы начнём это обсуждение с простейшего случая ортогональных декартовых координат и единственного существенного направления в пространстве. Хотя этот случай идеальный и соответствующие ему состояния электромагнитного поля в природе реализуются весьма приблизительно, но он важен для нас по двум причинам:

- Все интересные для нас сейчас соотношения очень легко выводятся в этом случае.
- Очень многие виды состояния электромагнитного поля, которые называются “электромагнитные волны”, можно представить как ту или иную суперпозицию этих простейших решений уравнений Максвелла.

Этот идеальный случай обычно называют приближением **плоской** волны.

Сначала я буду говорить просто о виде функций, являющихся решениями уравнения (2.116)-(2.118)⁵⁶. Стандартизованным

сание мира полностью с самых общих позиций: “наши идеи позволяют это — значит в мире это реализуется”. Может быть. Но я выбрал несколько иной путь. Сначала наметил самый широкий круг возможного описания мира идеями пространства аффинной связности. А потом ограничил применяемые возможности максимально, исходя из двух видов соображений: (а) удобства описания мира и (б) необходимости описать полностью события, регистрируемые в некоторой области мира и все виды их возможных связей. Далее иду по пути **необходимого** расширения для связности возможности иметь тот или иной вид, т.е. допускаю то или иное изменение масштабов локального репера при смещении от точки к точке, но обязательно с тем условием, чтобы **описание континуума, целостности**, содержащей принимаемые в рассмотрение события при таком расширении возможностей описания оставалось самосогласованным. С этой точки зрения те или иные ограничения на связность (а калибровка Лоренца и есть ограничение на вид связности) являются не более чем **необходимым** результатом принятых мною соображений (а) и (б). В данном случае, очевидно, работает соображение (а).

⁵⁶Функции, являющиеся решениями этого уравнения важны для нас вот по какой причине. Эти уравнения приведены нами к **удобной для наших**

уравнениям можно поставить в соответствие и стандартизованные функции. В данном случае вид этих функций нам уже хорошо известен. Это экспонента комплексного числа, которая объединяет в себе помимо экспоненты действительного числа ещё и **периодические** тригонометрические функции. Если ранее эти функции появлялись у нас в основном при описании стандартизованной “периодической угловой” части трёхмерного пространства, то теперь речь пойдёт ещё и о периодичности во времени. Будем искать **частные** решения наших уравнений в виде

$$f(x^i) = f_0 e^{i\varphi(x^i)}. \quad (2.122)$$

Здесь через $f(x^i)$ и $\varphi(x^i)$ обозначены **функции** координат. А f_0 является некоторым постоянным **действительным** числом. Ограничим зависимость функции $\varphi(x^i)$ простейшим, чисто линейным случаем:

$$\varphi(x^i) = k_i x^i + \varphi_0. \quad (2.123)$$

Мы будем называть нашу функцию $f(x^i)$ “волновой функцией”, или просто “волной”. Назовём также f_0 “амплитудой” волны, φ её “фазой”. А вектор k_i назовём “волновым вектором”. Соответственно, φ_0 будет начальной фазой волны, привязанной к каким-либо конкретным значениям координат.

Почему выбраны такие названия? Пусть $k_i = \{1, 0, 0, i\}$, а $\varphi_0 = 0$. Тогда $\varphi(x^i) = x^1 - c \cdot t$ и $f(x^i) = f_0 [\cos(x^1 - c \cdot t) +$

нужд стандартизованной форме. Не только система отсчёта стандартизована. Стандартизованы и уравнения, **вид** которых определяется ею и в то же самое время определяет её. Функции, удовлетворяющие таким уравнениям — всё это **стандартизованные** элементы нашего описания мира. Как особые числа π и e , как угловые переменные, привязанные к понятию окружности произвольного, но фиксированного радиуса, как тригонометрические функции этих переменных, как экспоненциальная функция, как специальные фиксированные операторы и их функции Грина. Все эти математические, идеальные конструкции для своего правильного употребления в описании мира требуют выполнения **определённых соглашений, соотношений между масштабами реперов**, применяемых для сопоставления частям мира тех или иных чисел. Как в произвольной точке мира, так и при смещении от точки к точке.

$i \sin(x^1 - c \cdot t)]$. И действительная и мнимая части этой функции представляют собой **волны, бегущие вдоль направления x^1 со скоростью c** . В том смысле, что значение функции $f(x^i)$, равное при $t = 0$ своей амплитуде f_0 будет точно таким же при $x^1 = c \cdot t$. Волновая функция является для каждого значения x^1 периодической во времени функцией. В любой точке пространства $f(x^i)$ может принимать значения от $-f_0$ до $+f_0$ с заданным периодом во времени (для данного волнового вектора период этот равен ровно 2π с **размерностью времени**, т.е. в тех единицах, в которых измеряется время). Кроме того, с ней можно связать понятие “фазового фронта волны” — положение во времени (координату x^1) **одного и того же заданного значения фазы**. При сделанном мной выборе волнового вектора k_i **скорость распространения фазового фронта волны равна c** .

Подставим нашу функцию в уравнение (2.116). Получим

$$g^{ip} \partial_i \partial_p f(x^j) = g^{ip} k_i k_p f_0 e^{i(k_j x^j + \varphi_0)} = 0. \quad (2.124)$$

Соотношение это может выполняться только тогда, когда выполняется условие

$$g^{ip} k_i k_p = g^{ip} \partial_i \varphi \partial_p \varphi = 0. \quad (2.125)$$

То, что введённый нами волновой вектор является, по сути дела, градиентом некоторого скаляра, фазы, связанной с отдельным частным решением волнового уравнения, позволяет нам увидеть различный смысл его пространственных и временной компонент. Фазу мы полагаем по определению числом действительным. Соответственно, её производные по пространственным координатам тоже будут в нашем описании всегда действительными числами. А вот производная по четвёртой координате будет числом мнимым. Введём специальное обозначение для четвёртой компоненты волнового вектора:

$$k_4 = \partial_4 \varphi = -\frac{i}{c} \partial_t \varphi = i \frac{\omega}{c}, \quad (2.126)$$

имея ввиду запись наших частных решений волнового уравнения в форме

$$f(x^i) = f_0[\cos(k_\alpha x^\alpha - \omega t + \varphi_0) + i \sin(k_\alpha x^\alpha - \omega t + \varphi_0)]. \quad (2.127)$$

В такой форме хорошо видно, что все определённые нами частные решения волнового уравнения можно характеризовать одним существенным параметром — круговой частотой ω , или эквивалентной этой величине обычной частотой $\nu = \omega/(2\pi)$. Остальные три компоненты волнового вектора характеризуют **направление распространения плоской волны**, т.е. направление нормали к её фронту. Они могут быть выбраны из бесконечного набора вариантов трёхмерных направлений для каждого данного значения частоты с единственным условием $g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = \omega^2/c^2$. Т.е. имеется бесконечно много плоских волн, различающихся направлением, амплитудой и начальной фазой, но с одной и той же частотой. И все они как функции удовлетворяют волновому уравнению. Такие плоские волны принято называть **монохроматическими плоскими волнами**. Фазовый фронт всех таких волн движется со скоростью c . Параметры f_0 и φ_0 характеризуют **всю волну в целом**, но не её функциональный вид, их роль в описании электромагнитных волн я буду обсуждать ниже, в конце этого параграфа. Уже должно быть ясно, что я ввёл такие стандартные функции не просто так, что электромагнитные вектор-потенциалы⁵⁷ мы явно сможем представить как суперпозиции таких монохроматических плоских волн во многих случаях, возможно с какими-то дополнительными условиями на их амплитуды. И здесь мы ясно видим, что **введённая нами постоянная c действительно является именно скоростью света**. Скоростью электромагнитных волн, как мы объявили заранее.

Сравните условие (2.125) с соотношениями (2.5), полученными на основании принятых нами постулатов о введении локальной классической метрики. Роль фазы φ совершенно аналогична

⁵⁷И не только вектор-потенциалы, компоненты тензора Максвелла **Е** и **Н**, тоже.

роли действия, приписанного линиям, связывающим два события на траекториях разных материальных точек⁵⁸. А это означает, что мы имеем вполне понятную в классических приближениях опору на опыт для завершения полноценного определения, полноценной калибровки стандартизованных реперов (а значит и систем координат) совместно с окончательным определением стандартной для этих координат классической метрики. Мы можем определить постоянную c , положив её равной скорости распространения фазового фронта электромагнитных волн, установив таким образом проверяемое на опыте соотношение между масштабом времени и единственным существенным пространственным масштабом. **Установив правило, постулат, каким образом нами определяются масштабы, с помощью которых проводятся измерения во времени и пространстве. Измерения как координат, так и любых иных свойств частей мира.**

Монохроматические плоские волны являются для волнового уравнения в некотором роде аналогом функции Грина какого-либо оператора, перемещённой в область регулярных решений. Можно показать, что весьма значительный круг функций, являющихся решениями волнового уравнения в декартовых координатах, можно представить в виде суперпозиции таких монохроматических плоских волн. Естественно, с разными амплитудами, начальными фазами, частотами и пространственными волновыми векторами. Задача эта решается в общем случае с помощью **разложения в интеграл Фурье** по монохроматическим волнам. Так как здесь я стараюсь обсуждать только самые основания физики, то не буду вдаваться далее в подробности этих, достаточно сложных разделов математики и физики. Отмечу только, что часто полезно решать задачи распространения

⁵⁸ Аналогия эта гораздо глубже чем может показаться на первый взгляд. Но чтобы это оценить требуется выйти за пределы классических приближений. В обсуждении квантовых приближений описания мира будет показано, что вектор состояния любой элементарной частицы имеет такой фазовый множитель, в котором роль фазы играет именно действие на траектории этой частицы.

электромагнитных волн в сингулярных сферических полярных координатах. Особенно в тех случаях, когда нет полной сферической симметрии. Т.е. когда в трёхмерном пространстве требуется рассматривать хотя бы одно выделенное направление. Для таких решений имеется своя специфика в пространственной части описания волны. Помимо разложения (суперпозиции) по частотам волн следует учитывать возможность проведения аналогичного разложения ещё и по **собственным функциям** оператора (2.113), который входит в волновое уравнение в форме (2.118). Полный набор этих собственных функций составляют так называемые **сферические гармоники**⁵⁹. Однако важно понимать, что это касается только описания зависимости волновых функций от пространственных координат. Вид вклада времени в зависимость фазы волны от координат остаётся при этом таким же, как и для плоских волн. Он характеризуется всё тем же параметром — частотой.

Вернёмся теперь к обсуждению вопроса, каким образом введённые в рассмотрение стандартные волновые функции помогают в описании электромагнитного поля. Поскольку **каждая компонента** вектор-потенциала A_j там, где метрическая дивергенция тензора Максвелла равна нулю, обязана удовлетворять уравнению (2.116)-(2.118), то произвольную такую компоненту можно представить в виде какой-то конкретной суперпозиции частных решений этого уравнения. В виде некоторой суммы монохроматических плоских волн, с разными амплитудами, начальными фазами и волновыми векторами. Обычной, дискретной суммы, или её непрерывного аналога — интеграла по характеризующим частные решения параметрам. Чтобы мы имели возможность интерпретировать собранные таким образом из стандартных волновых функций компоненты как единый ковариантный вектор, и, более того, как ту добавку к связности, ко-

⁵⁹Решения волнового уравнения, а также уравнений вида $\nabla^2 f = 0$ для евклидова пространства произвольной размерности называют гармоническими функциями. Это тоже стандартные функции, которые к описанию мира могут применяться напрямую только в стандартизованных системах отсчёта.

торую мы рассматриваем в качестве электромагнитного поля, должны выполняться определённые условия. Что это за условия?

Одно из условий очевидно. Чтобы не возникло проблем в объединении нескольких **функций координат** в единый распределённый в пространстве-времени объект необходимо, чтобы это были **одинаковые** функции точки, т.е. её координат. Применительно к волновым функциям это означает, что “элементарные” вектор-потенциалы обязаны иметь одну и ту же функциональную зависимость у всех компонент. Т.е. должны иметь **одинаковые волновые векторы** и, в общем случае, **разные амплитуды и начальные фазы**. И уже из таких элементарных вектор-потенциалов можно с помощью суперпозиции получать произвольные решения уравнения (2.111). Вполне естественно, что такие “элементарные” вектор-потенциалы тоже можно называть монохроматическими плоскими волнами. Но уже не просто “стандартными волнами”, а именно применительно к определённому проявлению свойств электромагнитного поля. В этом качестве монохроматическая плоская электромагнитная волна будет характеризоваться тремя важнейшими параметрами: частотой (ω или ν), трёхмерной частью волнового вектора k_α и **вектором амплитуды** $A_{j(0)}$. Чтобы не повторять всё время ещё и “начальной фазы”, я, начиная с этого момента, в понятие “амплитуды” включу и понятие “начальной фазы”, полагая далее амплитуду **комплексным постоянным числом**, и записывая общий вид волновой функции как комплексную экспоненту. Естественно, там где волновая функция самого общего вида должна быть конкретизирована до описания собственно физических электромагнитных волн, там в качестве “физического решения” должна быть поставлена действительная часть “общего решения”, т.к. электрический заряд мы явным образом считаем действительной величиной.

Второе условие тоже достаточно очевидно — в каждой точке пространства-времени любая определённая нами электромагнитная волна, в том числе и монохроматическая плоская, долж-

на подчиняться принятому нами условию калибровки вектор-потенциала в стандартизованных системах отсчёта. Условию калибровки Лоренца $\partial_p(g^{pl} A_l) = 0$. Это ещё не окончательное требование на описание электромагнитных волн в стандартизованных системах отсчёта. Но, чтобы причины следующего шага стали вполне очевидными, я сделаю небольшое отступление в сторону от линии изложения. Отступление самого общего характера.

Нетрудно видеть, что через всё наше описание мира средствами геометрии, пространством аффинной связности, красной нитью проходит явным образом подчёркиваемая разница между такими характеристиками мира как время и пространство. Причём упор я всегда делаю на ведущую роль времени, на ведущую роль его измерения в создании общих процедур измерения, годных для полноценного описания мира как непрерывности.

В самом репере главную роль играет масштаб времени. Он определяется нами непосредственно. Пространственные масштабы мы определяем уже посредством масштаба времени и некоторых дополнительных соглашений, постулатов. Описание трёхмерного пространства тоже у нас по большому счёту не совсем “демократично”. Классичность рассматриваемых приближений, ассоциирующая с любой цепочкой связанных событий, к которой мы можем привязать масштаб времени, некоторую одномерную линию в пространстве-времени, создаёт тем самым особую роль материальной точки в трёхмерном пространстве. Из-за этого набор из трёх измерений делится дальше на “особое”, важное, существенное **расстояние**, и на менее существенное, определяемое двумя параметрами **направление**, в котором измеряется расстояние. Как результат, во многих случаях становится более удобным для описания мира выбирать сингулярные в пространственной части сферические полярные координаты, где эта разница заложена явно. Всё это я уже многократно подчёркивал.

Однако, за кадром остался один немаловажный момент. У такого подхода есть вполне очевидные **технические** следствия. Результаты самых разных измерений (чаще всего принципиально возможных, но не обязательно реально производимых) у нас

оформлены как геометрические объекты вполне определённого вида — тензоры и тензорные плотности. Разница в важности для нашего описания разных масштабов, а значит и разных координат **необходимо** находит своё отражение в смысле разных компонент этих величин. Компоненты, требующие для своего определения **только времени** (например, m_0 , $\partial_4 s$, A_4 , $\tilde{J}^4$, $\omega = \partial_4 \varphi$, g_{44} и т.д.) всегда становятся основными параметрами, определяющими наше описание мира. Компоненты, для которых используются **только пространственные измерения** можно и нужно рассматривать как некоторые единые объекты. Например, $\mathbf{r} = \{x^\alpha\}$, $\mathbf{A} = \{A_\alpha\}$, $g_{\alpha\beta}$, $\bar{F}_{\alpha\beta}$ и т.д. Такого сорта компоненты служат уточняющими параметрами описания. Чуть более сложен “промежуточный” случай. В тензорах с двумя индексами и более по тем же правилам выделяются также те столбцы и строки, в которых имеется индекс времени, принятый нами равным четырём. Как в случае $\bar{F}_{4\beta}$ и $\bar{F}_{\alpha 4}$. Такие объекты тоже могут и должны рассматриваться как целое. Но их влияние на описание имеет два уровня — безусловно определяющий для компонент чисто временных, и двойственный, частично определяющий, частично уточняющий для смешанных компонент. Очень часто такие смешанные компоненты могут быть приведены к нулю все вместе выбором системы координат. Но не всегда.

Немного особняком от такого распределения ролей в описании стоят компоненты вектор-потенциала электромагнитного поля для случая их волновой природы. Дело в том, что они **никогда**, по самой своей роли в описании, не должны быть сведены к такому случаю, когда пространственные компоненты вектор-потенциала волны все равны нулю. А вот временную компоненту такого вектор-потенциала сделать нулём весьма желательно. Сейчас я остановлюсь на объяснении, почему это так, и при этом уточню до конца условия на компоненты вектор-потенциала элементарных электромагнитных волн в стандартизованных системах отсчёта.

Вернёмся к свойствам вектор-потенциала электромагнитного поля, которые вытекают из условий согласования стандартизо-

ванной системы отсчёта на траектории заряженной материальной точки и в окружающей её области пространства-времени. В системе покоя базовой частицы у вектор-потенциала имеется всего одна, временная компонента, A_4 . К такому, базовому электромагнитному полю мы можем и должны добавить возможность для базовой частицы иметь с другими частицами особые связи из двух событий. Это возможные связи с частицами вне рассматриваемой нами области. Описание таких связей мы осуществляем посредством особого состояния континуума вне нашей базовой частицы. Посредством электромагнитных волн. Но не просто каких-либо **любых** волн, а только тех, которые жёстко привязаны именно к нашей базовой частице тем, что одно из особых событий в связи специального вида — “излучения волны” или “поглощения волны” — обязательно находится на траектории нашей частицы, включено в её массу покоя. Т.е. в качестве согласованного описания рассматриваемой области нам требуется такое описание её координат и вместе с ним такое описание вектор-потенциала электромагнитного поля, чтобы в нём могли быть выделены обе его составляющие **по-отдельности**, и составляющая “центрального” поля, и волновая составляющая, описывающая особые связи. Вот это условие совместного, и в то же время раздельного описания этих двух составляющих вектор-потенциала электромагнитного поля **базовой заряженной материальной точки** и заставляет нас приписать значение $A_4 = 0$ его волновой составляющей. А для “стационарной” составляющей в системе покоя $\mathbf{A} = \{A_\alpha\} = 0$ согласно уравнениям Максвелла. Так что на долю волн, связанных с базовой частицей явным образом остаётся только следующая возможность для вектор-потенциала (с учётом условия калибровки Лоренца):

$$A_4 = 0, \quad \mathbf{A} \neq 0, \quad \partial_\alpha(g^{\alpha\beta}A_\beta) = \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \quad (2.128)$$

Важно! Вспомните принцип суперпозиции для A_j и $\bar{F}_{jk}$. Ведь он нам говорит, что к выделенному нами полю связности (к той части, что описывает электромагнитное поле) можно доба-

вить ещё сколь угодно много тензорных полей такого же строения. Нет ли здесь противоречия? Нет. Мы добавляем в наше описание мира только те составляющие, которые нам необходимы для описания событий и их связей. Всё остальное “возможное” нам просто не нужно. Это дополнительное “возможное” только и способно, что усложнить наше описание “мусором идеального”. Отсюда следует очень важный вывод по поводу электромагнитного поля вообще. **В нашем описании не должно появляться никакого поля, не связанного с электромагнитными токами.** Да, в некоторой области мы можем и должны рассматривать поле, созданное токами, находящимися вне этой области. Вполне реальная ситуация. Такое поле может казаться “висящим”, отдельным от зарядов полем. Но **где-то источники такого поля существовать обязаны**⁶⁰.

Посмотрим внимательно на условия (2.128). В них не входит производная по времени. А это означает, что временная составляющая волны, характеризующая её частотой может быть любой.

⁶⁰Может возникнуть представление, что в классических приближениях электромагнитные волны не могут быть поглощены или излучены материальными точками, имеющими нулевой электрический заряд. Это будет неверное представление. Потому, что в классических приближениях материальные точки вполне могут быть весьма сложными комбинациями заряженных частиц, суммарный заряд которых равен нулю. Примером может служить простейшая возможность **видеть** материальные точки вне зависимости от того, имеют они электрический заряд или нет.

События как отдельные сущности не рассматриваются в классических приближениях. Как только речь идёт об отдельном событии эти приближения не работают. Не годны в качестве описания мира. В этих приближениях события поглощения и излучения волн можно считать даже непрерывно заполняющими тот или иной отрезок траектории взаимодействующей с волной частицы. Среди бесконечного числа событий общего типа вполне себе находится место и бесконечному числу событий специального вида. Однако приведённое замечание нужно учитывать вообще во всех приближениях. Не стоит мыслить электромагнитное поле как нечто, появившееся неизвестно откуда и управляющее поведением заряженных материальных точек. Оно **всегда имеет свои заряженные источники**. Мы ведь точно знаем, что классические приближения это всего лишь приближения к описанию реального мира, в более точном описании события дискретны и у каждой связи, каждой элементарной волны (фотона) есть два конца, два события.

Это условия только на амплитуду волны (её пространственные компоненты) и на пространственную часть волнового вектора. А значит, представление о монохроматической волне следует рассматривать не просто как удобный способ описания электромагнитных волн, а как важнейшее свойство описания совокупности “волна, излучаемая или поглощаемая заряженной частицей” с её характерным параметром, частотой. Это должно проявляться предельно ясно в квантовых приближениях, ассоциируемых с отдельным событием. В наших опытах это обязано наблюдаться, например, в явлении фотоэффекта. И проявляется как участие волны в изменении энергии частицы отдельным квантом, пропорциональным её частоте — известное соотношение $E = h\nu$, которое констатирует изменение действия в таком взаимодействии на элементарный квант h .

Обратимся теперь к изучению тех возможностей, которые при выбранных условиях описания мира остаются для пространственных компонент вектор-потенциала.

В общем случае в трёхмерном пространстве направление одной из осей репера можно выбрать произвольно. Выберем направление оси x^1 так, чтобы рассматриваемая нами монохроматическая плоская волна распространялась в её направлении. Т.е. пространственная часть волнового вектора имеет только одну не нулевую (и постоянную) компоненту:

$$A_\alpha = A_{\alpha(0)} e^{i(k_\alpha x^\alpha - \omega t)},$$

$$k_\alpha = \{k_1, 0, 0\}, \quad k_1^2 = g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = \omega^2 / c^2. \quad (2.129)$$

Напоминаю, что начальная фаза здесь включена в **комплексную** амплитуду.

Условие калибровки Лоренца даёт нам немедленно следующее требование на такую волну:

$$\partial_\alpha (g^{\alpha\beta} A_\beta) = i k_1 A_1 = 0 \rightarrow A_1 = 0, \quad A_{1(0)} = 0. \quad (2.130)$$

Т.е. **компонента вектор-потенциала волны, а значит и её амплитуда в направлении её распространения обязана**

всегда быть нулевой. Волна может иметь не нулевые компоненты только в двух других направлениях, **ортогональных к направлению** распространения. Ортогональность эта следует из нашего выбора стандартизированной системы отсчёта, **определения** классической метрики для этих координат как ортонормированной. Волны такого вида принято называть **поперечными**.

Две другие амплитуды волны, в направлениях x^2 и x^3 могут принимать достаточно произвольные значения. В зависимости от их соотношения говорят о той или иной **поляризации** волны. Прежде чем классифицировать виды возможной поляризации монохроматической волны, перейдём к рассмотрению компонент тензора Максвелла. Сделаем это, используя обычные для физики обозначения компонент тензора через компоненты двух фиктивных векторов, векторов напряжённостей электрического **Е** и магнитного **Н** полей. Фиктивных в том смысле, что это удобные обозначения выбранных компонент **тензора**, которые при наших ограничениях на системы координат можно рассматривать как отдельные, единые геометрические объекты, преобразующиеся как векторы. Но в конечном счёте это всё же компоненты тензора с двумя ковариантными индексами. В соответствии с определениями (2.101) и (2.107) получим для **Е**

$$\begin{aligned} E_\alpha &= -i(\partial_\alpha A_4 - \partial_4 A_\alpha) = \frac{\omega}{c} A_\alpha, \\ \mathbf{E} &= \frac{\omega}{c} \{0, A_{2(0)}, A_{3(0)}\} e^{i(k_1 x^1 - \omega t)}, \end{aligned} \quad (2.131)$$

и для **Н**

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \{0, H_2, H_3\} \\ &= k_1 \{0, A_{3(0)}, -A_{2(0)}\} e^{i(k_1 x^1 - \omega t)}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Я записал выражения для напряжённостей в комплексной форме для удобства последующего рассмотрения видов поляризации, хотя в качестве компонент тензора Максвелла следует брать только действительные части этих выражений. Но при любой

форме записи из этих выражений хорошо видно, что все компоненты тензора Максвелла изменяются в пространстве-времени в точности также, как и компоненты вектор-потенциала. Только постоянные амплитуды этих функций отличаются от амплитуд вектор-потенциала постоянными множителями, значениями соответствующих компонент волнового вектора.

Перейдём теперь к понятию **поляризации** монохроматической плоской волны. Это понятие как физическое явление связано с возможностью для амплитуд вектор-потенциала $A_{2(0)}$ и $A_{3(0)}$ быть **разными комплексными** числами. Или, в действительных числах, элементарные монохроматические волны, которые можно связать с каждой из компонент A_2 и A_3 , могут отличаться не только значениями своих **действительных** амплитуд, но и начальными фазами. При этом влияние на классификацию видов электромагнитных волн по свойству “поляризация” оказывает **разность** начальных фаз, а не их абсолютные значения, общая часть которых легко обращается в нуль простым смещением начала отсчёта времени. Ну и, конечно, классификация волн по виду поляризации зависит напрямую и от соотношения между действительными амплитудами компонент. Проще всего разобраться с классификацией этого влияния проводя предварительное рассмотрение стандартного случая, когда разность начальных фаз равна в точности $\pm\pi/2$, так что в одном случае действительная часть общей волновой функции зависит от координат в пространстве-времени как косинус, а в другом как синус:

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{c}A_2 &= \frac{\omega}{c}Re[A_{2(0)}e^{i(k_1x^1-\omega t)}] = \\ &= a_{2(0)}\cos(k_1x^1 - \omega t) \\ k_1A_3 &= k_1Re[A_{3(0)}e^{i(k_1x^1-\omega t)}] \\ &= a_{3(0)}Re[e^{\pm i\pi/2+i(k_1x^1-\omega t)}] \\ &= \pm a_{3(0)}\sin(k_1x^1 - \omega t).\end{aligned}\tag{2.133}$$

Здесь a чисто действительные числа.

Если **одна** из действительных амплитуд $a_{2(0)}$ или $a_{3(0)}$ равна

нулю, то колебания (изменения со временем) и **Е**, и **Н** происходят только в **плоскости** $\{x^1, x^2\}$ или в плоскости $\{x^1, x^3\}$ вдоль **линий** $x^1 = \text{const}$. В зависимости от того, какая из амплитуд не нулевая. Этот случай называют **линейной** поляризацией монохроматической волны. Если обе амплитуды отличаются от нуля и равны, скажем a_0 , то говорят о **круговой** поляризации. В самом деле, в этом случае для любой точки пространства-времени выполняется условие

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{c}A_2\right)^2 + (k_1A_3)^2 &= a_0^2[\cos^2(k_1x^1 - \omega t) + \sin^2(k_1x^1 - \omega t)] \\ &= a_0^2. \end{aligned} \quad (2.134)$$

“Концы” векторов **Е** и **Н** всегда находятся на “окружности с радиусом a_0 ”, расположенной в плоскости $\{x^2, x^3\}$, ортогональной направлению распространения волны x^1 . Положение это будет смещаться со временем (и, естественно, со смещением вдоль x^1) по этой окружности по или против часовой стрелки, в зависимости от того, какая из компонент опережает другую, т.е. от знака разности начальных фаз.

Если амплитуды не равны, также как и в случае разности начальных фаз, отличающейся от $\pi/2$, с помощью простейших тригонометрических преобразований можно показать, что “концы” векторов **Е** и **Н** будут находиться уже не на окружности, а будут описывать **эллипс** в той же плоскости, и в том же порядке, что и для круговой поляризации. Такой случай называют **эллиптической** поляризацией. Я не хочу приводить здесь эти выкладки, чтобы не загромождать изложение мало существенными деталями. Понятно, что круговая поляризация может рассматриваться как частный случай эллиптической. Также как и линейная.

Более того, из всего уже сказанного ранее должно быть ясно, что **всякую** эллиптически поляризованную волну можно рассматривать как **суперпозицию** двух **отдельных** линейно поляризованных волн. В некотором роде именно линейно поляризованные монохроматические плоские волны являются теми элементарными кирпичиками из которых можно построить, ском-

бинировать практически любую электромагнитную волну.

Теперь я задам вопрос для нас важный. А что именно изменяется в локальном репере при наличии в области пространства-времени электромагнитной волны? Какие преобразования масштабов соответствуют ей?

Ответ тот же самый, что и для электромагнитного поля заряженной материальной точки. И базируется он на том же самом соотношении, которое связывает изменение локального объёма и вектор-потенциал электромагнитного поля. Единственное отличие состоит в том, что все эффекты касаются пространственных масштабов, а не временного.

Для иллюстрации наших выводов возьмём случай линейно поляризованной монохроматической плоской волны. Её вектор потенциал говорит нам, что если мы рассмотрим поведение локального репера некоторой произвольной точки континуума, где имеется такая волна, то мы можем утверждать что локальный **пространственный** масштаб в направлении её поляризации изменяется во времени периодически в определённых амплитудой волны пределах. Комбинация волн с тремя разными линейными поляризациями соответствует локальным колебаниям величин всех трёх пространственных масштабов. Очевидно, что все такие колебания для точек непрерывной области континуума являются самосогласованными и во времени, и в пространстве. Более того, они обязаны быть согласованы также и с реперами, существующими на траекториях материальных точек. Вся эта самосогласованность описания гарантируется выполнением уравнений Максвелла.

2.13 Эффект Доплера

При обсуждении способов описания электромагнитных волн мы сделали акцент на одном из параметров такого описания — на временной компоненте волнового вектора k_i , на частоте или энергии волны. Этот параметр мы положили в основу классификации всех остальных свойств волны. Если подумать, то это вполне

логично — ведь и для материальных точек основным, определяющим их описание параметром тоже является четвёртая, временная компонента соответствующего “волнового” вектора, градиента действия вдоль траектории материальной точки.

Но между двумя этими параметрами, частотой волны и массой покоя материальной точки имеется колоссальная разница. Масса покоя в классических приближениях является скалярной величиной, инвариантом нашего описания. А вот у волны этот инвариант мы **определили** равным нулю. И, тем не менее, четвёртая компонента волнового вектора, **не будучи инвариантом**, всё равно остаётся основным параметром в описании волны. Параметром, зависящим от системы отсчёта, в которой он измеряется⁶¹.

То, что частота волны зависит от системы отсчёта, нам необходимо всегда учитывать явным образом. Эта зависимость получила название эффекта Доплера, по имени исследователя, первым обратившего внимание на зависимость частоты акустических и других видов волн от относительной скорости их источника и приёмника.

В нашем описании этот эффект, в общем-то, тривиален — волновой вектор является полноценным ковариантным вектором и записать величину его четвёртой компоненты для любой допустимой системы отсчёта, зная её в какой-то одной, и имея матрицу преобразования координат между этими системами отсчёта, не составляет сложности.⁶²

Введём следующие обозначения. Пусть в системе покоя некоторой материальной точки (штрихованной) с её траектории из-

⁶¹Масса, или энергия частицы тоже зависит от системы отсчёта. Однако, имеется особая такая система, система покоя, в которой масса принимает некоторое не нулевое, важнейшее для всех классических приближений значение. А вот в случае электромагнитных волн такой особой системы найти нельзя принципиально.

⁶²Как я уже много раз отмечал в этой главе, нас в первую очередь интересует различие в описании мира только с точки зрения именно систем отсчёта, порождаемых движущимися друг относительно друга материальными точками. Хотя, по возможности, мы стараемся принимать во внимание и самые общие допустимые системы координат.

лучается монохроматическая плоская волна с частотой ω_0 и пространственной частью волнового вектора $k_{\alpha'} = \{k_{1'}, 0, 0\}$. Т.к. волновой вектор обязан удовлетворять условию $g^{ij}k_i k_j = 0$, то $k_{1'} = \omega_0/c$.

Эта система отсчёта движется относительно другой, той в которой мы хотим определить частоту ω , со скоростью v в направлении, отклоняющемся от $x^{1'}$ на угол γ .

Тогда, в соответствии с (2.102, 2.103), мы можем записать:

$$k_{4'} = \frac{k_4 + \mathbf{i}v/c \cdot k_1 \cdot \cos \gamma}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.135)$$

Заменяя $k_{4'} \rightarrow \mathbf{i}\omega_0/c$, $k_4 \rightarrow \mathbf{i}\omega/c$, $k_1 \rightarrow \omega/c$, получаем

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1 + v/c \cdot \cos \gamma}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.136)$$

В приближении малых скоростей и для углов γ достаточно далёких от $\pi/2$ получаем классическую формулу для смещения частоты волны:

$$\frac{\omega_0}{\omega} \approx 1 + \frac{v}{c} \cos \gamma. \quad (2.137)$$

Для описания смещения частоты волны обычно используют следующий параметр:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = \\ &= \frac{1 + v/c \cdot \cos \gamma}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1, \end{aligned} \quad (2.138)$$

выражение для которого в приближении малых скоростей существенно упрощается:

$$z = \frac{v}{c} \cos \gamma. \quad (2.139)$$

Если источник удаляется от приёмника ($v \cos \gamma > 0$), то частота уменьшается, длина волны увеличивается, $z > 0 \rightarrow$ “красное смещение”. Если приближается, $z < 0$, то наоборот, “синее смещение”.

Из формулы (2.138) можно также сделать вывод, что имеется, вообще говоря, также и “поперечный” эффект Доплера, когда волна излучается перпендикулярно к направлению относительного движения систем отсчёта, при $\gamma = \pi/2$, в этом случае для малых скоростей $z \approx v^2/(2c^2)$. Казалось бы, в этом случае нет **относительного движения, направленного по лучу зрения**, и, оставаясь в чисто классических представлениях (**не релятивистских**), мы не имеем причины для изменения частоты и длины волны. Дело в том, что в не релятивистских представлениях мы пренебрегаем, оставляем вне нашего внимания **зависимость течения времени от выбора системы отсчёта**. И именно эта зависимость остаётся **в чистом виде** в случае “поперечного” эффекта Доплера. Правда, не очень понятно каким образом можно зарегистрировать этот эффект для случая такого относительного движения источника и приёмника электромагнитной волны.

Однако, имеется вполне обычная ситуация, когда реализуется именно такой эффект смещения частоты волны, и его достаточно легко зарегистрировать. Это случай распространения волны в статическом **слабом**⁶³ гравитационном поле материальной точки, которое мы описываем решением Шварцшильда. Рассмотрим две локальные инерциальные системы отсчёта в таком гравитационном поле, находящиеся на одном луче, выходящем из центральной материальной точки, но на разных расстояниях от неё. Эти локальные системы не двигаются друг относительно друга, однако разные **локальные** значения гравитационного потенциала можно (и нужно!) рассматривать и как наличие эффективного поворота реперов этих локально инерциальных систем отсчёта друг относительно друга в плоскости $\{r, x^4 = ict\}$, в согласии с обсуждением, проведённым в параграфе §2.6, см. соотношение (2.61).

Единицы времени (базовые интервалы времени) будут разные

⁶³Очевидно, что для сильного гравитационного поля, когда эффективная скорость уже не мала по сравнению со скоростью света, формулы усложняются.

ми в этих реперах, несмотря на то, что реального относительного движения этих локальных систем не имеется. Что такое частота? Это число колебаний, приходящихся на единицу времени. Число “колебаний” чего-то, в данном случае **всех** компонент вектор-потенциала, или **всех** компонент тензора Максвелла, или **величин** пространственных масштабов, одного или всех. Это число мы считаем одинаковым для всех точек вдоль радиуса, более того, всюду, во всех точках области пространства-времени, окружающей нашу базовую материальную точку. Потому, что вся область в нашем описании накрыта построенной нами глобализованной (в пределах этой области) системой отсчёта. Именно в возможности предполагать это и состоит смысл построения нами такой системы отсчёта. Число колебаний является *инвариантом места* в нашей системе отсчёта. Не инвариантом при переходах к другим координатам, а именно величиной, которая в одной определённой системе координат не зависит от места в накрытой этой системой области пространства-времени:

$$n = \omega \cdot \Delta t = f(x^i) = const$$

. В локализованном виде, для дифференциалов, это соотношение выглядит так:

$$dn = \omega \cdot dt = const.$$

Таким образом, **описывая такое явление, как электромагнитная волна**, для определения её частоты в каждой точке области мы просто должны сосчитать число колебаний и засечь прошедший промежуток времени. Т.к. метрика в нашей области не евклидова, и наши часы, опирающиеся на выбранный масштаб времени, в разных точках области могут идти по-разному, то, при одном и том же числе колебаний, частоты на различных расстояниях от центра системы отсчёта будут тоже разными.

Принимая во внимание (2.61), мы можем записать для разных значений радиуса r , расстояния до центральной материаль-

ной точки:

$$\begin{aligned}
 dn &= \omega(r) \cdot dt = \\
 &= \omega_0 \cdot d\tau = \\
 &= \omega(r) \cdot d\tau / \sqrt{1 - v^2(r)/c^2} \\
 &= \omega(r) \cdot d\tau / \sqrt{1 - [-2\Phi(r)]/c^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.140}$$

Здесь через ω_0 мы обозначили значение частоты волны для чисто евклидовой метрики, т.е. при отсутствии притягивающей массы, а если она имеется, то бесконечно (достаточно) далеко от неё. Отсюда следует, что для произвольного значения радиуса справедливо соотношение

$$\omega(r) = \omega_0 \sqrt{1 - v^2(r)/c^2} = \omega_0 \sqrt{1 - [-2\Phi(r)]/c^2}.$$

Соответственно, для параметра z , связывающего частоту волны, излучённой на расстоянии r' от центральной массы, с частотой волны зарегистрированной на расстоянии r , мы получаем выражение

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{\omega(r') - \omega(r)}{\omega(r)} = \\
 &= \frac{\sqrt{1 - v^2(r')/c^2}}{\sqrt{1 - v^2(r)/c^2}} - 1 = \\
 &= \frac{\sqrt{1 - [-2\Phi(r')]/c^2}}{\sqrt{1 - [-2\Phi(r)]/c^2}} - 1,
 \end{aligned}
 \tag{2.141}$$

которое для слабого гравитационного поля (для малых по сравнению со скоростью света “эффективных” скоростей) приводится к простому виду:

$$\begin{aligned}
 z &\approx 1 - v^2(r')/(2c^2) + v^2(r)/(2c^2) - 1 = \\
 &= \frac{1}{2c^2} [v^2(r) - v^2(r')] = \\
 &= \frac{1}{c^2} [\Phi(r') - \Phi(r)].
 \end{aligned}
 \tag{2.142}$$

Подставляя сюда стандартное для физики Ньютона выражение для гравитационного потенциала, получим

$$z = \frac{\gamma m_0}{c^2} (1/r - 1/r'). \quad (2.143)$$

Отсюда легко видеть, что наличие гравитационного поля всегда смещает частоту волны (по сравнению с частотой такой же волны при отсутствии его, т.е. при $r' \rightarrow \infty$), в красную сторону спектра. В этом случае всегда $z > 0$. Поэтому и говорят обычно о **гравитационном красном смещении**.

2.14 Поле кручения. Его прототипы

В нашем изображении мира пространством аффинной связности нашли своё место два хорошо известных поля физики — гравитационное и электромагнитное. Для них мы указали те части связности, которые могут быть использованы для полноценного описания каждого из этих полей. Также мы указали и подгруппы общей группы возможных преобразований реперов, соответствующие каждому из этих физических полей. Как преобразований реперов в виде единых, фиксированных определённым соглашением сущностей, так и преобразований величин входящих в них масштабов, всех вместе или по отдельности. Описание это согласованно во всех деталях и инвариантно отделимо как в форме используемых геометрических объектов, так и в форме выделенных подгрупп преобразований. А значит имеются вполне ясные причины того, что поля эти можно и следует рассматривать как совершенно самостоятельные стороны возможного изменения масштабов репера при его смещении в пространстве-времени от точки к точке. Но, в то же время, оно и объединённое, потому что речь идёт о возможном изменении одних и тех же объектов, являющихся прототипами наших масштабов.

С точки зрения геометрии, как систематического собрания идей о способах описания континуумов, в физике уже нашли своё место те связности, которые, опять же инвариантным образом,

объединены в определённую совокупность. В “группу” симметричных связностей. Геометрия же, как это было отмечено в первом томе, “Вводные главы”, рассматривает для аффинных связностей более широкий круг возможностей описывать изменения в локальных реперах. Всякая симметричная связность с идеальной точки зрения может быть дополнена ещё одним тензором T_{jk}^i , принципиально отличающимся от тензора A_{jk}^i , на который мы уже возложили ответственность за те явления мира, которые объединяются понятием “электромагнитное поле”. Это инвариантное отличие между двумя тензорами состоит в различном их поведении при перестановке двух нижних, ковариантных индексов. Тензор связности электромагнитного поля симметричен: $A_{jk}^i = A_{kj}^i$. А второй тензор, который называют тензором кручения, антисимметричен: $T_{jk}^i = -T_{kj}^i$. Этот тензор учитывает в связности дополнительную свободу систем координат изменяться.

Репер, как таковой, **в каждой отдельной точке** пространства-времени может быть подвергнут только поворотам и изменениям величин масштабов. Однако, в наше построение систем координат вовлечены ещё дополнительные степени свободы — выбор начальных точек отсчёта по всем координатам. В преобразованиях описания области, в разных способах сопоставления её точкам чисел, координат, участвует ещё одна подгруппа — подгруппа сдвигов.

Вот эти **локализованные**, т.е. **изменяющиеся от точки к точке начальные точки отсчёта** и учитываются тензором кручения. Тензор кручения объединяет все те же самые возможности репера изменяться, которые заключены в рамках групп поворотов и масштабирований, **но одновременно с ними сопровождающиеся** ещё и локализованной группой сдвигов. Не только поворот и изменение масштабов репера при смещении в соседнюю точку. Ещё и совмещённое с этими преобразованиями изменение начала отсчёта, сдвиг координат.

Геометрия, **как самосогласованное собрание идей**, позволяет локальным реперам иметь такие свойства, которые опи-

сываются тензором кручения. Следует ли нам рассмотреть эту возможность в физике? Ведь на сегодняшний день кажется (это общепринято), что в классических приближениях для описания всего того, что мы знаем о мире, достаточно двух полей — гравитационного и электромагнитного. Так ли это на самом деле? Ведь слово “кручение” нам вполне знакомо из множества бытовых ситуаций. Может быть в физике “кручение” тоже присутствует и в классических приближениях, просто рассматривают его в физике несколько иначе чем эти два поля?

Кручение. Что это такое в привычном, можно сказать бытовом смысле? Рассмотрим ряд примеров, которые вполне можно положить в основу геометрического рассмотрения **как прототипы** идеального понятия, превращающегося в пределе поточечного описания континуума координатами в тензор кручения.

Начнём с примеров в трёхмерном пространстве, которые легко ассоциируются у нас с понятием кручения. Это такие обычные предметы как шуруп, винт, гайка, пружина, и т.д. и т.п. Тот самый буравчик, например, давший название правилу выбора направления аксиального трёхмерного вектора. Они используются нами для обеспечения **определённого вида связей** между частями мира. Связей весьма жёстких, совершенно не допускающих какой-либо свободы их деформации. По крайней мере, если речь идёт об их исполнении в виде твёрдых тел⁶⁴.

Связи эти обладают одним важнейшим свойством. Для их описания требуется рассматривать какой-либо контур, некоторую линию вокруг выделенной “центральной точки”. Но такие контуры могут быть двух сортов.

Один из этих сортов — это контуры, замыкающиеся при обходе точки. Такие контуры можно отобразить на окружность фиксированного радиуса при стандартизации. Эти контуры при стремлении их радиуса к нулю сами вырождаются в точку. Такие контуры теоретически позволяют нам измерить те изменения,

⁶⁴Обратите внимание, во всех этих случаях речь идёт о не полностью локальных связях. Т.е. эти связи трудно, может быть невозможно, свести к свойствам единственной точки.

которые при этом происходят в тех или иных тензорах при обходе контура и приписать в пределе эти результаты самой точке. Точнее, свойствам континуума, сосредоточив их в точке. Так вводится тензор кривизны и его свёртки, как величины в некотором смысле более общие для континуума, пренебрегающие несущественными деталями описания. Точнее, интегрирующие эти детали в один итоговый существенный объект.

Второй вид — это контуры разомкнутые, которые при обходе по окружности (а всякую окружность можно рассматривать как кривую в поверхности, при стандартизации — в плоскости) получают обязательное приращение в координате, не затрагиваемой изменяющимися углами поворота репера. Приращение непрерывное при обходе контура, **сдвиг, смещение повёрнутого репера** по координате, не входящей в поверхность контура.

Во что превратится ротор вектора (т.е. разность между производными компонент вектора, взятыми по и против выбранного направления переноса), привязанного к такому контуру, при его обходе в разных фиксированных поверхностях обхода? И при стремлении “радиуса” каждого контура к нулю? Ответ нам известен. Для **замкнутых** контуров это не что иное так тензор кривизны, и в его самой упрощённой форме, той, в которой акцент делается только на контурах в выделенных двумерных поверхностях, это его антисимметричная свёртка — тензор Максвелла электромагнитного поля.⁶⁵

А если репер изменяется таким образом, связность континуума такова, что **при любом таком обходе точки, для всех или для некоторых поверхностей, контур не замыкается**, как это будет отображено в геометрии? А вот это и есть тот прототип, который в пределе стягивания контура в точку имеет изображение в свойствах самой связности **напрямую, и формулируется как идея не нулевого тензора кручения**. Неуничтожимого свойства связности в таких точках континуума. И тензор кривизны тоже модифицируется при этом.

⁶⁵На самом деле, при не нулевом кручении и тензор кривизны тоже принимает во внимание *возможную разомкнутость* стягивающегося контура.

Его компоненты явным образом получают зависимости от тензора кручения. И его антисимметричная свёртка, **полный** тензор Максвелла, включает в себя в этом случае как ротор вектор-потенциала электромагнитного поля (свёртки симметричной части связности), так и ротор от свёртки тензора кручения (антисимметричной части связности), ротор вектора кручения, если кручение не нулевое и его свёртка тоже отличается от нуля.

Таким образом, должно быть ясно, что перечисленные мной выше трёхмерные предметы, части мира являются не чем иным, как прототипами именно идеи кручения. Мы хотим описать геометрическими понятиями и такую трёхмерную область, в которой имеется такой вот “шуруп”, “винт” и т.д. Предмет, **устанавливающий наличие определённого вида связей** находящихся на нём точек (а в пределе образом такого предмета может быть и просто одномерная линия) с другими частями окружающей предмет трёхмерной области. Ясно, что для этого нам неизбежно придётся рассматривать связности самого общего вида, несимметричные, в которых одной из составляющих является тензор кручения.

Так что и в нашем описании мира четырёхмерным пространством-временем уже по указанной причине должно найтись место и для тензора кручения. Но ситуация ещё забавнее. А то, что мы называем просто вращением, например, вращением Земли ли, или любого иного предмета, это прообраз чего? Ведь мы подразумеваем всегда, что “вращение” это **происходит во времени**. Момент времени, сопоставляемый началу периода вращения **отличается** от момента времени, сопоставляемого концу периода вращения. **Контур только кажется замкнутым** в трёхмерном пространстве. В пространстве-времени он **обязательно** является разомкнутым. **Что мы обязаны** сопоставить в пространстве-времени линии существования вращающейся планеты, рассматриваемой нами в одном из классических приближений как материальная точка? Помимо всего прочего, что мы уже обсуждали ранее (масштаб времени, касательный вектор, масса покоя, возможно и электрический заряд), при описании

свойств пространства-времени аффинной связностью на такой линии **обязан иметься не нулевой тензор кручения**.

Если посмотреть внимательно на наши возможности проводить какие-либо измерения, то мы должны признать, что всегда при этом мы сами, наша система отсчёта **смещается во времени** в процессе измерений. Начало и конец измерений всегда соответствуют разным точкам пространства-времени. А значит мы никогда не можем реализовать замкнутые в пространстве-времени линии, контуры. Это только теоретическая возможность. Так что и на линиях существования тех или иных частей мира, с которыми мы связываем существование масштаба времени вполне может присутствовать не нулевой тензор кручения. Более того, можно ожидать, что и его свёртка, вектор кручения, в случае идеализации (превращении пространственных размеров упомянутых частей мира в точку), тоже может оказаться не нулевым вектором при определённых условиях.

По указанным выше причинам, от расширения нашего описания мира включением в рассмотрение свойств тензора кручения нам деться просто некуда...

2.15 Поле кручения как общее понятие

Мы приходим к рассмотрению связностей самого общего вида

$$\Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i + A_{jk}^i + T_{jk}^i$$

в качестве возможного описания свойств пространства-времени.

Здесь первый член, $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$, представляет собой метрическую часть связности, в физике ответственную за эффекты гравитации и, в общем случае, за все нелинейные эффекты, связанные с особенностями выбора системы отсчёта. Именно эта часть связности изменяется при изменении нами процедур измерения и при выборе тех систем координат, в которых наше описание становится стандартизованным, а классическая метрика и электромагнитный потенциал откалиброванными. Мы уже имеем те условия, которым должна удовлетворять эта часть связности,

чтобы описывать поле гравитации материальной точки. Важный момент: только эта составляющая описания преобразуется при замене координат именно как связность. И в этом смысле не является полностью измеримым компонентом описания. То, что в этой составляющей мы можем хотя бы теоретически померить сконцентрировано в метрическом тензоре и его отражении в метрической связности. Метрический тензор мы **определяем** принятием ряда **соглашений**, базирующихся на свойствах остальной, неметрической связности. И этим увязываем до определённой степени все части связности совместно. А ещё делаем таким образом метрику не совсем полноценным тензором. Выбираем самое удобное для нас, **стандартизованное** описание мира. Из всех возможных способов его описания делаем предпочтительными только определённую их часть.

Остальные составляющие полной связности являются полноценными тензорами, и, хотя бы теоретически, измеримыми компонентами описания. Однако, вследствие нашего способа стандартизации описания мира, определённая доля неоднозначности во втором выделенном члене остаётся. Та доля, которая увязывает определение метрики с определением электромагнитного вектор-потенциала. Их совместную калибровку. **Интегрируемая** часть вектор-потенциала нами определяется совместно с соглашением о том, что метрика в области полагается при таком выборе стандартизованной.

Второй член является симметричным по ковариантным индексам тензором $A_{jk}^i = A_{kj}^i$, и его наличие в полной связности проявляется в физике эффектами электромагнетизма (та часть, которая имеет не нулевую свёртку), а остаток, может быть, служит для учёта *нелокальных эффектов относительного движения материальных точек*. Для него тоже имеются ограничивающие произвол в выборе этого тензора уравнения. Уравнения Максвелла задающие, как описание электромагнитного поля заряженной материальной точки, так и описание поля электромагнитных волн. И уравнения, объединяющие все те части связности, которые не обусловлены непосредственно источника-

ми (событиями), а потребуются для окончательного согласования всех источников в единое целое, хотя бы в некоторой области пространства-времени.

Последний член тоже является тензором, но уже антисимметричным по ковариантным индексам тензором кручения $T_{jk}^i = -T_{kj}^i$. Какие физические эффекты могут быть поставлены в соответствие наличию в связности непрерывной области такого тензора нам предстоит выяснить. Начнём мы с того, что будем рассматривать поле тензора кручения пока из самых общих соображений. Полагая кручение идеализированной математической структурой без конкретизации её связи с прототипами из реального мира.

Несмотря на то, что антисимметричный тензор кручения T_{jk}^i и симметричный тензор A_{jk}^i являются инвариантно отделимыми, т.е. фактически независимыми составляющими связности, в тензор кривизны они входят вместе. Также вместе они входят и в свёртки тензора кривизны — в тензор Риччи и тензор Максвелла.

Начнём рассмотрение возможных проявлений наличия кручения в области с его возможного вклада в модификацию тензора Максвелла. Смысл и влияние этого вклада на описание мира в настоящий момент понять проще всего.

Той Δ -плотностью, учитывающей возможный вклад кручения в действие области, которую нам следует при этом рассмотреть для получения условий на тензор кручения как способ описания дополнительных свойств материальной точки и её связей с другими подобными материальными точками, является обобщение Δ -плотности

$$\bar{\mathfrak{F}}_{\mathbf{g}} = \mathfrak{g} \bar{F}_{ik} \bar{F}^{ik} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{F}_{\mathbf{g}} = \mathfrak{g} F_{ik} F^{ik}, \quad (2.144)$$

которое получается заменой $\bar{F}_{ik} \Rightarrow F_{ik} = \bar{F}_{ik} + T_{ik}$, где тензор $T_{ik} = \partial_i T_k - \partial_k T_i$ является совершенно самостоятельным, инвариантно выделенным и **полным** аналогом рассмотренного нами ранее тензора Максвелла, полученного из симметричной части связности.

Достаточно очевидно, что поэтому, несмотря на происхождение вектора T_k из инвариантно отделимой антисимметричной части связности, а не из её симметричной части, все его проявления в формальной части нашего описания будут **полностью** идентичны проявлениям уже рассмотренного нами вектор-потенциала электромагнитного поля. Как в части появления дополнительной сингулярности в описании материальной точки, так и в части всех деталей поведения распространённой на окружающую материальную точку область регулярной составляющей вектора кручения T_k .

Введём обозначения для наиболее важной в нашем описании дивергенции ротора вектора кручения T_k и её плотности, получаемых при ковариантном дифференцировании тензора T_{ik} (в его контравариантной форме) относительно метрической части связности:

$$\tilde{J}_T^k = \tilde{\nabla}_i T^{ik} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathfrak{J}}_T^k = \mathfrak{g} \tilde{J}_T^k. \quad (2.145)$$

Эти величины, как и в случае электромагнитного поля, гораздо более важны для нашего описания, чем соответствующие дивергенции по отношению к полной или симметричной связностям, т.к. привязаны к привилегированным для нас классическим системам отсчёта. Назовём их током и плотностью тока кручения.

Также как и плотность электромагнитного тока, Δ -плотность тока кручения является производной Δ -плотности антисимметричного тензора. Следовательно, обычная дивергенция этой плотности тоже тождественно обращается в нуль:

$$\partial_k \tilde{\mathfrak{J}}_T^k = 0. \quad (2.146)$$

Точно также для поля кручения будут справедливы и соотношения, аналогичные соотношению (2.80), имеющие в приближении классической метрики особое значение. Как и в случае тензора энергии-импульса и электромагнитного тока, они говорят о том, что с полем тензора T_{ik} классическая метрика ассоциирует *сохраняющийся относительно метрической системы*

отсчёта вектор $\tilde{J}_T^k$:

$$\tilde{\nabla}_k \tilde{\mathfrak{J}}_T^k = 0, \quad \tilde{\nabla}_k \tilde{J}_T^k = 0, \quad \partial_k \tilde{J}_T^k = 0. \quad (2.147)$$

С тензором ротора вектора кручения, как и в случае электромагнитного поля ассоциируется самостоятельная, инвариантно выделяемая плотность

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{g}T = \mathfrak{g}T^{ik}T_{ik} = \mathfrak{g}g^{ip}g^{kl}T_{pl}T_{ik}, \quad (2.148)$$

которую можно интегрировать по метрическому объёму и рассматривать (с соответствующим коэффициентом) как составляющую плотности действия, обязанную своим существованием наличию в рассматриваемой области кручения. Для этой части плотности действия можно провести без каких-либо изменений все выкладки, проделанные для вариации интеграла от плотности $\bar{F}_g$. Результатом, естественно, будет вторая пара уравнений Максвелла, но уже для вектора кручения, а не для вектор-потенциала электромагнитного поля. Поскольку сингулярность тока кручения, которую он может иметь на траекториях материальных точек, будет описываться точно также, как и сингулярность введённого ранее электромагнитного тока. Как и для электромагнитного тока, для тока кручения имеет место соотношение

$$\tilde{\mathfrak{J}}_T^k = \mathfrak{e}_T \cdot \frac{dx^k}{dl}, \quad (2.149)$$

где множитель $\mathfrak{e}_T$ постоянен на каждой классической траектории и равен нулю всюду вне траекторий. Как и плотность электрического заряда это скалярное **распределение** относительно стандартизованных метрических систем отсчёта.

На траектории классической частицы в её системе покоя эту плотность можно и нужно рассматривать как простую постоянную e_T . Определена эта постоянная только именно на траектории и нигде больше. В остальном пространстве-времени она тождественно равна нулю. По аналогии с электрическим зарядом, я назову её зарядом кручения.

Для тензора ротора вектора кручения имеется, очевидно, и первая пара уравнений Максвелла, являющаяся структурным тождеством.

Таким образом, мы приходим к выводу, что с точки зрения сугубо математической, идеальной, в классических приближениях описание той части поля кручения, которая связана с ненулевым вектором кручения и его не нулевым тензором Максвелла (ротором), является совершенно таким же, как и описание электромагнитного поля. Всё тоже самое, только помимо массы покоя и электрического заряда с материальной точкой нужно дополнительно ассоциировать и заряд кручения.

Поле кручения в системе покоя такое же, как и электрическое (но со своим зарядом). И можно также говорить о волнах кручения, имеющих свойства, повторяющие свойства электромагнитных волн. Тут заряд, конечно, не играет никакой роли (кроме излучения/поглощения волн). Другой носитель волн. Вектор кручения тоже описывает изменение метрического объёма при смещении от точки к точке, но такое изменение, которое всегда ассоциировано с этим смещением. Неразделимый образ одновременного локализованного сдвига начала координат, совмещённого с изменением масштабов репера⁶⁶.

Надо сказать, что в классических приближениях отделение проявлений вектора кручения от аналогичных проявлений вектор-потенциала симметричной части связности может оказаться достаточно нетривиальной задачей. И, вполне возможно, что *всё что мы называем электромагнитными явлениями в классических приближениях, является совместным проявлением суммарного вектор-потенциала $A_j + T_j$* . Напомню уже сказанное ра-

⁶⁶Однако имеется и одно существенное отличие. Оно связано с невозможностью за счёт калибровки метрического тензора убрать из нашего описания градиентную (интегрируемую) составляющую вектора кручения, если она есть. Для рассматриваемого проявления кручения эта составляющая роли не играет. Возможно, она потребуется как необходимый элемент не локализованного описания мира. Но также не исключено, что интегрируемая часть вектора кручения играет роль и в формировании событий особого типа на траекториях массивных частиц. Сейчас мы не можем исключить такую возможность.

нее — все наши измерения требуют некоторого времени, а значит при учёте изменения используемых нами масштабов мы должны принимать во внимание и влияние на них группы сдвигов, а не только поворотов и масштабирований.

Что, однако, для нас важно — и в этом случае инвариантное разделение явлений по их происхождению от разных источников не только возможно, но и необходимо для понимания взаимосвязей в мире. Такое разделение представляется достаточно лёгким на уровне вектор-потенциалов и тензоров Максвелла обоих полей, электромагнитного и кручения. Однако, уже тензор энергии-импульса, сформированный для суммы двух этих полей, содержит в себе перекрёстные составляющие, позволяющие рассматривать взаимодействие этих полей при наличии в области и того, и другого. Причины возникновения такого взаимодействия и способы его описания мы рассмотрим немного позже, в следующей главе.

Выше мы сосредоточились на тех свойствах кручения, которые возникают при наличии у него не нулевой свёртки, не нулевого вектора кручения и его не нулевого ротора. Обусловлено это тем, что только такой вид кручения может быть, в принципе, ассоциирован с определённым видом событий на траекториях материальных точек. Вне нашего поля зрения остались все те возможные тензоры кручения, которые, либо имеют нулевой вектор кручения, либо этот вектор является градиентом некоторой функции. Для тензора A^i_{jk} эти возможности могут быть, вероятно, удалены нами из рассмотрения соглашением о совместной калибровке метрического тензора и вектор-потенциала электромагнитного поля при стандартизации описания. Хотя при этом и остаются не до конца закрытыми возможности наличия в симметричной части связности бесследового дополнительного к метрической связности тензора и нет уверенности, что нелокальное описание области не потребует учёта такого рода свойств симметричной части связности. Для тензора кручения удалить из рассмотрения указанные выше виды кручения с помощью калибровки метрики мы не можем принципиально. Поэтому такие

виды кручения следует рассматривать как возможные, и изучать их проявления там, где потребуется. Возможно также, что эти виды кручения не будут связаны с событиями напрямую. Их появление возможно и как дополнительное средство, необходимое для полноценного согласования глобализованного описания выделенной области локальными стандартизованными реперами в случае наличия в области более чем одной материальной точки.

Я не буду здесь заниматься этим вопросом в полном объёме. Намечу только некоторые возможные соотношения, возникающие в области при наличии в ней кручения. Для этого рассмотрим влияние тензора кручения на линейную по тензору Риччи составляющую плотности действия в области.

Согласно первой строке (1.12) и четвёртой строке (2.33) мы можем записать вклад тензора кручения в эту плотность в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}^{(T)} &= k_g \left[\frac{1}{2} (\bar{\nabla}_k T_l + \bar{\nabla}_l T_k) - T_{kp}^i T_{il}^p \right] \mathfrak{g}^{kl} = \\ &= k_g (\bar{\nabla}_k T_l - T_{kp}^i T_{il}^p) \mathfrak{g}^{kl}. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Мы использовали симметричность классической метрики. Вклад антисимметричной части полного тензора Риччи исчезает в этой плотности тождественно, и вклад симметризованной части ковариантного градиента вектора кручения по симметричной связности сводится к произведению самого этого градиента на плотность метрики.

Нас интересуют соотношения, возникающие только из-за наличия в области кручения, поэтому мы будем вычислять лишь соответствующую часть лагранжевой производной (1.4) этой плотности. Т.к. кручение отделено от остальной части связности инвариантным образом, то соответствующие лагранжевы производные должны обращаться в нуль по-отдельности. После ряда выкладок, с учётом того, что **метрическая ковариантная** дивергенция плотности метрики в наших приближениях равна нулю по определению, получим следующее соотношение между метрикой, симметричным тензором A_{jk}^i (возможно необходимым добавком в симметричной части связности к чисто метрической

связности), и тензором кручения:

$$A_{kl}^i \delta_m^n g^{kl} + T_{km}^n g^{ki} + T_{mk}^i g^{kn} = 0. \quad (2.151)$$

Таким образом, наличие в области не нулевого тензора кручения может потребовать модификации симметричной части связности и изменения положения геодезических по сравнению с метрическими геодезическими. Хотя, напрямую, кручение на геодезические не влияет.

2.16 Единое поле физики

В этой главе нашей целью было изучение возможности распространения локальных реперов с траекторий материальных точек на окружающие эти материальные точки области континуума, пространства-времени, рассматриваемого как единая непрерывность. Распространение это, по необходимости, должно быть **самосогласованным**. Таким, чтобы, там, где имеются, или могли бы иметься материальные точки, отличные от той, которую мы принимаем за базовую, **порождающую** систему координат в континууме, а не только на линии существования этой материальной точки, их локальные реперы входили бы **в ту же самую** “подгруппу”, по возможности **локально лоренцеву**, что и реперы, полученные распространением базового.

Первое, что мы сделали — определили тот вид **локального полного репера**, который нам наиболее удобен для построения нашего описания мира геометрическими понятиями. Для установления соответствия между математическим понятием локального репера как совокупности идеальных геометрических величин (векторов масштабов) и реализуемыми нами физическими процедурами измерения, нам потребовалось ввести в рассмотрение классическую метрику. Структуру, фиксирующую принятые нами соглашения о свойствах полного репера масштабов как целостности.

Соответственно, самым первым шагом в распространении этих соглашений с траекторий материальных точек на окружающую их полноценную область непрерывности стало выяснение

того, при каких условиях, при какой связности этого континуума возможно определить полное согласие между всеми точками пространства-времени и нашими требованиями на свойства локальных реперов масштабов как целостных объектов. Целостных потому, что в основу определения всех масштабов репера мы можем положить и положили один единственный масштаб — масштаб времени. Мы выяснили эти условия. Это оказалось требование на тензор Риччи чисто метрической части связности быть тождественно равным нулю всюду вне областей существования материальных точек. Всюду вне событий.

Мы получили **конкретный функциональный вид зависимости метрической части связности от расстояния до базовой материальной точки** в таких, специально выбранных нами **стандартизованных системах отсчёта**. И связали такую связность, такое приближение в описании мира с имеющимся в физике понятием поля гравитации.

Мы также рассмотрели, как изменяется идеализированный математический образ “пространство-время с метрической связностью” при снятии принятых нами ограничений на допустимые **локальные** преобразования масштабов, но при сохранении свойств локальных реперов как целостностей, при расширении понятия о классической метрике до понятия о полноценном тензоре. На этом пути мы пришли к выводу, что практически любая метрическая связность (взятая отдельно от других возможных видов связности, как самостоятельная, законченная математическая идея) может быть приведена к полученному нами функциональному виду для стандартизованных систем отсчёта в области, окружающей единственную материальную точку. Процедуру такого приведения мы определили как **процедуру калибровки классической метрики**. Этим мы завершили рассмотрение **всех возможностей** проявления метрических связностей в описании реального мира. Более того, этим мы также завершили рассмотрение всех возможностей проявления в свойствах континуума (его связности) **событий, рассматриваемых только как непрерывные цепочки**. Как непрерывные линии суще-

ствования материальных точек, единственной характеристикой которых, увязывающей эти линии с событиями на них является масса покоя. Связи между отдельными такими линиями непрерывных событий остаются не описанными. Также как остаётся незавершённой вся наша локальная конструкция, принятая нами для определения свойств стандартного репера масштабов. Ведь она явным образом опирается на постулаты, соглашения, касающиеся именно способа описания связей между разными цепочками событий. Причём связей особого рода, бинарных, реализующих цепочки, состоящие только из двух событий.

Для завершения описания мира согласованными системами координат, как произвольными допустимыми (т.е. сохраняющими число измерений пространства-времени), так и стандартизованными системами отсчёта **необходимо** выйти за рамки только метрических связностей. Выйти, расширить совокупность связностей, которые индуцируются в континууме пространства-времени событиями. Предоставить локальным реперам возможность изменяться от точки к точке более свободно, чем допускают метрические связности. Но так, чтобы опора на локальную классическую метрику, на стандартизованные системы отсчёта всё ещё была для нас возможна. Так, чтобы все сравнения результатов сделанных нами измерений мы могли соотносить именно с выбранными нами стандартными локальными реперами как едиными целостностями. С локальными реперами, построенными на базе стандартизованных свойств классической метрики. В соответствующих самосогласованных координатах в области пространства-времени. А это значит, что при расширении свойств связности мы должны обращать наше внимание не на полноценные абсолютные дифференциалы (или полноценные абсолютные производные) измеряемых нами величин, а на дифференциалы и производные **относительно метрической части связности**. Относительно наших стандартизованных систем отсчёта. Это не значит, что мы отказываемся от полноценного описания мира со всех возможных точек зрения. Это значит, что мы **явным образом признаём, что не все возможные**

точки зрения мы можем реализовать или правильно интерпретировать. Признаём то, что интерпретация геометрических соотношений при определённом выборе координат гораздо проще, чем при других возможных выборах. А ещё это означает, что многие из возможных точек зрения могут быть нам просто не нужны для описания мира, т.к. мы никогда не сможем описывать мир именно с этих точек зрения. В идеальное математическое многообразие можно внести и координаты, и связность как угодно, лишь бы не уменьшалась его мерность. Но нам ведь необходимо выделить только **такие координаты, которые мы в состоянии реализовать, хотя бы приближённо.** И те связности, которые **необходимы для описания имеющих в области пространства-времени событий и их связей.** В описании реального мира нам приходится опираться только на те возможности, которые нам этот мир предоставляет как собственным частям.

Метрическая часть связности принимает во внимание **все** имеющиеся в области события, представленные в форме такого внешнего для линии существования материальной частицы параметра, как масса покоя. В форме, получающейся редукцией идеализированного нами до ковариантного вектора градиента (настоящего градиента только по отношению к изменению времени на траектории) действия материальной точки. Получающегося, в свою очередь, как идеализация прототипа, предел удельного числа событий, приходящихся на выбранную нами единицу времени. Геометрию классического приближения к описанию континуума пространства-времени этот параметр определяет ещё одной идеализацией — принятой для него сосредоточенностью в единственной **пространственной** точке. Сингулярным характером массы покоя, её **отсутствием где бы то ни было вне материальных точек.** Эта редукция сингулярности **ковариантного вектора** до сингулярности только скаляра оставляет за бортом нашего описания все те его черты, которые могли бы появиться из учёта **связей** событий, находящихся **вне** той совокупности связей, которые объединяют данную выделенную цепочку в

предельную непрерывную линию траектории материальной точки. Именно это заставляет нас расширить совокупность рассматриваемых связностей. И предполагать наличие дополнительных к массе покоя параметров, описывающих связи приписываемого линии существования массивной частицы базового репера с окружающим её континуумом.

По этой причине мы стали изучать новые возможности для масштабов репера изменяться при расширении совокупности рассматриваемых связностей. Шаги на этом направлении определяются выделением тех этапов, которые могут быть описаны инвариантно, независимо от тех или иных принятых нами ограничений на системы координат. Учётом тех дополнительных свойств континуума, которые могут быть **описаны отдельно** от всех иных в любых системах координат. Поэтому мы начали с расширения совокупности допустимых связностей сначала только до любых симметричных.

На этом пути мы достигли очень многого в формировании нами **самосогласованного** описания мира:

- Мы выявили новую необходимую нам **сингулярную** характеристику траектории материальной точки — вектор электромагнитного тока. Вектор, дополнительный к касательному к траектории вектору, учитывающему только наличие введённого нами ранее метрического параметра траектории l , при его бесконечно малом изменении dl . Ведь если связность континуума отличается от метрической, то это значит что принятое нами соглашение о **пропорциональности** бесконечно малого метрического расстояния на траектории dl и настоящего инвариантного дифференциала скалярного параметра на траектории, изменения действия ds_0 не является точным. Причём не за счёт того, что неверно определена масса покоя, а из-за отличия метрической связности от полной связности вдоль траектории. А значит и отличия метрического параметра l от канонического. Вот эту необходимую поправку и призван описывать вектор электромагнитного тока вместе с электрическим за-

рядом, своей редукцией до скаляра в системах покоя.

- Этим мы добавили в наше описание, рассматриваемое как сопоставление геометрических понятий с понятиями физическими, ещё одно хорошо известное в классической физике поле. Электромагнитное поле.
- Это поле вошло в наше описание двумя неразрывными сторонами. Как часть поля связности в области, привязанная строго к своему источнику, сингулярной линии существования материальной точки. И как возможные **колебания** в этой дополнительной связности, ограниченные только согласованностью с источниками поля и описывающие те **дополнительные связи между событиями**, которые **не может** описывать учтённое нами ранее поле гравитации, ассоциируемое с метрической частью связности. Связи двухточечные. Связи с иными сингулярными линиями материальных точек. Связи посредством континуума, не содержащего событий.
- Этим мы фактически доопределили до необходимой законченности и введённые нами ранее стандартизованные процедуры измерения. Стандартизованные системы отсчёта. Доопределили выбор, способ введения классической метрики. Достигли, наконец, **полной самосогласованности** описания мира в классических приближениях.

В определённом смысле, создание столь желаемой А.Эйнштейном и очень многими другими исследователями **теории единого поля** в классических приближениях завершено. Также как и **единой теории поля**. Ведь вполне ясно, что наше сопоставление геометрических характеристик пространства-времени как континуума и двух известных в настоящее время классических полей, гравитационного и электромагнитного, является полноценным и самосогласованным. Взаимно однозначным.

Имеется **единое** поле, поле связности, описывающее **возможные** изменения в масштабах реперов при смещении от точки к точке. Изменения, возникающие не только в силу наличия

у пространства-времени как континуума определённых свойств, но и в силу имеющейся у нас возможности самим изменять выбор реперов тем или иным способом. И поэтому поле связности, учитывающее эти **потенциальные** изменения в масштабах, нам следует рассматривать как поле, соответствующее физическому понятию **потенциала**.

Имеются также, тоже единые, но инвариантно разделяемые на составляющие изменения в этих реперах, которые могут быть вполне полноценно измерены и сравнены **независимо от нашего выбора** репера масштабов. Тензор кривизны. Свёртки тензора кривизны, тензор Риччи и тензор Максвелла. Которые логично рассматривать как геометрические образы физического понятия о напряжённости поля.

И столь же очевидно, что и само описание различных в физике полей нами проводится с совершенно одинаковых, **единых** позиций. Одними и теми же методами.

Однако, мы не остановились на совокупности только симметричных связностей. Мы расширили рассматриваемую совокупность связностей до самого конца — мы включили в рассмотрение и поле тензора кручения. И этим закрываем вопрос не только о законченности идеального математического образа пространства-времени как континуума. Ведь больше никаких иных свойств у связностей, обусловленных только существованием материальных точек, просто быть не может. Рассмотрены **все возможные свойства**. Мы закрываем также и весьма важный вопрос физики:

- **Никаких иных полей, обязанных своим существованием отдельно выделенному источнику (сингулярной для пространства-времени линии существования материальной точки), кроме уже описанных нами, в физике классических приближений появиться НЕ МОЖЕТ.**

Наш переход к рассмотрению самого общего вида аффинных связностей не был совершенно произвольным теоретическим шагом. Шагом сделанным только потому, что это возможно. Мы

указали на те свойства мира, которые вынуждают нас сделать этот шаг. На прототипы кручения в реальном мире. Однако, работая в экстремальных условиях идеализации, рассмотрения только сингулярных линий, содержащих непрерывные события и окружающего их непрерывного пространства, мы предпочли рассмотреть вопрос с максимально общих позиций, не опираясь пока на прототипы кручения. Оставив нахождение соответствия прототипов и их идеализации на потом. А с максимально общих позиций мы получили, что в классических приближениях одно из возможных проявлений кручения в крайней степени аналогично уже введённому нами описанию электромагнитного поля. Только в описании обязан появиться ещё один ток (ток кручения), с соответствующим зарядом кручения. И ещё один набор волн в пространстве-времени, волн кручения.

Более того, при рассмотрении связности как единого целого, **многие** проявления как электромагнитного вектор-потенциала, так и вектора кручения имеют место в одном тензоре, полном тензоре Максвелла. Да, проявления вектора кручения и той части свёртки объекта связности, которую мы называли вектор-потенциалом электромагнитного поля, можно инвариантно разделить во всех явлениях, в которых проявляется отличие полного тензора Максвелла от нуля. Можно. Но делаем ли мы это в физике, описывая электромагнитные явления? Этот вопрос требует специального дополнительного рассмотрения.

Почему я пишу “многие” проявления вектора кручения, а не “все”? Потому что, в отличие от его аналога из симметричной части связности, этот вектор в принципе может быть нулевым, т.е. отсутствовать при наличии полного тензора кручения, а может также иметь и градиент некоторой глобальной функции, единой для всего пространства-времени, **не поглощаемый калибровкой классической метрики, калибровкой стандартизованных координат**. Этот градиент не даёт вклада в тензор Максвелла (кручения) и в соответствующий тензор энергии-импульса области. Однако учёт некой глобализованной функции, производящей такой вектор кручения, может стать

необходимой составляющей нашего описания мира. Ведь связи между разными материальными точками не ограничиваются только бинарными, описываемыми тензором Максвелла. Их совокупность намного сложнее, многообразнее. Сводя возможные в физике поля (ограничивая связность только необходимой для учёта сингулярных материальных точек как отдельных, выделенных из остального мира сущностей) к полям гравитационному и чисто электромагнитному (возможно содержащему и соответствующие эффекты кручения), мы забываем о **необходимой согласованности** траекторий отдельных материальных точек как целостностей во всей их совокупности. В выделенной области, и в мире, рассматриваемом как целостность, Вселенная. Т.е. не принимаем во внимание не локализуемые виды согласования. И некоторая общая “закрученность” выделяемых нами областей в пространстве-времени, тех или иных частей мира, по отношению к окружающему пространству-времени вполне может иметь место. Этот вопрос мы пока оставили без надлежащего рассмотрения.

Поэтому стоит также обратить внимание на ещё одну сторону в классификации и связностей и их физического образа, полей (сил). Это взгляд на наши понятия с глобальной для области точки зрения, как на единые функции, непрерывные всюду, кроме тех мест, где находятся материальные точки. На протяжении этой главы я не раз указывал, что в этом смысле в наборе компонент аффинной связности как в наборе функций точки пространства-времени можно выделить интегрируемую часть. Некую единую для всех компонент часть, в отношении их зависимости от точки области. Главным индикатором интегрируемости при этом становится возможность рассматривать важный для нас ковариантный вектор как градиент некоторой единой функции. Возможность эта подразумевает, что **может иметься** также и не интегрируемая часть функций, тоже существенная в нашем описании. Причём, внимательный читатель может без труда связать наличие не интегрируемой, “вихревой” части с наличием той составляющей описания, которая в физике класси-

ческих приближений явным образом интерпретируется как волны. Волны в непрерывности, континууме, объединяющем массивные материальные точки. Волны электромагнитные или кручения. А интегрируемые части, как электромагнитного поля, так и кручения жёстко связаны с системами покоя источников и их наличие в симметричной части связности ведёт к перенормировке классической метрики, к модификации потенциала в неё входящего по сравнению с чистым гравитационным полем. И хорошо видно также, что с той частью связности, метрической связностью, которая одна только и ассоциирована с полем гравитации, связать неинтегрируемую, волновую составляющую нельзя принципиально. Даже если для полного согласования относительного движения множества материальных точек нам может понадобиться дополнительно модифицировать симметричную часть связности некоторым тензором, свёртка которого будет градиентом какой-то функции, то этот добавок нельзя будет рассматривать как полноценную волну, имеющую своё представление в паре связанных элементарных событий. Только, возможно, часть такого добавка может выглядеть как “коллективная” волна, делающая периодически зависимыми от места в пространстве-времени относительные положения формирующих его материальных точек. Как аналог звуковых волн или подобных им колебаний в сплошной среде. События, описывающие испускание и поглощение таких волн обязаны быть **большими, коллективными** объединениями элементарных событий. И называть их “гравитационными” можно будет с очень большой натяжкой.

Для завершения рассмотрения вопроса о едином физическом (и математическом) поле, описывающем самосогласованно пространство-время как континуум с имеющимися в нём связанными событиями, я должен остановиться и на обсуждении классификации тех изменений в локальных реперах, которые мы выделяем в нашем описании с точки зрения **групп преобразований масштабов и групп преобразований координат**. Этот момент важен для нашего понимания мира не только в рассмат-

риваемых сейчас классических приближениях. Чёткое описание принятых в рассмотрение возможностей для масштабов изменяться в результате действия на них пространства-времени как континуума позволит нам понять позднее и те пути, которые придётся открыть при переходе к квантовым приближениям описания мира.

Итак, на первом шаге, при учёте только метрических связностей мы явным образом ограничились рассмотрением только **группы локально лоренцевых преобразований масштабов**. Гравитации поставлена в соответствие способность континуума **поворачивать весь репер, как целое** в плоскости “радиус-время”. Ориентация в пространстве не фиксирована. Т.е. чисто пространственные повороты систем координат (отсчёта) являются совершенно свободными для выбора, в отличие от поворотов расстояние-время. Всё это хорошо видно только в наборе стандартизованных, специально выбранных локально инерциальных систем отсчёта. Использование иных координат, иных локальных реперов, в том числе с включением разнообразных масштабирований, а не только с расширением допустимых поворотов, возможно. Но описание усложняется. Чисто формально, новой физики не появляется. И что особенно важно, от такого сложного описания всегда можно перейти к стандартизованному.

При учёте электромагнитного поля (в его ограничении симметричной связностью), мы обнаруживаем, что **континуум может также изменять** локально и величины масштабов. Не произвольно. А так, чтобы оставалось согласие между этими изменениями и уже распространённой нами на всю область метрической структурой, выражающейся в нашем предпочтении для описания всё тех же локально инерциальных систем отсчёта. По сути дела, учёт электромагнитного поля, как свойства пространства-времени, эквивалентен расширению преобразований, осуществляемых именно континуумом (не нами!) до произведения группы четырёхмерных (локально лоренцевых) **поворотов** на группу чистых локальных масштабирований. А **уравнения по-**

ля являются условиями на параметры таких преобразований, требующими от них не нарушения согласованности локальных реперов. При этом подгруппа чисто пространственных поворотов всё ещё остаётся по большей части в сфере действия нашего свободного выбора. Базовая материальная точка остаётся в рассмотрении единственной, а значит в нашем описании области имеет место полноценная сферическая симметрия.

С точки зрения общих возможных локальных преобразований **репера**, т.е. при использовании полной линейной группы локальных допустимых преобразований, можно показать, что **вообще всякое такое** преобразование возможно представить как результат **последовательных преобразований** (в общем случае нескольких) из этих двух подгрупп общей группы допустимых линейных преобразований в фиксированной точке. Т.е. мы имеем максимально возможную общность описания при взгляде с этой точки зрения. Максимально возможную общность описания способностей континуума менять **локальные реперы** при смещении от точки к точке. Единственная подгруппа возможных преобразований, остающаяся не накрытой при этом — подгруппа сдвигов. Но она не может быть учтена в связности полностью самостоятельно, а только как модификатор матриц линейных преобразований репера.

Наши возможности выбирать любые странные реперы тоже остаются. С изменением функционального вида связности пространства-времени от того вида, который мы получили в ограничениях стандартными системами отсчёта. Но они могут только усложнить наше описание мира. А чтобы сделать его проще, мы должны следовать тем правилам выбора локальных масштабов, которые установлены нами принятием **постулатов Специальной Теории Относительности**. Именно постулатов, **соглашений** в отношении способов описания свойств электромагнитных волн.

Казалось бы, всё, что можно сказать о возможности пространства-времени изменять локальные реперы таким образом, исчерпывается совокупностью симметричных связностей.

Всё, да не всё. Мы оставили вне нашего рассмотрения те преобразования координат, которые **не имеют прямого отношения** к локализованным преобразованиям репера масштабов. А связность как идеальная математическая структура их принимает во внимание. Речь идёт о **локализованном изменении начала отсчёта системы координат**. Добавление этой группы преобразований к возможным свойствам пространства-времени как континуума, влияющего на поведение локальных реперов масштабов как раз и приводит к возможности связности иметь кручение. С точки зрения групп преобразований, в общую группу преобразований, описываемую связностью с кручением, добавлен как множитель ещё и локальный, т.е. бесконечно малый, но возможно разный для разных точек **сдвиг начала отсчёта координат**. Сравните в прототипах: вращение по замкнутой окружности (что вправо, что влево — результат одинаков) и закручивание шурупа, т.е. **вращение, в каждой точке контура совмещённое с перемещением** в направлении, перпендикулярном плоскости контура вращения. И не только в рамках трёхмерного пространства, но и при **смещении во времени**. Ведь время в стандартизованных системах отсчёта всегда ортогонально любой пространственной координатной плоскости. А это значит, что, т.к. существование материальной точки и есть в определённом смысле смещение любой такой пространственной плоскости (контур в ней) в направлении, ортогональном плоскости контура, то и в случае материальных точек (не имеющих пространственных размеров) вполне можно ожидать ассоциированного с ними не нулевого кручения.

Вот теперь группа возможных локализованных преобразований реперов при смещении от точки к точке континуума принята нами во внимание полностью. Т.е. и с этой точки зрения, с точки зрения возможных групп преобразований мы подошли к описанию мира как с минимально необходимой позиции (ограничились **только произведением** всех имеющихся **подгрупп** линейных преобразований координат), так и с максимально возможной общностью — произведение принятых во внимание под-

групп позволяет получить **любое необходимое** изменение в локальных реперах. Естественно, для адекватного описания мира требуется ещё и условие всеобщей согласованности преобразований, **осуществляемых пространством-временем, т.е. миром как единым континуумом**. Это условие самосогласованности реперов во всех точках мира и записывается нами как совокупность уравнений поля и уравнений движения материальных точек.

На этом классификацию возможных полей (и физических, и математических, т.е. максимально идеализированных) в континууме пространства-времени в классических приближениях, причём со всех возможных позиций, мы можем полагать исчерпанной. Но само наше описание завершённым считаться не может никак. Нам ещё нужно описать, как эти поля проявляются во взаимном движении материальных точек. Да и вопросы, связанные с уточнением проявлений кручения в нашем описании мира классическими приближениями ещё остаются в нашей программе накрытыми не достаточно полно. Как и вопросы, связанные с нелокальными эффектами, которые для реального мира являются отнюдь не пренебрежимыми проблемами. Из более-менее ограниченного количества достаточно простых элементов можно компоновать огромное число совершенно разных целостностей. Описать эти возможности достаточно полно — гигантская задача. И этой задачи в данной книге я практически не касаюсь, затрагивая лишь незначительное число аспектов проблемы, жизненно необходимых для иллюстрации того, что создаваемые основания физики как адекватного описания мира вполне согласуются с имеющимся уже у нас её грандиозным зданием. Очень большим, но весьма ещё далёким от завершения его строительства.

Глава 3

Динамика материальной точки

3.1 Способы описания движения материальной точки

Перейдём теперь к описанию движения, весьма многогранного физического понятия. Что такое движение с точки зрения **уже имеющегося описания мира математической конструкцией**, даже не пространством аффинной связности, а только многообразием?

Всем точкам мира приписаны координаты в каждой из допустимых систем координат. Речь может идти об описании свойств выбранной части мира (в текущем приближении **материальной точки**) либо с точки зрения системы отсчёта (всех координат для неё возможных), связанной именно с этой частью мира, порождаемой ею, либо с точки зрения системы отсчёта (и всех соответствующих координат), порождаемой **другой** частью мира. В классических приближениях, в которых части мира, содержащие цепочки больших событий, мы рассматриваем как материальные точки, массивным телам поставлены в соответствие времени подобные линии, одномерные подпространства в пространстве-времени, с которыми жёстко связаны временные

масштабы, (мнимо)единичные касательные к базовой линии контравариантные векторы.

Другая часть мира — другая линия. Представление о движении при таком идеальном взгляде “со стороны” эквивалентно простой констатации факта **не совпадения линий**, различия их координат. Описание движения сводится к установлению координатного описания подпространств, соответствующих интересующим нас линиям.

Таким образом, способ описания движения, выглядящий простейшим, сводится именно к получению координатного описания каждой точки интересующей нас линии (траектории материальной точки) в каждой конкретной системе координат. Если группа допустимых преобразований координат определена полностью для всех точек в области пространства-времени, то достаточно иметь такое описание линии в одной произвольной системе координат. Однако, за этой кажущейся простотой спрятаны серьёзные проблемы.

Одна из них, это проблема выбора той системы координат, в которой описание линии выглядит наиболее просто. Казалось бы, это одна из тех систем координат, соответствующих некоторой системе отсчёта, масштабы времени в которой базируются именно на этой линии. Одна из систем координат, соответствующих системе покоя рассматриваемой материальной точки. Координаты линии в ней простейшие — все пространственные равны нулю, а время меняется так, чтобы масса (энергия) покоя материальной точки оставалась постоянной.

Верно. Локально, в малой окрестности базовой материальной точки и для описания **самой этой материальной точки** это лучший подход. Но! Нам ведь нужно описание не единственной **нашей** линии, а многих других, всех тех, которые связаны с интересующими нас материальными точками (другими выделенными частями мира). Описание, по сути своей **не локальное**, мы хотим превратить в локализованное описание движения не совпадающих с нашей базовой материальной точкой массивных частиц относительно выбранной нами системы отсчёта в любой