

# Глава 1

## Общие вопросы

### 1.1 Что такое классические приближения

В первом томе, в книге “Основания физики: Вводные главы” [1], мы прошли довольно длительный путь оформления идей, с помощью которых надеемся достаточно полно описать наш мир. В основном эти идеи были сформулированы как понятия математики, того языка, который является преобладающим и в физике. Пытаясь описать мир как целостность с помощью описания его частей, мы приходим к необходимости сосредоточиться в основном на использовании понятий аналитической геометрии. Не отказываясь, конечно, и от других развитых нами идей. Более того, само развитие базовых идей математики, включая все идеи аналитической геометрии, нам удалось связать с потребностями именно описания мира, а не с какими-то совершенно отвлечёнными от наших насущных нужд причинами.

Основным выводом стало представление о необходимости описывать мир с помощью такой идеальной математической конструкции как пространство аффинной связности. В этой конструкции мы выделили два уровня.

Первый уровень описания непрерывного мира определяется сопоставлением каждой точке, каждому элементу мира, который мы в описании полагаем неделимым, чисел, называемых коор-

динатами. Сопоставление элементам мира чисел позволяет нам говорить о мире (точнее, о каждой его выделенной непрерывной части) на языке математики. На языке идеальном, приспособленном нами именно для целей описания непрерывных множеств. Достигнуто это с помощью ряда логических выводов о том, что нам для этого нужно, и ряда допущений о том, что мы всё это действительно можем реализовать. Этот уровень описания назван представлением мира математическим понятием **многообразия**.

Цепочки логических выводов, ведущие к этому идеальному понятию, больших сомнений не вызывают. Просто потому, что это скорее определения новых понятий на основе понятий, определённых ранее, с помощью добавления им новых свойств. Свойств, которые могут иметься, а могут и не иметься. Нашей задачей остаётся поиск в реальном мире подходящих для этих понятий прототипов. А вот допущения о возможности реализовать всё, что нужно для такого описания непрерывного мира теми или иными предметами и действиями в этом самом мире, легко позволяют усомниться в доступности для нас их полноценной реализации. Именно потому, что нам необходимо установить наличие в реальном мире хотя бы прототипов, позволяющих реализовать наши идеальные понятия. Если мы ограничимся только теми понятиями, для которых такие прототипы имеются (а при формулировании математических понятий мы старались идти именно по этому пути), то эта задача представляется вполне решаемой. Однако, мы уже точно знаем, что в большинстве случаев понятия математики всё-таки достаточно далеко уходят от своих прототипов на пути идеализации. Особенно это касается способов описания непрерывных множеств. Поэтому жизненно важно также отслеживать в полной мере насколько далеко наши реальные возможности отличаются от необходимых для создания описания идеальных инструментов.

Для чистой математики сопоставление чисел точкам мира не является проблемой. В ортодоксальной математике просто предполагается, что это как-то сделано. А вот для физики

именно этот момент, способ такого сопоставления, его реализация нами при создании описания мира, а не произвольного собирания идей, является самым важным. По сути дела далее будет видно, что вся физика как наука может быть получена на пути описания свойств процедур такого сопоставления. Процедур измерения.

Способы приписывания чисел (“координат”) точкам мира, его неделимым элементам, мы определили названием “процедура измерения”. И очень много внимания посвятили этому понятию. Как с логической точки зрения, так и с точки зрения конкретной реализации.

Лучшим, что нам удалось сделать в этом плане с опорой на известные нам свойства частей мира, стало представление о группах локализованных инерциальных систем отсчёта. Вся их конструкция выросла из понятия о событии, как важнейшем полноценном представлении части мира некоторым выделенным элементом, сохраняющим в себе все свойства мира как непрерывности, и, в то же время, на определенном уровне становящимся для нас далее неделимым. Т.е. прообразом точки, одного из элементов, из которых и состоят идеальные непрерывные множества. Неделимость событий на некотором уровне может быть условной, принятой нами — просто мы соглашаемся принудительно остановить процедуру их деления, процедуру перехода к всё более “мелким” событиям, появляющимся в результате дробления событий, рассматриваемых на предыдущем уровне как точечные. В зависимости от того, когда мы останавливаемся, мы получаем то или иное приближенное описание непрерывного мира. Таких приближений мы можем сформулировать много. Они могут быть как частично независимыми, так и явным образом вложенными друг в друга. В том смысле, что точечные события следующего приближения явным образом могут рассматриваться как *части точечных* событий предыдущего приближения. До тех пор, пока мы не оказываемся вынуждены признать **принципиальную отделимость** получающихся на данном этапе событий. После этого нам приходится также

осознать, что для хорошего описания непрерывного мира у нас явно недостаточно средств. Всё, что нам в этом плане доступно, ограничивается набором **дискретных**, хотя и **явным образом связанных** событий. Связанных дуальными связями, связями причина-следствие.

Мы попытались пройти и обратный путь, от дискретных (но связанных) событий к описанию непрерывности с помощью построенных на их основе прототипов для масштабов. Этот путь позволил нам заострить внимание на нескольких весьма полезных вещах. Тех, которые мы уже положили в основание определения необходимых нам процедур измерения. Но один момент мог остаться при этом недостаточно акцентированным. Когда я вводил линейную цепочку событий в качестве прототипа масштаба времени, я опирался на схематическое представление различных возможных цепочек элементарных событий как самых простых возможных их объединений в сложные. Такой подход навязан нам тем, что самыми базовыми связями между событиями являются связи бинарные, причина-следствие. Отсюда и возникает представление именно о линейных цепочках событий как возможной основе описания мира. Но следует признать явно, что представление о цепочках отдельных событий тоже является идеей, логическим продолжением знания о том, что среди сложных событий посредством эксперимента мы можем выделить одно единственное элементарное, тем не менее находящееся со сложными в отношениях причина-следствие. Т.е. это идеальное продолжение фактического знания. Сами отдельные события как цепочку мы можем выделить на эксперименте только косвенно, как разные типы наблюдаемых в экспериментах событий. **Причём именно цепочку как целое, а не отдельные события, её составляющие.** У нас нет никакой реальной возможности нумеровать, считать или ещё каким-либо способом пометить все элементарные события, входящие в ту или иную возможную цепочку. Представление о цепочке элементарных событий это тоже идеализация. Идеализация, имеющая достаточно твёрдое основание в том, что мы приняли во внимание все

возможные бинарные связи между событиями. Других возможностей при ограничении бинарными связями нет. И всё равно мы должны признать, что такой подход является превышением наших реальных возможностей описания мира, продолжением нашего знания за пределы набора тех фактов, которые мы можем установить непосредственно с помощью эксперимента. В этом плане, для любой из цепочек событий мы можем с гарантией говорить только о двух элементарных событиях, которые в ней присутствуют — событие её начала и событие её конца.

Здесь я хочу сделать ещё одно замечание общего плана. Хотя мы отдельно сформулировали математическую идею “многообразия”, для физики самостоятельное применение этой идеи изначально бесплодно. Только более развитая идея, представление о пространстве с аффинной связностью может быть применена для описания мира. Причина в том, что мир, даже не весь, а только его часть, мы должны рассматривать как непрерывность, континуум. А прототипы масштабов, которые мир позволяет нам построить из событий явным образом не локальны. Для их определения требуются две выделенные в мире точки, а не одна. Для их локализации мы с помощью предельного перехода вводим идеализированный образ доступных нам соотношений между событиями. А значит и зависимость как прототипов, так и идеализированных масштабов (математической идеи “вектор”) от точки мира в физике обязательно должна присутствовать и, соответственно, должна быть описана. Поэтому я и веду речь именно об описании мира сразу пространством аффинной связности, а не пытаюсь сделать что-то на уровне многообразия.

Реальные процедуры измерения всегда базируются на сложных событиях. Единственными реальными для наших измерений цепочками только элементарных событий являются цепочки всего из двух событий. Мы их тоже включили в наши базовые процедуры измерений как один из основных элементов. С опорой на их свойства мы определяем условия на те масштабы, которые нужны для описания пространственной части мира. Естественно, основой, стержнем полноценного репера при этом являются

масштабы времени, определяемые такими цепочками сложных событий, в которых этих событий заведомо больше двух. Поэтому продолжать полноценно разбираться с непрерывностью, т.е. с понятиями поля, с понятиями, учитывающими возможность изменения наших масштабов при переходе от одной точки мира к другой нам придётся в том приближении, в котором события полагаются заполняющими траекторию существования масштаба **непрерывно**. И потом только смотреть как эти представления о полях будут проявляться и возможно видоизменяться в случае дискретных, отделимых элементарных событий.

Вполне понятно, что таких приближений, которые мы называем классическими, больше чем одно. Эти приближения будут, в первую очередь, характеризоваться тем, какие сложные события мы условимся считать точками, когда остановим процедуру деления сложных событий на более мелкие.

Чтобы правильно применять то или иное приближение на практике, необходимо иметь количественные критерии оценки их годности. Первое, что нам при этом нужно, это оценка именно “классичности” приближения. Оценка возможности описывать существование некоторой выделенной части мира непрерывным множеством. Для этого нам нужно уметь оценить количество элементарных событий в истории существования выбранной части мира. Это вполне возможно сделать даже с учётом того факта, что мы знаем, что считать сами элементарные события мы никогда не сможем.

В §3.4 первого тома этой книги [1] мы связали скалярный параметр  $s_0$ , пропорциональный числу событий на траектории массивной частицы, с физическим понятием “действие”. Пользуясь этим отождествлением мы можем оценить число событий на каждой такой траектории как  $2 \cdot s_0/h + 1$ . Наша минимальная “длина”  $h$ , превращающая дискретное количество событий в “длину” кусочка непрерывной линии, является не чем иным как хорошо известной постоянной Планка. Для целей оценки применимости представления о “классичности” приближения удобнее вместо значения действия использовать его выражение в систе-

ме покоя оцениваемой частицы, представляющее собой произведение массы (энергии) покоя на промежуток времени. Т.е. классическое выражение для действия в системе покоя  $s_0 = m_0 c^2 \cdot t$ .<sup>1</sup> Разделив вычисленное таким образом действие на значение постоянной Планка (в соответствующих единицах), получим оценку числа событий для частиц произвольной массы на заданном промежутке времени.

Для того, чтобы оценка была правильной, нам необходимо найти соотношения между обычно используемыми в физике единицами для длины, массы, энергии и их естественными единицами, выраженными через степени единицы времени. В качестве единицы времени выберем секунду.

В “Вводных главах” мы подробно обсудили, почему именно на единицу времени и на распространение света<sup>2</sup> мы опираемся при создании полноценного координатного описания области вблизи массивной частицы. “Естественная” единица длины  $1[l]$ , “пространственная секунда”, для всякой локально инерциальной системы координат может быть определена как расстояние, пройденное светом за время  $1[t]$ . При этом **принимаем**, что скорость света  $c$  одинакова во всех пространственных направлениях от нашего эталона времени, массивной частицы. Т.е., принимаем, что пространственные единицы **выбраны** одинаковыми во всех на-

<sup>1</sup>Коэффициент  $c^2$  введён здесь для того, чтобы в последующем у нас не возникало путаницы в обозначениях при соотнесении конкретных величин к тем единицам, в которых они измеряются. Действие и время в классическом приближении должны быть связаны коэффициентом, выраженным в единицах энергии. Я довольно часто допускаю жаргонные (хотя и общепринятые в физике выражения), говоря масса покоя тогда, когда правильно следует говорить энергия покоя. Это может привести к путанице. Вот чтобы этого не было, в дальнейшем обозначения  $m$ ,  $m_0$  будут подразумевать, что соответствующие числовые значения говорят об измерении этих величин в классических единицах массы — граммах, килограммах и т.д. Когда нужно применять единицы энергии такую массу я буду умножать на  $c^2$ . Самосогласованность таких обозначений проявится впоследствии, в процессе построения описания мира.

<sup>2</sup>То, что именно электромагнитным волнам соответствуют предельные цепочки всего из двух событий, мы увидим в дальнейшем. А пока примем это без доказательства.

правлениях. В этих единицах сама скорость света безразмерна и  $c=1$ . Ничто не мешает при заданной единице времени использовать произвольную единицу  $l$  (тоже одинаковую для разных направлений). Именно так мы и делаем, поскольку “естественная” пространственная единица практически для всех наших применений оказывается слишком большой. В этом случае постоянная  $c$  будет уже размерной и будет иметь какое-то значение, отличное от единицы. Единицы длины, даже если они нами выбраны отдельно от единицы времени, всё равно определяются нами посредством единицы времени. Из выше сказанного следует, что между “пространственной секундой” и произвольно выбранной единицей длины, например сантиметром, существует соотношение  $1[\text{сек}] = c \cdot [\text{см}]$ . Или  $1[\text{см}] = c^{-1}[\text{сек}]$ . Естественно, постоянная  $c$  должна быть взята в см/сек. Но в соотношение она входит уже как простое безразмерное число. Это соотношение между секундой и сантиметром может смутить — как так, приравниваются величины разных размерностей. Но в том то и дело, что мы говорим об измерении пространственных расстояний с помощью интервалов времени между событиями. Этот пересчёт я уже делал в символической форме в ([1], §3.11) так, чтобы проблем с пониманием получающихся размерностей не возникало. Приведу его снова здесь:

$$1[\text{см} \rightarrow \text{сек}] = \frac{1[\text{см}]}{c[\text{см}/\text{сек}]} \approx 1/3 \cdot 10^{-10}[\text{сек}]$$

Размерность действия в системе единиц {секунда, сантиметр, грамм} записывается как произведение  $[\text{г} \cdot \text{см}^2 / \text{сек}^2 \cdot \text{сек}]$ . Перейдём к набору единиц {секунда, грамм}, взяв в качестве “кусочка” действия  $h$ :

$$h[\text{г} \cdot \text{см}^2 / \text{сек}^2 \cdot \text{сек}] \rightarrow \frac{h}{c^2}[\text{г} \cdot \text{сек}]. \quad (1.1)$$

Всякая физическая величина при нашем способе описания может быть измерена только с помощью координатных масшта-

бов, т.е. длины и времени. А с учётом сказанного выше о единственности непосредственно реализуемого масштаба, только времени. Конечно, мы вправе *обозначить* любую величину каким-то термином и ввести её единицу измерения. Но эта единица окажется в *постоянном* отношении к базовой единице, в отношении аналогичном соотношению между единицами длины и времени. Следовательно, в нашем описании для соотношения между единицей массы (например, граммом) и единицей времени должна появиться постоянная, аналогичная постоянной  $c$ . Поскольку действие в нашем описании величина безразмерная<sup>3</sup>, то естественной единицей массы будет  $1 [t^{-1}]$ . Грамм, таким образом, тоже является не основной единицей.

Пусть соответствующей постоянной будет  $k$ . Если массу измерять в  $\text{сек}^{-1}$ , то  $k=1$ . Если массу измерять в граммах, то эта постоянная будет иметь некоторое не единичное размерное значение  $k [\text{г} \cdot \text{сек}]$ . Тогда  $1 \text{ г} = k^{-1} \text{сек}^{-1}$ . Соотношение аналогичное соотношению между сантиметром и секундой, только здесь естественной единицей массы является “обратная секунда” (масса — удельная величина!).

Естественный квант действия как безразмерной величины — единица (две пары последовательно связанных событий — три последовательных события — где промежутки в каждой паре по определению одинаковы и равны  $1/2$ ). В единицах {грамм, сантиметр, секунда} он имеет значение (полученное экспериментально!)

$$h = 6,626070040(81) \cdot 10^{-27} \text{эрг} \cdot \text{сек}$$

( $1 \text{ эрг} = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^2 / \text{сек}^2$ ). Тогда при пересчёте в естественные единицы получим

---

<sup>3</sup>Вообще говоря, размерностью действия можно было бы считать слово “событие”. Но это размерность **не координатная** — вместо “событий” или действия мы измеряем “длину” линий существования временем. Кроме того, действие по нашему определению тоже не эквивалентно в точности числу событий, т.к. действию мы приписываем свойство быть непрерывным, содержащим дискретную составляющую, и только эту составляющую и соотносим с событиями. Поэтому, с точки зрения преобразований координат, действие можно считать безразмерным.

$$\frac{h}{c^2} [\text{г} \cdot \text{сек}] \rightarrow \frac{h}{k \cdot c^2} [1] = 1[1]. \quad (1.2)$$

и  $k = h/c^2$  [г · сек]. Массе  $m_0$ , выраженной в граммах, соответствует масса (частота)  $\nu_0 = m_0 \cdot c^2/h$ , выраженная в обратных секундах. А из этой частоты, вспоминая связь действия и числа событий для некоторой цепочки событий ( $2 \cdot s_0/h + 1$ ), мы можем оценить **число событий, приходящихся на 1 секунду** для частицы с произвольной массой  $m_0$ :

$$N = 2\nu_0[\text{сек}^{-1}] \cdot 1[\text{сек}] + 1 = m_0 \cdot 2c^2/h \cdot 1[\text{сек}] + 1$$

Значения  $m_0$ ,  $c$ , и  $h$  следует брать в одной и той же системе единиц, {секунда, сантиметр, грамм}. Тогда коэффициент пересчёта массы  $m_0$  в граммах в соответствующее ей число событий на траектории материальной точки (т.е. полагаемой точкой в пространстве и линией в пространстве-времени), происходящих за секунду, будет приблизительно равен  $2.713 \cdot 10^{47} [\text{г}^{-1}]$ . Огромное число. Это число событий в секунду для материальной точки с массой в привычный нам 1 грамм. Маленькой такой массой.

Для самой лёгкой из элементарных частиц, для которой мы знаем её массу покоя, электрона,  $m_0 \approx 9.1 \cdot 10^{-28} [\text{г}]$ . Соответственно, число событий на линии его существования за секунду будет равно примерно  $2.47 \cdot 10^{20}$ . И это тоже очень много. Если мы интересуемся поведением электрона как целого на сравнимых с секундой интервалах времени, то имеем полное право полагать его траекторию непрерывной линией. Т.е. даже для электрона, если нам не нужно отслеживать отдельные события в его истории, можно во многих случаях применять “классическое” приближение. Это верно в ещё большей степени и для протона, имеющего массу покоя почти в 2000 раз большую массы электрона, не говоря уже о привычных нам “материальных точках” с массами порядка граммов и больше.

## 1.2 Возможное и реализуемое

В третьей главе первого тома этой книги [1] я старался как можно яснее указать те причины, которые заставляют нас выбрать излагаемые мной методы описания реального мира. Здесь я хочу снова вернуться к их обсуждению, заострив внимание на ряде аспектов, которые, я надеюсь, помогут лучше понять откуда берут начало и каким образом формируются самые базовые представления о свойствах вещества и физических полей.

Я всячески подчёркивал, что все полезные соотношения в теории нам следует формулировать в самом общем, **ковариантном** виде, справедливом для любых возможных способов описания мира (или некоторой его выделенной части). Так, чтобы можно было сопоставить результаты измерений любых наблюдателей, даже при самом экзотическом выборе процедуры измерений. Для произвольных, но допустимых координат, приписанных точкам мира как непрерывности, сопоставляющим этой части мира математическую идею “многообразия”. Но при этом я всегда старался также напомнить, что всякое описание мира числами относительно. В идеале для каждой его части оно всегда соответствует какой-то **одной системе координат**, какой-то одной процедуре измерения, создающей этот идеальный образ “многообразия”. И самое главное внимание было уделено тому, какие же возможности и ограничения наша принадлежность к реальному миру накладывает на доступные нам процедуры измерения и, соответственно, системы координат.

В этом томе нас в первую очередь будут интересовать способы описания того, **как меняются наши масштабы от точки к точке**, т.е. вид объекта связности как набора функций, зависящих от координат точки. Однако, сейчас я снова вернусь к обсуждению возможностей выбора системы масштабов в произвольной заданной точке, к вопросу уже достаточно подробно затронутому в первом томе, в особенности в §2.10. Причина этого и проста и фундаментальна.

Дело в том, что, несмотря на то, что преобразования координат в точке означают использование **разных** объектов, разных

частей мира в качестве масштабов, при переходе от точки к точке **возможности изменения одних и тех же объектов**, которые мы используем как масштабы в **разных** точках, **остаются теми же самыми, если их рассматривать с точки зрения групп преобразований**. Только параметры, выбирающие из группы конкретный экземпляр преобразования, связывающего масштабы в соседних точках будут сами функциями точки (координат).

Понять это достаточно легко, если принять во внимание, что

- В идеальном случае масштабы в соседних точках мы вполне можем рассматривать как **различные, предельно локализованные** (т.е. сведённые к бесконечно малой окрестности точки) объекты, части мира.
- Полная группа преобразований в точке описывает изменения в величинах масштабов и изменения их относительного положения. Никаких иных возможностей нет. Точно также никаких иных возможностей не может появиться и при переходе к соседней, бесконечно близкой точке. Только *сами изменения могут меняться* от точки к точке. А это описывается функциональной зависимостью преобразований от координат рассматриваемой точки.

Поэтому внимательное изучение всевозможных преобразований в точке позволит нам также понять и свойства поля аффинной связности. И всех иных тензорных полей, которые могут быть из него построены и поставлены, как идеализированные образы, в соответствие некоторым наборам реальных измерений. Хотя бы в идеале, как возможность в терминах математики. При этом нам стоит отмечать как ограничения на группы преобразований, наложенные нашим произвольным выбором, так и те ограничения, которые нам навязываются реальным миром, его свойствами. И стараться понять, могут ли те или иные преобразования рассматриваться нами как допустимые изменения в объекте связности формируемого нами описания мира как непрерывности.

Начну с выбора числа единиц измерения, и их идеальных образов, векторов в базисе. В том наборе идеальных масштабов, который мы приписываем каждой точке мира, чтобы получить её координаты. Довольно очевидно, что здесь имеется одно естественное ограничение — количество масштабов, необходимое для взаимно однозначного описания мира или его некоторой (непрерывной) части фиксировано как единственное число для всех точек мира. В нашем случае мы принимаем его равным четырём. Как факт, навязываемый известными нам свойствами мира. Причём эти четыре масштаба распадаются на **две принципиально разных группы**.

Один из масштабов, один из векторов базиса в любой точке мира является образом нашего способа измерения времени. Масштаб этот мы реализуем всегда непосредственно, как интервал между некоторыми выбранными событиями. Этому интервалу мы приписываем значение, величину “единица”. Вектором этот интервал становится в результате принятой нами идеализации, воображаемого завершения предельного перехода при оснащении каждой точки континуума таким масштабом. При этом предельном переходе величина масштаба остаётся фиксированной, равной единице по определению. Предельный переход понимается только именно как **приписывание этой (направленной от первого ко второму событию) единицы всем точкам непрерывности по отдельности, а не только парам выбранных базовых событий, как в реальном прототипе масштаба времени**. Выделение в любом базисе, приписанном точкам мира, одного единственного вектора как образа масштаба времени, **времени подобного вектора**, для нас обязательно. Это второе естественное ограничение на наш способ описания мира. И среди точек мира в этом смысле появляется неравноправие. В континууме обязаны быть отмечены линии **возможного** существования прообразов наших масштабов времени. А линии их реального существования должны явным образом отличаться от остальных точек непрерывности, которые мы тоже оснащаем такими масштабами как идеальное продолжение нашего

описания. Не потому, что там **всегда** действительно существуют масштабы времени (их прообразы), а **потому, что они нам нужны всюду для описания континуума и мы их всюду помещаем принудительно**. Хотя, в большинстве точек мира их в реальности нет, и мы знаем это точно. Наличие же реальных масштабов времени несомненно должно каким-то образом проявляться в свойствах объекта связности. Обсуждению нашего способа описания такого различия между точками континуума ниже будет посвящён специальный параграф (§1.4).

Три остальных масштаба в базисе определяются нами посредством специальной процедуры, которую я подробно рассматривал в третьей главе первого тома. И, естественно, ещё много раз затрону и здесь. Эти три масштаба служат нам для описания всех остальных точек континуума. Направления этих масштабов **не лежат** на линии существования того объекта, который выбран нами в качестве прототипа масштаба для измерения времени, они служат для описания **смещения с этой линии**. Т.е. прототипы этих векторов не лежат на линии, выбранной в качестве базовой линии времени, базовой цепочки событий. Не принадлежат той части мира которую мы используем как прототип существования временного масштаба. Эти масштабы имеют для нас двойственную природу.

С одной стороны, реализовать их (даже их прототипы) **непосредственно** для каждой точки континуума в произвольный, но фиксированный для всех точек мира (или его непрерывной части) момент времени, т.е. **одновременно всюду**, мы не можем принципиально. Поэтому они в определённой степени являются для нас **воображаемыми**. Мы знаем, что они нужны, но где их взять?

С другой стороны, мы вводим их всё-таки отнюдь не произвольно, а опираясь на свойства явно выделенных миром **пар событий**. Опираясь на инвариантную выделенность экстремального случая **двух связанных событий**, принадлежащих в то же самое время к двум разным цепочкам событий, каждая из которых включает в себя три или больше события, и поэтому

может служить прототипом времени. Вот эта, минимальная цепочка из двух таких событий, **связывающих** разные прототипы времени, сама по себе не позволяет нам ввести на её базе какой-либо прототип масштаба времени. Именно такие пары событий мы используем для приписывания точкам мира координат, дополнительных к времени. Мы вводим для этого некоторое удобное нам условие (классическую метрику), связывающее дополнительные координаты этих событий с их координатами времени. И называем такие координаты их пространственными координатами. При этом, естественно, оснащаем все точки мира дополнительно к вектору времени ещё и тремя пространственными векторами. Тремя образцами пространственных масштабов.

Вполне понятно, что в итоге у нас оказывается вовлечённым в описание довольно значительное количество *достаточно произвольно принятых нами соглашений*. Соглашения эти разного плана. Часть из них, хотя и принята произвольно, обязана выполняться всегда. Как в каждой точке, так и при переходе от точки к точке. Другая часть произвольна заметно больше — можно согласиться делать так, а можно этак, и не факт, что во всех точках мира такие соглашения обязаны выполняться. Среди этих соглашений будет неравноправие при переходе от точки к точке (т.е. они будут или не будут проявляться в объекте связности). Некоторые соглашения окажутся принятыми для всех точек мира сразу именно как необходимость для пространственной части базиса меняться от точки к точке с их строгим сохранением. А некоторые соглашения останутся только в описании системы координат, а функциональная зависимость коэффициентов связности от точки следовать им будет не обязана.

Так что же это за соглашения?

В первую очередь, это соглашение о нумерации векторов масштабов (т.е. координат) в базисе. Выбор номера для любого масштаба ведь совершенно произволен, и на общий итог, на описание, сформулированное для произвольных допустимых координат, влиять не должен. Это так, но определённое влияние всё-таки имеется. И вот какого сорта. Плохой выбор делает описание

искусственно усложнённым. В то время как вполне может иметься такой выбор системы координат, когда всё описание становится гораздо проще для понимания.

В том, что касается нумерации векторов в базисе, из уже выше сказанного следует, что пространственные координаты нам гораздо *удобнее собрать в единую группу по номерам*, а временной координате приписать либо первый, либо последний номер в полном четырёхмерном базисе. Что я уже собственно и делал в “Вводных главах”. Там, и далее везде, я связываю с измерением времени четвёртую координату,  $x^4$ . А первые три координаты будут всегда пространственными. Но нужно понимать при этом, что *таким образом мы сами убрали из рассмотрения очень много вполне допустимых описаний мира*, отличающихся от данного только нумерацией координат. Все они, кроме одного, в котором временная координата имеет первый номер, будут заметно сложнее для восприятия. Да и первый номер для времени тоже создаст в этом плане некоторые затруднения. Достаточно отметить, что при моём выборе сугубо пространственные преобразования индексируются группой чисел  $\{1,2,3\}$ , что вполне естественно. В противоположном случае придётся в качестве пространственных индексов использовать группу чисел  $\{2,3,4\}$ . А это уже выглядит довольно неудобно.

Самый главный вопрос: может ли то, что мы **совершенно произвольно** ограничили наше описание мира только частью возможных, повлиять на **полноценность** самого этого описания? Ответ достаточно очевиден. В том, что касается используемых систем координат — нет, не может. Даже в самом крайнем случае такого рода ограничения, если бы мы смогли создать полноценное описание **всего** мира с помощью **единственной глобальной** системы координат, то это было бы не только достаточно, но и превосходно. Вот только такое достижение совершенно невозможно.

Менее очевиден ответ на другой вопрос: а не должны ли мы учесть проявление в функциональной зависимости коэффициентов аффинной связности от точки континуума всех тех преобра-

зований координат в точке, которые мы волонтаристски исключили из нашего рассмотрения? Но и на этот вопрос можно дать вполне обнадеживающий ответ. Поскольку перенумерация координат обязана производиться глобально, для всей описываемой части мира, то на поведении тех или иных конкретных векторов масштабов при непрерывном смещении от точки к точке это сказываться не может. Поведение объекта не изменяется от принятого для этого объекта названия, ярлыка, а иных изменений в описании этого объекта не возникает. Так что всё, что может присутствовать в изменении векторов масштабов при смещениях от точки к точке будет содержаться в нашем искусственно ограниченном описании полностью. И нам этого вполне достаточно.

Ещё один момент, связанный с распадом вводимых нами координат для описания мира на две разные группы. Координаты являются числами. В каких соотношениях в нашем описании мира они могут появиться, заранее нам не известно. Поэтому сделать так, чтобы различие между временем и пространством в **любых** появляющихся в описании соотношениях отслеживалось бы автоматически, для нас весьма желательно. Именно поэтому я выбрал вслед за А.Пуанкаре и Г.Минковским для координаты, описывающей время, изображение мнимыми числами. Надо ясно понимать, что изначально это не более чем ярлык, призванный отслеживать отличие временной координаты от пространственных. Значение времени, приписываемое точкам континуума, остаётся при этом действительным числом, отношением к единице измерения времени. То, что действительные и мнимые числа далее объединяются в комплексные и свойства этих комплексных чисел позволяют нам с успехом описывать всевозможные преобразования координат так, что принципиальное различие между двумя видами координат сохраняется всегда, служит для нас обоснованием приемлемости нашего выбора для ярлыка времени. Да, можно это различие описывать и с помощью различия в знаках диагональных компонент метрического тензора в его нормализованной форме. Но такой подход сразу создаёт весьма серьёзные ограничения на наш выбор описания

мира. Ведь тогда метрический тензор должен иметься в описании обязательно. Должен существовать в каждой точке мира. А кто и что нам гарантирует это? Ведь всё, что у нас изначально есть — это события и связи между ними. И не факт, что информацию о событиях и связях можно полностью описать только метрическим тензором. Да, метрический тензор явно нам будет полезен, но отнюдь не как всеобщая, формирующая **всю** теорию структура. Поэтому для нас выбор мнимых чисел для координат, описывающих время, и действительных чисел для пространственных координат предпочтительнее изначальной опоры на метрический тензор.

Всё выше сказанное применимо для описания мира в любом приближении. Предметом этого тома являются классические приближения. Какие ограничения на возможное описание континуума накладывает выбор именно таких приближений?

Главное состоит в том, что во всех классических приближениях мы полагаем, что на линии существования вектора, описывающего единицу времени, события следуют друг за другом непрерывно. **Линия существования объекта, части мира, являющегося масштабом времени, непрерывна именно как последовательность событий.** Иных точек, отличных от событий, на линии существования такого классического объекта нет. Более того, подпространство существования всякого объекта, используемого нами в качестве масштаба времени, **одномерно.** Является именно линией в четырёхмерном континууме.

Это накладывает весьма сильные ограничения на совокупность допустимых описаний континуума, согласованных с этим нашим приближением. Ограничения не только на системы координат, приписанных всем точкам континуума, но и на возможность объектов изменяться от точки к точке. Т.е. на вид коэффициентов связности как функций точки мира.

Первое, и общее для всех классических приближений ограничение — касательный вектор вдоль траектории всякого объекта, с которым мы связываем линию времени (т.е. принимаем этот объект за масштаб времени) обязан быть **всюду** на траектории

времени подобным. Грубо говоря, должна существовать **система покоя**, в которой всюду на траектории этот вектор имеет не нулевой только временную компоненту, выраженную при этом чисто мнимым числом. Очевидно, что это ограничение именно на возможный вид объекта связности, как функций точки континуума. Ведь объект связности в этой области хотя бы частично формируется из производных таких векторов, масштабов.

Однако, в классических приближениях мы также теряем опору для определения систем покоя в виде **априорной равномерности появления событий на линии времени объекта, которая гарантируется принимаемой одинаковостью промежутков между этими событиями**. Принимаемой нами произвольно, но сделать это мы можем всегда, когда на непрерывной линии имеется дискретный набор выделенных точек.

В классических же приближениях события непрерывны, нет естественных промежутков, на которые можно опереться. Поэтому вместо счёта событий, рассматриваемого как признак системы покоя, мы опираемся на **постоянство внешней к свойствам самой непрерывной траектории величины** — массы покоя, выступающей заменой недоступной нам процедуры счёта отдельных событий. Масса покоя, исходя из наших ранее сделанных рассуждений — теоретических, но опирающихся на имеющиеся у нас экспериментальные факты — и представляет собой количество событий, случившихся в выбранную единицу времени. Но это знание для классических приближений внешнее, из них не выводимое. Ведь если начинать построение описания мира с классических понятий, то о происхождении массы покоя информацию получить просто невозможно.

**Нужно отдавать себе отчёт в том, что разорвав, хоть и вынужденно, связь массы покоя с числом событий на траектории, мы фактически вступили на зыбкий лёд, ведущий к представлению о вложенности физики в некое абстрактное пространство-время**. Ведь массы покоя, привязанные нами принудительно к тем или иным одномерным подпространствам полного четырёхмерного пространства-времени,

для его математического описания оказываются именно вложенными, внешними параметрами. Для определённых классических приближений такой подход окажется единственно возможным и вполне работоспособным. Однако, нам придётся быть очень осторожными при этом, чтобы не утратить окончательно связь с самыми базовыми нашими представлениями о том, как формируется описание мира. Каждый шаг в направлении рассмотрения пространства-времени как **вещающего** “абстрактного” математического пространства должен быть обозначен явно.

Второе ограничение провоцирует самые существенные различия уже внутри всевозможных классических приближений. Речь идёт о том, что пространственный размер временного масштаба мы всегда полагаем нулевым, т.е. в трёхмерном пространстве временной масштаб всегда является точкой. Из этого следует сингулярность той части связности, которая обусловлена только выделенным масштабом времени во всех классических приближениях. Подробнее об этом ниже, в отдельном параграфе (§1.4).

А сейчас я хочу обратить ваше внимание на то, что связности, появляющиеся в описании мира в разных классических приближениях, будут **разными** связностями. Сами описания будут разными экземплярами континуума, используемого для описания мира. Точки континуума, поставленного в соответствие миру в одном приближении, могут превращаться в других приближениях в области применяемых для описания мира континуумов. В ряде случаев между этими разными пространствами аффинной связности, между их связностями будет возможно провести соответствия по типу вложения или усреднения. Но в самом общем понимании это будут всё-таки разные, отдельные описания мира. А значит выводы, полученные в каком-то одном приближении, или даже нескольких приближениях, нельзя бездумно переносить на все остальные приближения. Ограничения на вид связности, используемой в каждом таком классическом описании могут отличаться значительно.

И ещё один момент необходимо снова подчеркнуть. Я думаю, что должно быть уже довольно ясно, что идея системы координат

нат, как способа описания континуума (его непрерывной части), в плане оснащения **каждой** точки описываемой части континуума полным набором векторов масштабов (полным репером, базисом) и полным набором соответствующих координат является для нас при описании мира (т.е. в физике) только желаемой (**и необходимой!**) возможностью и не может быть **никогда** реализована во всей её полноте. Только в тех или иных приближениях мы **принимаем** её реализацию осуществлённой. Да и то, практически всегда, с некоторой оставшейся степенью свободы. Поэтому, как в части системы координат, так и в части соответствующих связностей, мы будем далее постоянно возвращаться к этому вопросу. К выяснению того, какие стороны нашего описания мы можем считать надёжно установленными, а какие требуют либо уточнения, либо должны быть оставлены как “равно возможные”, ограниченные некоторыми условиями, но не до конца, а только до некоторой “группы” возможностей.

Хочу также определить сейчас термин “**пространство-время**” как синоним для всякого нашего описания мира (или его части) идеей континуума, снабжённого как полноценным набором систем допустимых систем координат (мир как многообразие), так и ассоциированным с каждой точкой континуума и с каждой системой координат полем коэффициентов (объекта) аффинной связности (мир как пространство аффинной связности). В дальнейшем я буду употреблять все эти термины как синонимы. Напомню, что соответствующие разным приближениям описания мира идеей пространства-времени будут в **общем случае разные**.

### 1.3 Вариационный принцип. Структурные тождества

К обсуждению тех или иных ограничений на допустимые системы координат и их влияния на возможные свойства коэффициентов аффинной связности в соответствующих описаниях континуума я буду возвращаться ещё неоднократно. В данный мо-

мент хочу обсудить некоторый весьма общий метод получения соотношений между структурами (тензорами), описывающими произвольный континуум. Акцент именно на тензорные поля я делаю потому, что только эти геометрические величины (тензоры и их плотности) мы теоретически можем получить как **однозначные** результаты измерений. Однозначные в том смысле, что определив их для одной процедуры измерений, мы автоматически получаем все их компоненты при переходе к любым другим процедурам измерения только на основе знания линейных соотношений между масштабами разных реперов в каждой точке мира. Речь пойдёт о вариационных принципах, применимых для описаний самого общего вида.

Напомню, что такие величины как скаляры могут существовать в описании любого континуума в разной форме. Скаляры могут быть определены на некотором дискретном множестве точек, вложенном в континуум. Они могут быть также определены как непрерывные поля на непрерывных же подпространствах, выделенных в данном континууме теми или иными условиями. Эти подпространства могут иметь от одного измерения до полного числа измерений рассматриваемого континуума. Что важно для нас? По самому своему определению все эти скаляры не должны зависеть от способа описания континуума с помощью координат. Они инвариантны, или другими словами **стационарны, не изменяются** при переходах от одной системы координат к другой. Для распределённых скаляров (для полей скаляров) это верно для всех точек, где они определены. В частности, если некоторый скаляр или его поле является зависящим от аффинной связности континуума, напрямую или через некоторые тензорные поля, в свою очередь определённые через связность и координаты, то можно утверждать, что при правильно сформулированных условиях такие скаляры обязаны оставаться неизменными (стационарными) не только при вариациях в системах координат, но также и при **регулярных** вариациях коэффициентов аффинной связности и их производных. Просто потому, что, как я уже отмечал в предыдущем параграфе, регулярные

вариации (изменения) в значениях связности как функций точки находятся во взаимно однозначном соответствии с изменениями систем координат в этих точках. Поэтому, если фиксированы границы пространства существования поля некоторого скаляра и вариации указанных выше полей, через которые скаляр определён, на этих границах отсутствуют (равны нулю), то сам скаляр остаётся неизменным при произвольных регулярных вариациях полей, от которых он зависит **внутри** подпространства своего существования.

В дальнейшем для нас будут представлять особый интерес два вида распределённых скаляров — линейный, определённый вдоль одномерной линии, и скаляр с единственным значением для некоторой выделенной области полного пространства-времени. Понятно, что и второй тип скаляра тоже в некотором смысле является распределённым, но уже не непрерывным, а набором дискретных значений, ассоциированных с каждой произвольно выделенной областью континуума. Почему наше внимание сосредотачивается на этих двух типах скаляров при описании оснований физики, я поясню ниже.

Сейчас же остановлюсь на втором типе, интегральном для “полномерной” области пространства аффинной связности скаляре. Причём пока с общей математической точки зрения, для скаляров, существующих во всех пространствах аффинной связности. И, более того, начну формулировку рассуждений с гораздо более широких позиций, позволяющих применить их при необходимости к описаниям чего бы то ни было другого, в которых имеется как неизменная компонента (скаляры), так и переменная компонента (“координаты”), позволяющая рассматривать описание с разных точек зрения.

Определим такой скаляр как интегральную функцию  $S(\phi^a, \phi_{,i}^a)$  некоторых переменных  $\phi^a$ , являющихся в свою очередь функциями “координат”  $\{x^i\}$ , и их производных по координатам  $\phi_{,i}(x^j) = \partial_i \phi(x^j)$ . В принципе, этими функциями могут быть и сами координаты, и их производные по какому либо скалярному параметру, а также градиенты этих скалярных параметров (на-

боры частных производных скаляров по координатам), т.е. величины удельные. Число  $N$  функций  $\phi^a$ , не обязано совпадать с числом “координат”  $n$ , “размерностью” пространства, в котором фиксируется область интегрирования. Естественно, при применении этой схемы рассуждений к описанию континуума идеей пространства аффинной связности, все кавычки здесь просто снимаются.

Запишем пока этот интеграл в виде

$$S(\phi^a, \phi_{,i}^a) = \int_V \mathcal{L}(\phi^a, \phi_{,i}^a) dV, \quad (1.3)$$

где  $S$  имеет параметры. По своему смыслу  $S$  это число, полученное в результате взятия определённого интеграла по некоторой выделенной области  $V$  рассматриваемого континуума, описываемого координатами  $\{x^i\}$  с локальной мерой  $dV = dx^1 \cdot dx^2 \dots dx^n$ . Но число это зависит от того, какие функции от координат в области  $V$  формируют подынтегральное выражение  $\mathcal{L}$ . Такого рода “функции” от функций в математике часто называют *функционалами*.

Такая запись мне служит для того, чтобы сделать очевидным применимость в нашем случае стандартной для вариационного исчисления процедуры определения тех функций  $\phi^a$ , которые являются *экстремальными* выписанного *функционала*  $S$ . Т.е. таких функций, на которых этот функционал имеет **локальный экстремум** (минимум, максимум или седловую точку), если рассматривать сами функции как независимые переменные, от которых зависит функционал. Тогда его производные по каждой из этих функций, от которых функционал зависит, на множестве экстремальных функций обращаются в нуль:  $\delta S(\phi^a) / \delta \phi^a = 0$ . При условии, что на границах области  $V$  вариации всех функций, от которых зависит функционал обращаются в нуль. Вычисляются такие, функциональные, производные по тем же самым правилам, как и обычные частные производные для функций. Вариация функции  $\delta \phi^a$  аналогична изменению независимой переменной  $dx^i$  для обычной функции. Отличие состоит в том, что

эта вариация применяется к *функции как целому, во всей области её определения  $V$  сразу.*

Я опускаю выкладки, с помощью которых вычисляются эти производные функционала. Они хорошо известны и приводят к уравнениям для определения экстремалей. Эти уравнения часто называют уравнениями Эйлера-Лагранжа, а саму функциональную производную (всю совокупность производных как целое) производной Лагранжа:

$$\frac{\delta S(\phi^a)}{\delta \phi^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \sum_i \partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,i}^a} \right) = 0. \quad (1.4)$$

Вариационное исчисление решает задачу нахождения таких экстремальных функций, которые делают сформированный тем или иным образом функционал *стационарным*, обеспечивают его экстремальное значение. Соотношения (1.4) при этом рассматриваются как **уравнения**, позволяющие определить вид нужных функций.

А теперь я запишу тот же самый функционал (1.3) для произвольного пространства аффинной связности и для произвольного **скаляра**  $S$ , получаемого интегрированием произвольной  $\Delta$ -плотности  $\mathcal{L}$ , сформированной из коэффициентов аффинной связности, напрямую или через те или иные тензоры, ею порожаемые<sup>4</sup>. Скаляра, получаемого интегрированием по произвольной же области континуума  $V$ .

$$S = \int_V \mathcal{L}(\Gamma_{jk}^i, \partial_l \Gamma_{jk}^i) dx^1 \dots dx^n \quad (1.5)$$

Вспомните выводы предыдущего параграфа и замечания в начале этого. Вариации в коэффициентах аффинной связности как функциях точки эквивалентны локальным изменениям в координатном описании континуума. И если область, хотя и произвольна, но **фиксирована** и на её границах вариаций нет, то

---

<sup>4</sup>Но не зависящей от координат напрямую. Этим гарантируется то, что  $\Delta$ -плотность характеризует именно связность, а не что-то иное.

скаляр как инвариант любых преобразований координат остаётся неизменным. **Всегда.** Это его определение.

Для таких функционалов соотношения (1.4) перестают быть уравнениями. Они становятся тождествами. **Структурными тождествами.** В том смысле, что выполняются для любого пространства аффинной связности и для любой его фиксированной области, а значит в **произвольной** точке пространства аффинной связности, поскольку являются локализованными соотношениями. Структурными их называют потому, что они являются следствием строения, *структуры* описывающих область функций. В данном случае являются следствием структуры объекта связности и порождённых им тензоров.

Можно сказать, что коэффициенты аффинной связности для любого континуума являются реализацией всех возможных общих экстремалей для всех возможных функционалов через них определяемых.<sup>5</sup>

Мы создаём наше описание мира пространством аффинной связности таким образом, чтобы действие было хотя бы пропорционально тем или иным скалярам, естественным именно для континуума, пространства аффинной связности. Или наоборот,

---

<sup>5</sup> Не стоит думать, что связь, имеющаяся между структурными тождествами в пространствах аффинной связности (и не только) и интегральными функционалами, производящими скаляры, является взаимно однозначной. Структурные тождества в этом смысле более фундаментальны, именно потому, что они **структурные**, являющиеся свойствами структуры. Их можно установить, используя только сами эти свойства, не апеллируя к чему-то ещё. Более того, различных структурных тождеств всегда имеется больше, чем может быть получено с помощью вариации функционалов. Однако, для нас при создании **физического** описания мира акцент именно на этом моменте важен. Он позволяет легче понять место в этом описании как широко известного **принципа минимальности (стационарности) действия**, так и место фундаментальных уравнений, которым подчиняются физические поля. А именно, позволяет увидеть, что эти уравнения являются всегда по своей сути структурными тождествами той связности, которая соответствует описанию континуума в выбранном приближении. Из-за того, что действие в нашем описании всегда является образом числа событий, на линии ли, или в выделенной области мира. Т.е. **необходимо неизменной, стационарной** чертой описания.

что точнее. Скаляры нашего описания должны быть либо самого общего вида (автоматически фиксированные для **всех возможных формулировок описания**), либо обязательно должны быть пропорциональны одной из главных наших опор в знаниях о мире — числу событий, или его непрерывному образу, действию.

Плотностей, для которых можно записать производные Лагранжа как тождественные соотношения, на любом пространстве аффинной связности имеется довольно много. Я остановлюсь только на части из них. С одной стороны хорошо известных, а с другой стороны исключительно важных для нашего описания мира идей пространства аффинной связности. Такого рода плотности я далее буду часто называть лагранжевыми.

В §2.12 первого тома я привёл выражения нескольких тензоров, существующих на любом пространстве с аффинной связностью и характеризующих её и только её. Основных таких тензоров два — полный тензор кривизны  $R^i_{jkl}$  и тензор кручения  $T^i_{jk}$ .

Чтобы не возвращаться каждый раз к первому тому, приведу здесь соотношения, связывающие эти тензоры с объектом аффинной связности снова:

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{jk} &= \bar{\Gamma}^i_{jk} + T^i_{jk}, \text{ где} \\ \bar{\Gamma}^i_{jk} &= \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}) \quad \text{и} \quad T^i_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь произвольная связность **инвариантно** разделена на две составляющих, симметричную связность  $\bar{\Gamma}^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{kj}$ , и антисимметричный **тензор** кручения,  $T^i_{jk} = -T^i_{kj}$ .

Заметьте. Приведённые выше соотношения для симметричной части связности и тензора кручения являются примером тех самых **структурных** тождеств, о которых шла речь выше. Структурных тождеств, не связанных с рассматриваемым нами здесь вариационным принципом. В полной структуре выделены некоторые части, удовлетворяющие именно **этим соотношениям**, справедливым **всюду** на рассматриваемом континууме и в любой системе координат.

Тензор кривизны выражается через коэффициенты аффинной связности и их производные следующим образом:

$$R^i_{jkl} = \partial_j \Gamma^i_{kl} - \partial_k \Gamma^i_{jl} + \Gamma^i_{jp} \Gamma^p_{kl} - \Gamma^i_{kp} \Gamma^p_{jl}. \quad (1.7)$$

Так как наш функционал по своему смыслу сформирован как интеграл по мере пространства аффинной связности, а само построение меры и всех связанных с ней плотностей осуществляется с обязательным участием процедуры *антисимметризации* или *альтернирования*, то, очевидно, что для построения функционалов нам следует обратить внимание именно на те тензоры, которые имеют соответствующие свойства. Т.е. являются антисимметричными по некоторым группам индексов. И тензор кручения, и тензор кривизны являются таковыми.<sup>6</sup>

Для получения структурных тождеств эти антисимметричные группы индексов, очевидно, должны быть ковариантными. Только в этом случае сформированная плотность, свёрнутая с мерой, порождает скаляр. Т.е. является скалярной плотностью веса +1. Операцию альтернирования для формирования скалярной плотности из тензора в ковариантной форме можно записать с помощью образа безразмерной единицы  $\mathcal{E}^{ij\dots k}$ , определённого для произвольного многообразия ([1], §2.11)

Из строения тензора кручения видно, что напрямую, только из компонент этого тензора, с помощью альтернирования получить **скалярную**  $\Delta$ -плотность не получится. Лишний контравариантный индекс необходимо свернуть ещё с каким-либо ковариантным тензором. А вот тензор кривизны позволяет сформировать сразу две плотности только из своих компонент. Хочу

---

<sup>6</sup>Симметричные группы индексов в тензорах тоже могут дать подходящие для интегрирования плотности. Но эти плотности, полученные с помощью вычисления определителей соответствующих матриц, будут иметь не подходящий (+1) вес, а будут квадратичными в этом смысле (вес равен +2). Так что нужную для построения функционала плотность придётся получать с помощью извлечения квадратного корня из определителя. Далее мы будем делать и это в процессе введения в описание мира метрического тензора. Но этот случай **не является общим для всех пространств аффинной связности.**

заметить, что случай четырёхмерного континуума оказывается особенным в этом смысле. Именно четыре измерения являются необходимым и достаточным условием того, что  $\Delta$ -плотности, сформированные из компонент тензора кривизны в точности соответствуют интегрированию по полноценному для континуума объёму. Для большего числа измерений их можно связать только с произвольными четырёхмерными подпространствами. А для меньшего они и вовсе не могут быть сформированы в таком виде.<sup>7</sup> Это чисто теоретическое замечание. Для нас случай  $n = 4$  находится в центре внимания как требование, соответствующее нашему опыту. Поэтому я далее привожу все соотношения именно для него.

С полным тензором кривизны связаны две приведённые ниже скалярные  $\Delta$ -плотности, квадратичные по его компонентам:

$$(a) \mathfrak{L} = \mathcal{E}^{ijkl} R_{ijt}^p R_{klp}^t, \quad (b) \mathfrak{F} = \mathcal{E}^{ijkl} F_{ij} F_{kl} \quad (1.8)$$

Здесь лишние индексы тензора кривизны свёрнуты в первом случае (a) перекрёстно, между его двумя разными экземплярами. В случае (b) свёртка сделана внутри каждого из вовлечённых в соотношение экземпляров тензора кривизны. По сути дела, эта плотность сформирована не для полной кривизны, а для её свёртки, которая, в свою очередь, тоже может быть представлена как инвариантная сумма нескольких других тензоров.

$$\begin{aligned} F_{jk} &= R_{jkp}^p = \partial_j \Gamma_k - \partial_k \Gamma_j = \bar{F}_{jk} + T_{jk}, \\ \bar{F}_{jk} &= \partial_j \bar{\Gamma}_k - \partial_k \bar{\Gamma}_j \quad \text{и} \quad T_{jk} = \partial_j T_k - \partial_k T_j, \end{aligned} \quad (1.9)$$

Должно быть ясно, что помимо плотностей (1.8) можно рассматривать и все остальные, содержащиеся в них инвариантно выделенные плотности. Но здесь я на этом специально останавливаться не буду.

---

<sup>7</sup>Заметьте, это касается только самих плотностей и принципа их стационарности при вариациях коэффициентов связности. Те же структурные тождества, которые мы из них получим, к числу измерений континуума не чувствительны. Они останутся справедливыми для любого числа измерений (ну, может быть, только  $n = 1$  следует исключить).

Известно, что любой антисимметричный по паре ковариантных (контравариантных) индексов тензор может быть представлен как антисимметричная по паре контравариантных (ковариантных) индексов  $\Delta$ -плотность тензора:

$$\begin{aligned} b_{ij} = -b_{ji} &\rightarrow \mathfrak{B}^{ij} = \mathcal{E}^{ijkl} b_{kl}, & \mathfrak{B}^{ik} b_{jk} = \delta_j^i \mathfrak{B} & \text{(вес 1)}, \\ b^{ij} = -b^{ji} &\rightarrow \mathfrak{B}_{ij} = \mathcal{E}_{ijkl} b^{kl}, & \mathfrak{B}_{ik} b^{jk} = \delta_i^j \mathfrak{B} & \text{(вес -1)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что плотности (1.8) сконструированы согласно этому правилу, которое применяется с аналогичным результатом к любому антисимметричному по паре индексов тензору. Имеется также возможность свернуть любой из этих тензоров с  $\Delta$ -плотностью любого другого, получая *смешанные* скалярные  $\Delta$ -плотности. Скалярные  $\Delta$ -плотности можно интегрировать по 4-объёму пространства с инвариантным результатом. Плотности вида (1.8) существуют, конечно, и на пространствах с любым числом измерений  $n > 4$ , но в этом случае они уже *не будут скалярными* плотностями, хотя их можно по-прежнему инвариантно интегрировать по любому 4-объёму.

Поскольку в дальнейшем нам понадобится и вторая свёртка тензора кривизны, тензор Риччи, я приведу здесь и все соотношения для него ([1]§2.12):

$$\begin{aligned} R_{kl} &= R_{ikl}^i = \partial_i \Gamma_{kl}^i - \partial_k \Gamma_{il}^i + \Gamma_{ip}^i \Gamma_{kl}^p - \Gamma_{kp}^i \Gamma_{il}^p & (1.10) \\ &= \bar{R}_{kl} + \bar{\nabla}_k T_l + \nabla_p T_{kl}^p - T_{kp}^i T_{il}^p \\ &= \bar{R}_{kl} + \bar{\nabla}_k T_l + \bar{\nabla}_p T_{kl}^p - T_p T_{kl}^p - T_{kp}^i T_{il}^p. \end{aligned}$$

Черта над знаком ковариантного дифференцирования означает что оно производится не с помощью полной связности, а в операцию вовлечена только её симметричная часть. Должно быть довольно ясно, что, поскольку разделение полной связности на симметричную и антисимметричную части инвариантно, то и такого рода операции тоже определены инвариантным образом для произвольной связности. В дальнейшем мы часто будем пользоваться таким приёмом. Будем выделять в полной связности нужную нам часть, описывающую те или иные соглашения. А

потом изучать следствия того, что полная связность отличается от той, которая находится во взаимно однозначном согласии с этими предположениями.

Две последние строки в (1.10) дают инвариантное представление тензора Риччи суммой нескольких тензоров. Имеется также другое инвариантное представление в виде суммы симметричной  $r_{kl}$  и антисимметричной  $a_{kl}$  частей:

$$R_{kl} = r_{kl} + a_{kl}, \quad \text{где} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} r_{kl} &= \frac{1}{2}(R_{kl} + R_{lk}) = \bar{r}_{kl} + \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_k T_l + \bar{\nabla}_l T_k) - T_{kp}^i T_{il}^p, \\ \bar{r}_{kl} &= \frac{1}{2}(\bar{R}_{kl} + \bar{R}_{lk}) = \bar{R}_{kl} + \frac{1}{2}\bar{F}_{kl} \quad \text{и} \quad (1.12) \\ a_{kl} &= \frac{1}{2}(R_{kl} - R_{lk}) = -\frac{1}{2}\bar{F}_{kl} + \frac{1}{2}T_{kl} + \bar{\nabla}_p T_{kl}^p - T_p T_{kl}^p \\ &= \nabla_p T_{kl}^p - \frac{1}{2}F_{kl}^*, \\ F_{kl}^* &= \partial_k \Gamma_l^* - \partial_l \Gamma_k^* = \bar{F}_{kl} - T_{kl}, \\ \Gamma_j^* &= \Gamma_{ij}^i = \bar{\Gamma}_j - T_j, \\ T_{kl} &= \partial_k T_l - \partial_l T_k. \end{aligned}$$

Полный тензор Риччи и его симметричная часть порождают скалярные  $\Delta$ -плотности веса 2, в которые их компоненты входят в четвёртой степени

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^2 &= \det \|R_{kl}\| = \frac{1}{4!} \mathcal{E}^{ijkl} \mathcal{E}^{mnpq} R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \quad \text{и} \\ \mathfrak{r}^2 &= \det \|r_{kl}\| = \frac{1}{4!} \mathcal{E}^{ijkl} \mathcal{E}^{mnpq} r_{im} r_{jn} r_{kp} r_{lq}. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Скалярные  $\Delta$ -плотности веса 1, которые можно интегрировать по 4-объёму можно получить, извлекая квадратный корень из этих плотностей.

Другие определённые ранее плотности, (1.8), тоже *могут быть переопределены* как определители. Только в их случае квадратный корень извлекается явно (для четырёх измерений) вследствие антисимметрии порождающих их тензоров.

Известно, что для *любого* двух-индексного ковариантного тензора  $b_{ik}$  определитель  $\mathfrak{B} = \det \|b_{ik}\|$  является скалярной  $\Delta$ -плотностью веса  $-2$ . Этот результат очевиден, если рассматривать такие тензоры как *матрицы*.<sup>8</sup> Там, где матрица такого тензора регулярна<sup>9</sup> (может быть обращена), т.е.  $\mathfrak{B} \neq 0$ , там существует регулярная  $\Delta$ -плотность соответствующего веса двух-индексного *контравариантного* тензора  $\mathfrak{B}^{ik}$ , который строится из миноров соответствующего определителя,  $\mathfrak{B}^{ik} = \partial \mathfrak{B} / \partial b_{ik}$ . Следовательно можно написать

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{ik} b_{jk} &= \delta_j^i \mathfrak{B} \quad \text{и} \quad b^{ik} b_{jk} = \delta_j^i, \quad \text{где} \\ b^{ik} &= \frac{1}{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}^{ik} = \partial \ln \mathfrak{B} / \partial b_{ik}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Это означает, что вместе с  $R_{kl}$  и  $r_{kl}$ , везде, где их матрицы регулярны, существуют также  $\mathfrak{R}^{kl}$ ,  $R^{kl}$  и  $\mathfrak{r}^{kl}$ ,  $r^{kl}$  со свойствами, описываемыми (1.14). То же касается и тензоров  $\bar{R}_{kl}$  и  $\bar{r}_{kl}$ .

Вернёмся теперь к основной теме этого параграфа. Лагранжева производная плотности (1.8а) даёт соотношения, известные как дифференциальные тождества Бианки (иногда их называют тождествами Бианки-Падова):

$$\mathcal{E}^{ijkl} \{ \nabla_j R_{kl}^m - 2T_{jk}^p R_{lpn}^m \} = 0. \quad (1.15)$$

Для полноты изложения приведу также и алгебраические тождества, справедливые для тензора кривизны<sup>10</sup>

$$\mathcal{E}^{ijkl} \{ R_{jkl}^m - 2\nabla_j T_{kl}^m + 4T_{jk}^p T_{pl}^m \} = 0. \quad (1.16)$$

Обратите внимание, что эти условия сформулированы для **тензорных**  $\Delta$ -плотностей, имеющих в случае (1.15) два контравари-

<sup>8</sup> $b_{i'k'} = \partial_{i'}^i \partial_{k'}^k b_{ik} \Rightarrow \mathfrak{B}' = \det b_{i'k'} = \Delta^{-2} \det b_{ik} = \Delta^{-2} \mathfrak{B}$ .

<sup>9</sup>Регулярность матрицы двух-индексного тензора отражает тот факт, что все его компоненты существенны, что нигде этот двух-индексный геометрический объект не вырождается в объект с меньшим числом индексов.

<sup>10</sup>Ещё раз подчеркну, что, несмотря на то, что здесь я подразумевал все выкладки (они достаточно просты, но я их не привожу, чтобы не загромождать текст) производящимися для  $n = 4$ , сами тождества справедливы для любого  $n > 1$ .

антных и один ковариантный индекс (производная скалярной  $\Delta$ -плотности по коэффициентам аффинной связности), и два контравариантных индекса для алгебраических тождеств (1.16).

Вместе с общими тождествами (1.15) существуют и их следствия, которые легко получить свёрткой какого-то из контравариантных индексов с ковариантным. Для нас интересна, в первую очередь, свёртка по индексам тензора кривизны. Таким образом, видим, что свёрнутый антисимметричный тензор кривизны  $F_{kl}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{ijkl} \{ \nabla_j F_{kl} - 2T_{jk}^p F_{lp} \} &= 0 \quad \text{и} \\ (a) \quad \mathcal{E}^{ijkl} \partial_j F_{kl} &= 0, \quad (b) \quad \mathcal{E}^{ijkl} \partial_j T_{kl} = 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Я привёл здесь отдельное тождество также и для той части полной свёртки, которая обусловлена наличием в связности кручения. Важно отметить, что это отдельный, инвариантно выделенный тензор. Заметьте, что эти тождества могут быть получены как из (1.15), так и вычислением лагранжевой производной второй плотности (1.8b), сформированной из тензора кривизны. Т.е. можно считать, что вариация второй плотности ничего нового не даёт по сравнению с вариацией первой. Однако такой взгляд не совсем хорош. Дело в том, что лагранжевы производные для **всех** возможных плотностей, будучи структурными тождествами, **обязаны** быть согласованы друг с другом по-отдельности и все вместе. И вполне естественно, что часть из них будет следствием каких-то более общих. Будучи, в то же время, вполне самостоятельными утверждениями о свойствах некоторой части полной связности (или полного тензора кривизны).

Из (1.15) следует также, что симметричная часть связности подчиняется условиям<sup>11</sup>

$$\mathcal{E}^{ijkl} \bar{\nabla}_j \bar{R}_{kln}^m = 0 \quad \text{и} \tag{1.18}$$

---

<sup>11</sup>Забегая вперёд, обращаю ваше внимание на то, что условия (1.17a,b) и (1.19) в точности совпадают с той частью уравнений Максвелла, которая не связана с источниками поля, если тензоры  $F_{kl}$ ,  $\bar{F}_{kl}$  или  $T_{kl}$  рассматривать как тензор напряжённостей электромагнитного поля.

$$\mathcal{E}^{ijkl}\bar{\nabla}_j\bar{F}_{kl} = \mathcal{E}^{ijkl}\partial_j\bar{F}_{kl} = 0. \quad (1.19)$$

Прежде чем завершить этот параграф, хочу обратить ваше внимание на следующий очень важный для нас момент. Всё, что здесь было сказано о производных Лагранжа для скалярных функционалов в пространствах аффинной связности верно в точности только при условии, что коэффициенты аффинной связности как функции координат являются обычными, **регулярными функциями**. И их производные тоже. Если имеются какие-либо сингулярности, то выводы о равенстве нулю лагранжевых производных остаются верными только там, где этих сингулярностей нет. А вот на подпространствах существования сингулярностей требуется их более аккуратное определение. В следующем параграфе я покажу, что в нашем описании мира появление сингулярностей в объекте аффинной связности неизбежно.

В этом томе главное внимание будет обращено на выяснение тех свойств аффинной связности, которые в физике интерпретируются как проявления **физических полей**. Делать это я буду методом, который похож на методы последовательных приближений. Сначала сконцентрируем внимание на определённых свойствах реперов масштабов, ограничившись только теми связностями, для которых эти свойства можно определить. И ограничившись также только теми процедурами измерений, которые связаны некоторыми, вполне определёнными группами преобразований. Группами, сохраняющими отмеченные свойства реперов. Потом будем снимать эти ограничения, переходя к всё более общим видам как связностей, так и допустимых процедур измерений. При этом ведущим принципом, позволяющим нам выяснять вид коэффициентов связности как функций точки в непрерывной области пространства-времени, будет принцип стационарности действия. Следовательно, описание вариаций объекта связности и производных от него тензоров будет иметь для нас большое значение. Поэтому я приведу здесь на будущее ряд полезных соотношений.

Первое, что нужно обязательно отметить, это то, что произвольная вариация любой связности  $\delta\Gamma_{jk}^i$  является тензором, т.к.

разность между двумя любыми связностями подчиняется именно тензорному закону преобразования:

$$\Gamma_{jk}^i \rightarrow \Gamma_{jk}^i + \delta\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \delta\bar{\Gamma}_{jk}^i + \delta T_{jk}^i. \quad (1.20)$$

В этом соотношении я подчеркнул также, что и тензор вариации связности можно инвариантным образом представить как сумму симметричного и антисимметричного по ковариантным индексам тензоров. А это означает, что вариации симметричной части связности и тензора кручения являются по сути своей **независимыми**. Следовательно, при применении принципа стационарности действия можно будет изучить влияние на результат различных частей связности по отдельности. Более того, в силу тензорного характера вариаций связности можно будет накладывать на них нужные нам дополнительные ограничения так, чтобы исследованию подлежали только связности из определённого подмножества возможных. При этом вариации в каждом таком подмножестве будут вполне произвольными, но при этом не выводимыми из этого множества. Т.е. можно ограничивать область определения возможных вариаций связности.

Далее, опять же в силу тензорного характера вариаций связности, их можно ковариантно дифференцировать. А это сразу позволяет нам определить и вариации, порождаемые ими в интересующих нас тензоре кривизны и его свёртках. Выпишем эти вариации:

$$\begin{aligned} \delta R_{jkl}^i &= \nabla_j \delta\Gamma_{kl}^i - \nabla_k \delta\Gamma_{jl}^i + (\Gamma_{jk}^p - \Gamma_{kj}^p) \delta\Gamma_{lp}^i = \\ &= \nabla_j \delta\Gamma_{kl}^i - \nabla_k \delta\Gamma_{jl}^i + T_{jk}^p \delta\Gamma_{lp}^i. \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\delta F_{jk} = \delta R_{jkl}^l = \nabla_j \delta\Gamma_k - \nabla_k \delta\Gamma_j \quad (1.22)$$

$$\delta R_{kl} = \delta R_{ikl}^i = \nabla_i \delta\Gamma_{kl}^i - \nabla_k \delta\Gamma_{il}^i + T_{ik}^p \delta\Gamma_{lp}^i. \quad (1.23)$$

Явный вид вариаций этих естественных для пространства-времени (и вообще для любых пространств аффинной связности) тензоров будет нам полезен как при упрощении выкладок, которые потребуются провести в следующей главе, так и при получении дополнительных, весьма полезных выводов о характере

связей между частями объекта связности и нашими предположениями о свойствах репера масштабов.

## 1.4 Сингулярности в объекте связности

Обсудим теперь условия, которым должен подчиняться объект аффинной связности во всех **классических** приближениях. На самом базовом уровне совокупность событий в некоторой области мира, в том числе и в тех подпространствах (линиях), которые мы ассоциируем с массивными частицами, должна быть представлена набором точек. Однако, *в классических приближениях мы принимаем совсем иной способ изображения событий*. Они все без исключения принадлежат подпространствам существования (одномерным линиям) каких-либо массивных частиц и при этом **заполняют их непрерывно**. А вот в окружающих эти линии областях пространства-времени событий нет вовсе.

Прототипы масштабов времени базируются только на линиях существования частиц, имеющих массу. В классических приближениях это линии существования материальных точек. И более ничего иного. Сами векторы масштабов времени, как идеальный предел локализованных прототипов, в классическом приближении естественным образом оказываются ассоциированы с **каждой** точкой непрерывной линии существования произвольной материальной точки. Иными словами, **всякая точка на такой линии** оснащена, по крайней мере, одним вектором, хотя бы одним масштабом. Масштабом времени. Единичным времени подобным (помним об отличии координаты времени от пространственных координат!) вектором.

Между касательным к траектории материальной точки (т.е. линии её существования) вектором и времени подобным единичным вектором масштаба имеется пропорциональность. С коэффициентом пропорциональности, возможно зависящим от точки на траектории, но обязательно безразмерным. Системы координат, в которых этот коэффициент пропорциональности от точки не зависит (является одной и той же постоянной всюду) **по**

**определению** являются системами покоя данной материальной точки.<sup>12</sup>

Сама допустимость зависимости этого коэффициента пропорциональности от точки на траектории связана с тем, что в классических приближениях траектория является непрерывной последовательностью событий и при определении системы покоя становится невозможным опираться на базовые тройки дискретных событий. Нет внутреннего критерия для определения одинаковости единицы времени для всей траектории как целого. Поэтому акцент переносится на этот коэффициент (на его постоянство) и, хотя это пока не очевидно, и будет разъяснено ниже, на постоянство ассоциированной с материальной точкой массы (энергии) покоя.

Остальные масштабы репера, как на траекториях массивных частиц, так и вне их, идеализированы в гораздо большей степени, чем масштаб времени. Как я уже писал в “Вводных главах”, они вводятся косвенным образом, базируются на **не локальных** соотношениях. Допускающих особое описание связанных пар событий на траекториях разных материальных точек. При локальном же рассмотрении описания мира в малых окрестностях траекторий материальных точек их введение, с одной стороны существенно упрощается — просто декларируется наличие “пространства с тремя координатами” вокруг каждой точки подпространства существования всякой массивной частицы. С другой стороны, эта декларация остаётся ничем ещё не подкреплённой. Условия, налагаемые нами на свойства векторов пространственной части базиса, даже на траекториях материальных точек, могут найти своё обоснование только при наличии развитого описания части мира как полноценной области в континууме, с помощью распределённых структур, связывающих точки на траекториях

---

<sup>12</sup>Чтобы коэффициент пропорциональности между касательным к траектории материальной точки вектором и масштабом времени был *постоянной* величиной, при его вычислении в качестве скалярного параметра необходимо использовать действие. Только действие (или его **линейная** функция) является заведомо правильным каноническим скалярным параметром на траектории материальной точки.

разных массивных частиц. Т.е. уже в не локальном виде. Поэтому, при построении описания с локальной точки зрения большинство таких условий будут выглядеть как постулаты, принимаемые изначально произвольно, но требующие в последующем полного их согласования с введёнными структурами. Конечно, когда я сейчас говорю о произвольности, не следует это утверждение понимать буквально. Основания для этих условий есть, и они обсуждены в первом томе этой книги. “Произвольность” здесь чисто формальная, в том смысле, что при локальном подходе основания для наших соглашений будут, по необходимости, оставаться “за кадром”. Ведь они принимают во внимание сугубо не локальные соотношения. Да, к тому же, становящиеся более понятными только *при выходе за рамки классических приближений*.

Какая же картина возникает как следствие этих фактов в описании континуума с точки зрения введения полноценной системы координат и объекта аффинной связности в окрестности каждой точки линии существования массивной частицы в **четырёхмерном пространстве-времени**? На линии имеется (существует) единичный (мнимо единичный) вектор масштаба времени, ассоциированный **именно с этой частицей**. А вне этой линии **его нет**. Да, мы как-то припишем полный базис векторов масштабов **всем** точкам четырёхмерного пространства-времени, содержащего эту частицу. Но! Вот этот, ассоциированный именно с ней вектор, **так и останется** существующим **только на одной линии**. Если не быть уж слишком дотошным в словах (ведь речь идёт всё же о векторе, а не скаляре, поэтому надо бы говорить о его компонентах), то можно сказать, что на этой линии он равен единице, а вне её — нулю, его нет. А что это означает с точки зрения определения его **изменения** при смещениях от точки к точке, даже бесконечно малых? Вдоль линии эти изменения вполне регулярны. Если система координат вдоль линии базируется именно на этом векторе, то и вовсе изменений нет, он постоянен. А вот при пространственных смещениях, при уходе с линии его существования, его производная становится

особенной, сингулярной. В любых системах координат. Поскольку дифференцировать приходится ступенчатую функцию. Здесь вот это “единица”, а сразу рядом, в бесконечно близкой точке — уже нуль. Конечное изменение при бесконечно малом смещении. А ведь коэффициенты связности введены нами именно как совокупность функций, описывающих **изменения** в векторах, которые мы можем использовать в качестве масштабов для создания систем координат. И это означает, что объекты связности в тех пространствах аффинной связности, которые мы будем использовать для описания реального мира в классических приближениях, обязаны отражать указанное нами свойство масштаба времени (и других структур, ассоциированных с каждой данной частицей тоже). Функции коэффициентов связности обязаны содержать в себе особенности, **сингулярности на каждой траектории какой-либо материальной точки**. А вне таких траекторий это регулярные, обычные функции. Эти сингулярные части можно назвать **главной частью** связности. Потому что именно эта часть связности и строится нами на основании реальных прототипов. *А всё остальное появляется как идеализация понятий, необходимая для согласованного описания непрерывности.*

Что же это такое — эти сингулярности? По определению, при **бесконечно малом** смещении с линии существования вектора масштаба времени в **любом пространственном** направлении изменение этого вектора будет **конечным**, от единицы к нулю. Соответственно, связность, чтобы обеспечить конечность изменения масштаба при бесконечно малом смещении, сама должна иметь бесконечное значение. Другими словами, значения соответствующей части коэффициентов связности должны стремиться к бесконечности при приближении к линии существования материальной точки “по пространственным направлениям”. Имея в виду, что для имеющей массу частицы, представляемой в соответствующем классическом приближении как точка в **трёхмерном** пространстве, все направления в этом пространстве равноправны, т.е. имеет место **сферическая симметрия**

в малой окрестности материальной точки и **единственной** значимой координатой в трёхмерном пространстве является только **расстояние** до неё, обозначаемое обычно радиусом  $r$ , мы получаем, что именно при стремлении этой величины к нулю соответствующие коэффициенты связности стремятся к бесконечности. Причём, вследствие конечности результирующего изменения вектора, в зависимости этих функций от радиуса всегда должна иметься составляющая, пропорциональная радиусу в минус первой степени.

Такого рода особенности в разного рода функциях математикой определяются обычно как **полюса** этих функций.

Из всего выше сказанного следует также, что для формирования нашего описания мира нам придётся несколько расширить понятие о функциях, которые нам для этого потребуются. В частности, для правильного описания векторов (и любых других структур), определённых только на выделенных подпространствах (часто только линиях) в полном, четырёхмерном пространстве-времени, нужно будет использовать функции специального типа, называемые **распределениями** или **обобщёнными** функциями [3],[4]. Примером такой функции, введённой П.Дираком, является так называемая  $\delta$ -функция<sup>13</sup>, обладающая следующими свойствами (я привожу определение для одной независимой переменной  $x$ ):

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0), \quad (1.24)$$

где  $f(x)$  произвольная обычная функция, непрерывно зависящая

---

<sup>13</sup>Символ  $\delta$  принято использовать для обозначения различных понятий или действий. Однако способы его использования таковы, что разночтений не должно возникнуть. Здесь вы встретите три основных формы — обозначение тензора Кронекера  $\delta_k^i$ , специальный тензор с двумя индексами, чисто диагональный с единицами на диагонали во всех системах координат; иногда то же самое, но с двумя контравариантными или ковариантными индексами,  $\delta^{ik}$  или  $\delta_{ik}$ , обозначение применяемое только для фиксированных систем координат; далее, обозначение для вариации (изменения) переменной или функции,  $\delta x, \delta f, \delta f(x), \delta S$  и т.д.; и обозначение  $\delta$ -функции, использующееся именно как символ специальной функции с аргументом в скобках.

от переменной  $x$ , не имеющая никаких особенностей в рассматриваемой области изменения  $x$ . В частности, это может быть просто постоянная, например, равная единице. Тогда приведённый выше интеграл описывает как раз наш случай, если в качестве переменной мы рассматриваем расстояние  $r$  до начала пространственной части системы координат, привязанной к материальной точке. Пределы интегрирования в этом определении, от минус бесконечности до плюс бесконечности, приняты для общности применения, поскольку свойства  $\delta$ -функции таковы (порождает нуль всюду, кроме одной точки), что в практических случаях можно всегда ограничиваться любыми конечными интервалами, включающими особую точку, нуль. Естественно, эта особая точка может иметь и произвольное положение, например  $x_0$ , достаточно записать нашу функцию в виде  $\delta(x - x_0)$ .

Если вы сравните определение  $\delta$ -функции (1.24) и определения (1.3,1.5) для интегрального скаляра общего вида, вариации которого производят структурные тождества, то несомненно увидите их родство. Их принадлежность к **функционалам**, функциям от функций. Только в определении  $\delta$ -функции явным образом присутствует её необычность, особенность, отсылающая нас к понятию бесконечности. Но если учесть на будущее, что связность, порождающая лагранжевы плотности в нашем описании не только может, но и обязана иметь сингулярности, то и функционалы вида (1.5) будут иметь свойства, аналогичные  $\delta$ -функции.

Хочу заметить, в нашем описании могут появиться и другие особенности в функциональных зависимостях разного типа геометрических объектов от координат. В частности, это может быть многозначность их значений. Например, легко и просто используемое нами в геометрии бесконечно малое смещение из точки, вектор  $dx^i$ , совмещает в себе **как общее понятие** и многозначность, и свойства распределения. Чтобы это осознать, достаточно заметить, что смещение **мы всегда подразумеваем вдоль некоторой линии, в одном каком-то направлении**. А во всякой точке этих направлений имеется бесконечно много.

И так просто мы с этим смещением обращаемся только потому, что во всех наших формулах **подразумеваем**, что из всего этого многообразия бесконечно малых смещений следует использовать только какое-то вполне конкретное, в некотором, выбранном направлении. Да, при записи формул подразумевается также, что направление может быть произвольным и все они равноправны. Это в математике. А вот в физике, ещё только начиная её формулировку, мы уже можем ясно видеть, что нам придётся учитывать возможное наличие особых направлений из рассматриваемой точки для правильного описания мира. Да и сами точки континуума, используемого для этого описания, тоже должны быть не все равноправны. Вот для описания этих свойств мира и служат распределения или обобщённые функции.

Ещё один существенный момент в отлучии нашего описания мира от привычного употребления аффинной связности в математике состоит в том, что обязательное наличие в объекте связности главной, сингулярной части добавляет в инвариантное разбиение связности на части (стандартно — только симметричная связность и тензор кручения) ещё две инвариантно выделяемые компоненты. Сама главная часть преобразуется всегда как тензор, а не как связность. Это легко видеть с формальной точки зрения — преобразования координат мы используем, как правило, только регулярные<sup>14</sup> и появляющиеся в законе преобразования связности вторые производные одних координат по другим будут регулярными, и, соответственно, должны включаться всегда в регулярную часть связности. И с неформальной точки зрения должно быть очевидно, что сингулярности в связности привязаны к конкретным объектам, одному или нескольким выделенным в пространстве-времени векторам. А значит являются изображением специфических измерений всегда только этих объектов. И уже поэтому их преобразования должны подчиняться тензорному закону.

---

<sup>14</sup>При переходе к сингулярным координатам возникающие сингулярности в преобразованиях и самих координатах мы **всегда** отслеживаем как искусственные и обрабатываем их специальным образом.

Главная часть, как и полная связность, может быть и сама разделена инвариантно на две части, в соответствии со свойством наличия симметрии или антисимметрии по паре ковариантных индексов. Так что можно говорить о двух тензорах главной части, симметричном и тензоре кручения в любой связности, подходящей для описания нашего мира. Естественно, последнее замечание к описанию мира может быть применено в той степени, в какой в этом описании появится тензор кручения. Далее будет видно, что учитывать поле кручения для описания мира нам действительно потребуется.

То, что главная часть в связности является тензором, накладывает свой отпечаток на многие черты нашего описания мира. Одно из важнейших следствий, которое мы подробнее рассмотрим в третьей главе, касается геодезичности траектории любой классической массивной (точечной) частицы. Легко видеть, что такая траектория обязана быть геодезической и в полной связности, и в регулярной части связности. Подчеркиваю, **траектория любой массивной частицы является геодезической и в полной связности, и только во внешней для этой частицы части связности**. Иными словами это утверждение можно обозначить как отсутствие “самодействия”.

Из этого свойства следует также весьма важная для нас возможность. Мы можем ввести и употреблять понятие “пробной частицы”. Частицы, которую “можно внести в поле связности”, чтобы изучить действие этого поля на локальные масштабы, **связанные с этой, конкретной пробной частицей**. Полагая при этом, что само “внесение” не изменит изучаемого поля связности. Не изменит описания области, полученного распространением локальной системы координат с траектории выделенной базовой частицы на всю область. Сформированной таким образом системы координат во всей области вместе с распределённым в этом континууме полем связности. Это требуется для того, чтобы можно было понять, как поле это, полученное распространением свойств некоторой системы масштабов на остальную область, влияет на поведение локального масштаба в произвольной точке

этой области. При этом подразумевается, что все локальные масштабы **должны быть согласованы** именно введением этого поля связности с базовым репером, т.е. с системой координат области. Именно геодезичность траектории пробной частицы становится критерием достижения такого согласия, “правильного” выбора связности. Если траектория является геодезической во внешней связности — значит согласие имеется. Если нет — связность, описывающая изменение репера масштабов в области не соответствует реальности, её нужно модифицировать так, чтобы траектория пробной частицы стала геодезической.

## 1.5 Свойства $\delta$ -функции в физике

В предыдущем параграфе мы расширили представление о возможном поведении функций, нашего способа описания зависимостей одних переменных от других. Мы стали говорить об обобщённых функциях, распределениях. И среди них главной для нас будет  $\delta$ -функция. Определение у нас записано — (1.24), и это определение довольно странное, с помощью интегрирования других функций. Почему так? Зачем нам нужно определять какую-то функцию таким странным образом?

Дело в том, что  $\delta$ -функция представляет собой яркий (и для нас важнейший) пример идеи совершенно противоположной тем идеям, с помощью которых мы провели дорожку к описанию непрерывностей с помощью последовательностей дискретных соотношений. Там мы шли от дискретного к непрерывному, вводя понятие предела бесконечной последовательности. Казалось бы, и чего не хватает нам для описания особенностей в функциях непрерывного аргумента? Например, функция  $f(x) = x^{-1}$  вполне себе обычная для нас. Ну стремится она при приближении аргумента  $x$  к нулю в бесконечность. Так это вполне хорошо описывается как раз с помощью понятия предела. Зачем ещё что-то?

А вот вам совсем простая и обычная ситуация. Функция, равная нулю **всюду, кроме нуля**. А в нуле равная чему-нибудь

конечному, единице, например. Вычислите её градиент. Зачем такая функция? Одно единственное событие на промежутке существования частицы от  $t_1$  до  $t_2$ . Или в пространстве — всюду пусто, а в некоторой точке что-то есть. Слева — чистый нуль, во всех возможных производных. Справа тоже. А через место отличия функции от нуля предельными переходами не перебраться. Никак. Не приспособлены они для этого. Не работают методы вычисления производных напрямую. А пример очень простой. И с помощью интеграла по интервалу независимой переменной решается также просто. Любой интеграл, включающий значимую точку обязан давать значение этой функции в ней. Согласно здравому смыслу это так. И если точек таких будет несколько, то сумму значений в них. Так записанный интеграл считает (с дополнительными возможностями, конечно) особые точки. Принимает во внимание только их дискретный набор. **Описывает дискретное множество с точки зрения содержащей это множество непрерывности.**

В нашем описании мира мы распространяем знание с дискретного множества событий на континуум пространства-времени, так как знаем о наличии связей между событиями. Но и обратный путь нам остро необходим. Для привязки всех возможных описаний континуума к доступной для нашего опыта информации нам требуется гарантированно поместить именно дискретную составляющую нашего знания в функции непрерывные, в функции точки континуума. И возможно это только как связь чего-то привязанного именно к области, не точке — отсюда интеграл — с дискретной компонентой описания, событиями, привязанными именно к точкам. В точности так для квантовых приближений, и с малой модификацией для классических приближений. Здесь, как мы уже видели, дискретность “половинчатая” — на линиях существования массивных частиц мы рассматриваем не события, а их непрерывный образ, действие. Но ведь остаётся ещё пространственная часть в описании мира как континуума. Вот в этой части дискретность действия уже проявляется в полной мере. Поэтому  $\delta$ -функция в этом томе будет

использоваться только для описания дискретности мира именно в его пространственной части.

Я не хочу вдаваться подробно в чисто математические свойства  $\delta$ -функции. Достаточно отметить, что такие функции можно складывать. При определённой осторожности можно и умножать. Но вот, например, брать производную функционала, содержащего такую функцию нужно уже очень осторожно. По обычным, регулярным функциям — без проблем. А вот там, где имеют место особые точки, даже как особые точки обычных функций, и уж тем более выделенные присутствием  $\delta$ -функции, там эти производные нужно определять отдельно.

Для нас важнее обсудить здесь вот какой вопрос. Нам необходимо определить **размерность, вносимую  $\delta$ -функцией в записанные с её помощью соотношения**. Ведь все числа в нашем описании мира, в физике, являются числами чего-то, т.е. размерными. Кроме специально очерченного круга “стандартных” функций и “стандартных” чисел, применимых именно как некоторый неизменный стандарт в разных, но всегда вполне определённых ситуациях. Хотя и  $\delta$ -функция является тоже одной из “стандартных”, но по отношению к размерностям мы её используем иначе, чем “обычные” безразмерные “стандартные” функции. Из определения  $\delta$ -функции следует, что ей нужно приписывать **размерность её аргумента в минус первой степени**. Именно потому, что она входит как подынтегральный весовой множитель в “стандартный” интеграл. Т.е. её размерность должна компенсировать размерность переменной интегрирования. Таким образом, эта функция является удельной, обратной линейной по отношению к той переменной, по которой берётся интеграл. Её физический смысл в одномерном случае аналогичен смыслу градиента “скаляра”, только “сосредоточенного в точке”. При интегрировании такого “градиента” восстанавливается не вся функция, а только её значение в выделенной точке.

Если рассматривать применение  $\delta$ -функции к пространству больше чем одного измерения, то это может быть сделано простейшим способом. Если речь идёт о единственной точке, вы-

деленной этой функцией, то в регулярных координатах следует взять произведение стольких  $\delta$ -функций, сколько измерений имеет пространство, содержащее **выделенную точку**. Причём, обязательно для каждого измерения отдельно от других. В этом случае должно быть достаточно очевидно, что такое произведение нужно рассматривать как  $\Delta$ -плотность с соответствующими размерностями. Это строго применимо для всех регулярных систем координат.

В случае сингулярных координат, особенно в весьма важном для нас случае полярных сферических координат в пространственной части пространства-времени, ситуация немного изменяется. Дело в том, что такая система координат фактически является реализацией всего лишь **двумерной существенной части описания мира, имеющего большее количество измерений**. В пространственной части существенным является только одно измерение, то, которое возникает как описание **несовпадения двух событий**. Возможно и необходимо это вследствие бинарности связей между событиями, связей причина-следствие. Остальные **пространственные** измерения остаются при этом не определёнными до конца, как совокупность возможностей. Поэтому в полярных сферических координатах им соответствует описание **стандартными** угловыми функциями ( $\sin$ ,  $\cos$  и т.д.), а размерности эти угловые координаты приобретают только в дополнительных конструкциях, типа метрики. Поэтому для таких координат  $\delta$ -функция применяется только к значимой координате, радиусу, расстоянию между точками, изображающими события (реальные или возможные, не важно). Стандартная же часть должна сразу заменяться интегралом, учитывающим все возможности для углов принимать те или иные значения, описывающие **направление** линии, соответствующей существенной координате в общем (в нашем случае трёхмерном) пространстве. Для трёхмерного пространства этот “стандартный объём” равен  $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 4\pi$ . Естественно, приведение результатов интегрирования к правильным размерностям при этом происходит за счёт добавления нужных коэффициентов, обеспечивающих

ся существенной координатой. В полярных сферических координатах этот коэффициент вводится через метрическую плотность (“метрический объём”, в данном случае “площадь” двумерной области), и, как известно, равен  $r^2$ . Этот коэффициент возвращает размерности стандартным безразмерным угловым координатам и превращает при интегрировании “стандартный объём” уже трёхмерной области со “стандартной площадью”  $4\pi$  в объём шара произвольного, но заданного радиуса. Естественно, стандартного шара, в котором все точки его границы отстоят от центра на равное расстояние. Равенство гарантируется именно **стандартизованностью описания**, выделением одной координаты как особенной. В этом и состоит особенность, сингулярность таких систем координат. В связи с тем, что в таких координатах вместо произведения трёх  $\delta$ -функций используется всего одна, зависящая от единственной существенной координаты, радиуса, а “стандартная” часть объёма заменяется стандартным числом  $4\pi$ , правильный учёт геометрического смысла  $\delta(r)$  и её размерностей несколько усложняется. В зависимости от места коэффициента  $4\pi$ , перед этой функцией, или если он стоит в знаменателе выражения, которому эта функция приравнена, следует полагать её либо полной плотностью, имеющей размерность  $[x^1]^{-1}[x^2]^{-1}[x^3]^{-1}$ , либо “одномерной”, с соответствующей размерностью  $r^{-1}$ .

В этих координатах  $\delta$ -функции можно с успехом поставить в соответствие некоторый дифференциальный оператор, действующий и на вполне обычные функции. А самому этому оператору ставится в соответствие специальная **функция Грина**<sup>15</sup>, в на-

<sup>15</sup>Функции Грина, как ещё один стандартный метод математики, имеют широчайшее применение при решении краевых задач для самых различных дифференциальных уравнений. И в чистой математике, и, особенно, в физике. Эти функции позволяют формулировать решения таких задач **в интегральном виде**. Как простой интеграл определяет первообразную по её производной, так интеграл от функции, к которой уравнением приравнивается линейный дифференциальный оператор, взятый с множителем в виде соответствующей оператору функции Грина, определяет “первообразную” этого оператора. Т.е. функцию Грина любого дифференциального оператора можно рассматривать как “обратный интегральный” оператор.

шем случае регулярная всюду, кроме одной точки, соответствующей значению радиуса, равного нулю. Причём особенность этой функции вполне поддаётся изучению с помощью понятия предела. Это функция  $f(r) = \frac{1}{r}$ , взятая с некоторым постоянным коэффициентом. Этот дифференциальный оператор обычно называют дивергенцией (расходимостью). Заметьте, этим названием явным образом акцентируется внимание на **возможном наличии особенностей, сингулярностей**.

Полноценное геометрическое определение для оператора дивергенции в произвольных координатах и произвольных пространствах аффинной связности возможно только для тензоров и тензорных плотностей, имеющих хотя бы один контравариантный индекс, т.к. формулируется его определение как свёртка дифференцирования (обычного, или ковариантного) с этим индексом. Например,  $\partial_j P^j$ ,  $\partial_j T^{jk}$ ,  $\nabla_j T^{jk}$  и т.д. Естественно, результатом будет геометрический объект с тем количеством индексов, которое останется не погашенным свёрткой.

Оператор этот (точнее, группа взаимосвязанных операторов) первоначально был определён в рамках геометрии Евклида многомерных пространств [7],[8]. С помощью этих операторов были сформулированы известные формулы (Гаусса, Остроградского, Стокса, Грина; часто используются и иные наименования для некоторых специфических случаев), описывающие связи между дифференциальным и интегральным исчислениями для большинства практически важных случаев. Естественно, и ситуации, в которых проявляются и требуются свойства  $\delta$ -функции тоже входят в их число.

Чтобы не вдаваться в обширную математическую теорию вопроса (созданную, кстати, именно для нужд физики), я кратко представлю вид нужного мне в этой книге оператора в декартовых (ортонормальных) координатах, т.е. регулярных, а по-

---

Кроме того, формализм функций Грина в очень большой степени аналогичен формализму решения систем обыкновенных линейных уравнений, использующему вычисление определителей матриц коэффициентов в системах уравнений. Что, как мы уже знаем, жёстко связано с понятиями линейной независимости, объёмов и плотностей. И с понятием числа измерений.

том запишу его вид в сингулярных, полярных сферических координатах для пространственной части описания пространства-времени.

Для произвольной *скалярной* функции нескольких координат  $f(x^i)$  в декартовых координатах определён оператор

$$\nabla^2 = \sum_j \partial_j^2 \Rightarrow \nabla^2 f(x^i) = \sum_j \partial_j^2 f(x^i). \quad (1.25)$$

**Не путайте этот оператор (всегда имеющий вторую степень как особый признак) с оператором ковариантного дифференцирования!**

Такой простой вид применим только в декартовых координатах в евклидовом пространстве. Для более общих координат этот оператор записывают (только в пространствах, снабженных метрикой) с помощью метрического тензора:

$$\nabla^2 f(x^i) = \frac{1}{g} \partial_j (g g^{jk} \partial_k f(x^i)). \quad (1.26)$$

Как видно из этого определения, результат действия этого оператора (часто называемого оператором Лапласа, или просто лапласианом) на скалярную функцию является, вообще говоря, скаляром, т.к. выражается он в метрических пространствах полностью ковариантным образом.<sup>16</sup> Простой вид (1.25) очевиден, если вспомнить, что в декартовых координатах все компоненты метрики, в обеих её формах, равны единицам. Определитель тоже равен единице, а все размерности взаимно сокращаются из-за ковариантного вида записи формулы для этого оператора.

<sup>16</sup> Напоминаю, что при последовательном ковариантном рассмотрении метрических пространств, компоненты метрического тензора являются размерными величинами. Здесь мы часто используем **стандартизованную** метрику, компоненты которой могут рассматриваться как безразмерные величины. Такая трактовка может создать сложности с пониманием правильных размерностей используемых величин. В частности, в стандартизованном случае скаляр, производимый действием лапласиана на скаляр имеет размерность обратного квадрата расстояния и, вообще говоря, скаляром считаться вроде бы не должен. Но именно в случае использования стандартизованной метрики квадрат расстояния **принудительно** становится скаляром. Подробнее об этом будет написано ниже.

Метрический тензор в общей формуле появился потому, что градиент скаляра имеет ковариантные индексы и второй раз применить к нему операцию дифференцирования, совмещённую со свёрткой, можно только после подъёма индекса умножением на метрический тензор. Таким образом, то, что оператор Лапласа называется дивергенцией, вполне оправдано, поскольку здесь действительно имеет место дифференцирование тензора, имеющего контравариантный индекс (пусть и полученного ранее тоже с помощью дифференцирования) с последующей свёрткой.  $\Delta$ -плотность  $\mathbf{g}$  присутствует по другой причине. Она требуется для правильного отслеживания изменения локального объёма в произвольных криволинейных координатах.

В полярных сферических координатах, введённых в области трёхмерного метрического пространства, и для скалярных функций, зависящих *только от радиуса*, т.е. во всех сферически симметричных случаях, оператор (1.26) можно записать в упрощённой форме

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} f(r) \right). \quad (1.27)$$

Компоненты метрического тензора в этой системе координат можно посмотреть ниже (2.47).

Функция Грина  $\mathbf{G}(x, y)$  для произвольного линейного дифференциального оператора  $\mathbf{L}$  в случае одной переменной определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{G}(x, y) &= \delta(x - y) & (1.28) \\ \mathbf{L}u(x) = f(x) &\quad \Rightarrow \quad u(x) = \int f(y)\mathbf{G}(x, y)dy. \end{aligned}$$

Т.е. функция Грина это функция, сингулярность которой такова, что применение к ней заданного линейного дифференциального оператора даёт  $\delta$ -функцию. Поэтому функция Грина может быть использована для **по-точечного** восстановления решения дифференциальных уравнений, в которых фигурирует именно этот линейный дифференциальный оператор.

По определению, и  $\delta$ -функция, и функция Грина симметричны, т.е. замена  $x \leftrightarrow y$  не меняет соотношений. Роль функций Грина для решения дифференциальных уравнений трудно переоценить. Если такую функцию удастся найти для некоторого оператора, то решение в интегральной форме можно сразу определить для уравнения, записанного через этот оператор с произвольной непрерывной (кусочно-непрерывной) правой частью. По сути дела, всякая функция Грина является **ядром** интегрального оператора, обратного соответствующему ей дифференциальному оператору. Свойство это довольно легко понять, если учесть определение  $\delta$ -функции. По сути дела, функция Грина “применяет”  $\delta$ -функцию как ядро обратного оператора к области интегрирования “по-точечно”, восстанавливая таким образом значения “продифференцированной” (с помощью оператора) исходной функции в каждой точке.

Для оператора Лапласа (1.26,1.27) в трёхмерном пространстве функцией Грина является функция

$$\mathbf{G}(r, 0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}. \quad (1.29)$$

Коэффициент перед  $\frac{1}{r}$  появляется из-за реальной трёхмерности пространства при эффективном учёте в решении только одной, существенной координаты.  $4\pi$  в знаменателе соответствует “стандартному объёму” части пространства, описываемой угловыми координатами (как я уже упоминал выше), а знак минус соответствует зависимости от единственной существенной координаты в минус первой степени.

**Важно!** Функция Грина (1.29) является “стандартной” безразмерной функцией. При использовании размерных аргументов их следует гасить соответствующими размерностями, написанными стандартному единичному множителю. В трёхмерном случае это может быть как размерность радиуса, так и размерность, соответствующая размерности полного трёхмерного объёма, принимая во внимание также и размерность стандартного объёма  $4\pi$ .

Оператор Лапласа, применённый к своей функции Грина, даёт  $\delta$ -функцию, удельную величину.

Таким образом, вместо функции  $\delta(r)$  при необходимости (например, когда нужно получить функциональную зависимость *вдали* от особой точки  $r = 0$ ) можно использовать любую из форм в левой части следующего соотношения:

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \right) = \delta(r). \quad (1.30)$$

Для нас это очень полезное соотношение, которым мы будем пользоваться в ряде важнейших случаев.

Более того, далее мы увидим, что именно опираясь на **стандартизованную** форму оператора Лапласа и её свойства, мы вводим все основные стандартизованные, **выбранные специально для нашего удобства в описании мира**, соотношения между масштабом времени, реализуемым нами на основе прототипа из последовательности событий, и пространственными масштабами, которые мы тоже привязываем к определённому физическому явлению, описывающему особенные, чисто бинарные связи между событиями, распространению в пространстве-времени света, электромагнитных волн. Притом, что, вообще говоря, в отличие от выбора масштаба времени, наша свобода в выборе пространственных масштабов ограничена гораздо меньше.

Именно это является основной причиной того, что я специально остановился на чисто математических, идеализированных аспектах описания свойств оператора Лапласа и его функции Грина здесь.

## 1.6 Некоторые сведения из теории групп

Далее вы многократно можете встретить и уже часто встречали упоминание понятия “группа”. В обычном языке под этим словом понимается некоторое множество “элементов”, объединённых каким-то общим свойством, признаком. Не особенно важно каким. Например, группа школьников из одного класса.

В математике это понятие формализовано более жёстко. Здесь это **непустое** множество  $\{g\}$ , в котором для **любых** двух его элементов  $g_i, g_k$  определена “**групповая операция**”, результатом которой снова **является элемент из того же самого множества**. Обычно эту операцию называют “умножением”.<sup>17</sup> Обозначают “умножение” элементов группы часто с помощью символов “ $*$ ” или “ $\times$ ”. Бывают и другие обозначения. На операцию эту накладывается дополнительное условие — она обязана быть **ассоциативной** — т.е., если в неё вовлекаются **последовательно** три элемента группы, то должно быть справедливо следующее соотношение:  $g_1 * g_2 * g_3 = (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ . На элементы множества как элементы именно группы тоже накладываются два условия.

1. Среди элементов группы обязательно имеется такой, умножение на который **не изменяет** любой другой элемент группы. Этот элемент называют “единицей” группы.
2. Для **каждого** элемента группы  $g$  в ней имеется “обратный” ему элемент  $g^{-1}$ , т.е. такой, что умножение любого элемента на обратный ему в результате даёт **единицу группы**:  $g * g^{-1} = 1$ .

Один из примеров группы — множество целых чисел, в котором групповой операцией объявлено сложение: сумма любых двух целых чисел также даёт целое число, “единицей” этой группы является число ноль, а обратным элементом является число с противоположным знаком.

Для нас самым ходовым и важнейшим примером являются те или иные группы **преобразований координат** и эквивалентные им по структуре, но не по физическому смыслу, группы

<sup>17</sup>Этот термин специфичен именно для теории групп. По факту, в той или иной группе в качестве “умножения” может использоваться произвольная операция. Например, это может быть перестановка элементов, арифметическое сложение, арифметическое умножение, или совсем какая-то, на первый взгляд странная, комбинация отдельных базовых операций с числами.

**активных преобразований локальных реперов.** Как в данной точке пространства-времени, так и при смещении в соседние, бесконечно близкие точки.

Большинство групп, с которыми мы имеем дело в пространстве-времени могут быть описаны с помощью некоторого конечного числа  $k$  непрерывно меняющихся параметров, рассматриваемых в качестве координат в некоторой области евклидова пространства. Т.е. теми же самыми геометрическими методами. Поэтому полезно рассмотреть общие соотношения для таких групп [11]. Их принято называть *группами Ли*. Локально любая группа непрерывных преобразований, действующая в нашем описании мира пространством-временем, является подгруппой группы  $n \times n$  невырожденных (с ненулевым определителем) комплексных матриц, которую называют  $GL(n, C)$ ,<sup>18</sup> и которая является  $2n^2$ -параметрической группой Ли (зависящей от  $2n^2$  действительных параметров). Любой элемент этой группы можно представить в виде разложения по  $2n^2$  базисным матрицам. Простейшим таким базисом будут матрицы, содержащие нули всюду, кроме единственного элемента  $\{i, j\}$ , который равен либо действительной, либо мнимой единицам. Базисы именно такого типа удобны в том случае, когда элементы некоторого подпространства рассматриваются не как матрицы, а как векторы, элементы линейного векторного пространства. В матричных подпространствах часто удобнее выбирать в качестве базисов наборы матриц *определённой структуры*. Например, при изучении ортогональных поворотов в трёхмерном евклидовом пространстве весьма естественно и удобно использовать разложение по матрицам, соответствующим поворотам в каждой отдельной плоскости. Базисы такого типа позволяют сразу уяснить физический смысл любого конкретного представителя рассматриваемой группы.

То, что мы всегда стараемся локализовать наше описание, делает для нас удобным, и даже жизненно необходимым в ряде случаев, изучение строения группы Ли в окрестности её единицы,

---

<sup>18</sup>Приведённое обозначение расшифровывается как Общая Линейная группа с  $n$  параметрами над полем комплексных чисел.

при бесконечно малых значениях её параметров. Орты базисов такого типа для произвольной (не только матричной) группы Ли принято называть *генераторами* группы. Любое конечное преобразование можно представить в виде последовательности преобразований с бесконечно малыми параметрами. В случае матричных групп результатом будут матричные экспоненты. При изучении квантовых приближений (в следующем томе этой книги) мы увидим насколько такое описание там применимо и, более того, *естественно и логично*. Приведём основные соотношения такого описания для абстрактной группы Ли.

Для примера возьмём произвольную  $k$ -параметрическую группу Ли с параметрами  $p^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ :  $g(p^1, p^2, \dots, p^k)$ . Все параметры полагаются *действительными числами*. Любой элемент такой группы в малой окрестности единицы  $I$  группы (малой по каждому из параметров) может быть представлен как разложение по  $k$  *генераторам* этой группы

$$g(p^1, p^2, \dots, p^k) = I + \mathbf{i} p^a \Gamma_a, \quad (1.31)$$

где

$$\Gamma_a = \frac{1}{\mathbf{i}} \frac{\partial g(\dots p \dots)}{\partial p^a}. \quad (1.32)$$

Мнимую единицу мы ввели по традиции, принятой в квантовой теории поля, чтобы получаемые нами соотношения были как можно легче узнаваемы и в квантовых описаниях. Т.к. мы используем в качестве четвёртой координаты мнимые числа, пропорциональные действительному времени, то такого рода выбор оказывается удобным и в классических описаниях.

Соотношение (1.31) будет для нас полезным при описании вращения абсолютно твёрдого тела. Но пока мы перечислим главные моменты в рассматриваемом способе описания произвольной группы Ли.

Генераторы  $\Gamma_a$  группы Ли представляют собой **базис** в окрестности единицы группы, рассматриваемой как **линейное век-**

**торное пространство**, и могут быть выбраны неоднозначно.<sup>19</sup> Как правило, в интересующем нас случае групп преобразований, в качестве генераторов удобно выбирать матрицы **элементарных преобразований**, принадлежащих этой группе.

Мы знаем, что во многих случаях результат последовательного применения элементарных преобразований зависит от их порядка. Это означает, что важнейшую роль при изучении структуры группы играют **коммутаторы генераторов**. И действительно, общая теория групп Ли прямо утверждает, что всё, что требуется от генераторов, это необходимость подчиняться определённым условиям на их коммутаторы, которые следуют из законов умножения в группе:

$$[G_a, G_b] = \mathbf{i}c_{ab}^d G_d \quad \text{и} \quad (1.33)$$

$$[G_a, [G_b, G_c]] + [G_b, [G_c, G_a]] + [G_c, [G_a, G_b]] = 0. \quad (1.34)$$

Операция  $[G_a, G_b] = G_a G_b - G_b G_a$  (коммутатор), записывающая разницу, возникающую в результате изменения порядка в применении двух последовательных преобразований (элементов группы), называется коммутированием элементов, а второе условие называют тождеством Якоби. Это тождество является **структурным**, т.е. необходимым следствием **определения, структуры коммутатора**.

Соотношение (1.33) всего лишь записывает тот факт, что коммутатор двух элементов группы тоже к ней принадлежит, а значит тоже может быть представлен в виде разложения по реперу, введённому в группе. Набор коэффициентов  $c_{ab}^d$  (для каждой конкретной группы свой), называемый структурными константами группы Ли, который на самом деле можно и нужно рассматривать как тензор в линейном пространстве с числом измерений равным количеству генераторов, полностью определяет структуру алгебры Ли. Из определения структурных констант (1.33)

<sup>19</sup>Обратите внимание, на схожесть обозначения для генераторов группы и коэффициентов аффинной связности. Я не случайно выбрал такое обозначение, т.к. природа этих элементов нашего описания имеет общие корни. И это мы позже увидим явным образом в параграфе, посвящённом описанию вращения твёрдого тела.

возникает антисимметричность этого тензора (по нижней паре индексов)

$$c_{ab}^d = -c_{ba}^d. \quad (1.35)$$

Из наличия тождества Якоби (1.34) для коммутаторов следует, что и тензор структурных констант также подчиняется аналогичному тождеству:

$$c_{ab}^p c_{pc}^d + c_{ca}^p c_{pb}^d + c_{bc}^p c_{pa}^d = 0. \quad (1.36)$$

Линейное пространство, которое замкнуто относительно операции коммутирования, называется алгеброй Ли. Таким образом, касательное к единице в группе  $g$  пространство<sup>20</sup> является алгеброй Ли. Генераторы образуют полный базис в этой алгебре. В качестве генераторов могут быть использованы самые разные математические объекты. Это могут быть функции разных видов, векторы и многие другие математические объекты. Соответственно выбору генераторов говорят о разных **представлениях** алгебры или группы. Чаще всего для изучения свойств конкретной алгебры или группы в качестве генераторов используются разные виды матриц, т.к. матричные представления явным образом могут быть интерпретированы как преобразования в тех или иных многообразиях, и вся мощь аппарата геометрии позволяет лучше понять свойства изучаемой алгебры. Собственно, это должно быть уже видно и по содержанию данного параграфа. Очевидно, что всякое представление какой-либо алгебры Ли даёт также и представление соответствующей группы.

Наиболее часто используется представление алгебры матрицами  $k \times k$ , генераторы которого составлены из структурных констант:

$$(\Gamma_a)_b^d = \mathbf{i}c_{ba}^d. \quad (1.37)$$

Такое представление называют *присоединённым* представлением (как алгебры, так и соответствующей группы).

<sup>20</sup>Соотношение (1.31) является именно определением касательного к параметрическому пространству в данной точке линейного пространства.

Структура всех возможных алгебр Ли в общем случае могла бы быть получена перечислением всех возможных наборов структурных констант, то есть всех тех чисел, которые удовлетворяют тождеству Якоби и условию антисимметрии, рассматриваемым как уравнения. Эта задача в настоящее время решена только для алгебр низших размерностей.

Помимо этого, нужно учитывать то, что некоторые, выглядящие разными решения (наборы структурных констант) эквивалентны друг другу. Покажем, что имеется при этом виду. Группу в окрестности её единицы мы рассматриваем как многообразие, в котором в качестве координат используются параметры группы. Число измерений этого многообразия равно количеству  $k$  параметров и генераторов, т.е. векторов используемого базиса, репера. Замена базиса с помощью регулярного преобразования не изменяет этого многообразия, а изменяет только способ описания такой группы. Легко видеть, что при замене базиса генераторов  $\Gamma_a$  на другой с помощью невырожденной матрицы  $\omega$

$$\Gamma_{a'} = \omega_{a'}^a \Gamma_a \quad (1.38)$$

структурные константы преобразуются именно как тензор:

$$c_{a'b'}^{d'} = \omega_{a'}^a \omega_{b'}^b \omega_d^{d'} c_{ab}^d. \quad (1.39)$$

Соответственно, все наборы структурных констант, удовлетворяющие уравнениям (1.35,1.36), которые можно связать соотношением (1.39) с помощью **любой** невырожденной  $k \times k$  матрицы  $\omega$ , описывают одну и ту же алгебру, одну и ту же группу.

Одним из важнейших частных случаев групп и алгебр является случай равенства нулю всех структурных констант, т.е. полная коммутация всех элементов в таких группах. Это означает отсутствие зависимости результата от порядка следования элементов группы. Такие группы и алгебры различаются только размерностью, т.е. числом независимых параметров в группе, их называют **абелевыми**.

Если не все структурные константы обращаются в нуль, то в алгебре Ли можно определить метрику с помощью соотношения

$$g_{ab} = c_{at}^d c_{bd}^t. \quad (1.40)$$

Это, очевидно, тензор, т.к. получен как определённая свёртка двух экземпляров одного и того же тензора. Его иногда называют метрическим тензором Картана. По своему построению это симметричный тензор,  $g_{ab} = g_{ba}$ .

Генераторы  $\Gamma_a$  могут быть как комплексными матрицами, так и действительными. Соответственно, тогда говорят о *комплексной* или *действительной* алгебрах. Но даже в случае комплексных генераторов, если они являются *эрмитовыми* матрицами, то *все структурные константы являются действительными числами* и в этом случае тоже говорят о *действительной* алгебре Ли. Одна и та же комплексная алгебра может быть расширением двух (и более) действительных алгебр с совершенно разными структурами. Происходит это потому, что наборы структурных констант этих действительных алгебр не могут быть связаны никаким *действительным* преобразованием с не нулевым определителем соответствующей матрицы, не могут быть превращены друг в друга выбором подходящего репера эрмитовых генераторов. А в комплексной алгебре, являющейся их расширением, имеется не особенное комплексное преобразование репера генераторов одной действительной алгебры в генераторы другой действительной алгебры, позволяющее **непрерывным** образом обходить действительный нуль.

Если алгебра действительная, то метрика Картана  $g_{ab}$  тоже действительная и её всегда можно привести к диагональной (канонической) форме с помощью некоторой замены базиса генераторов. В этом базисе

$$g_{ab} = \epsilon_a \delta_{ab}, \quad (1.41)$$

где  $\epsilon_a = +1, -1$  или  $0$ , а  $\delta_{ab}$  — символ Кронекера. Если матрица  $g_{ab}$  не вырождена, т.е.  $\det g \neq 0$ , то в канонической форме на диагонали не будет нулей. Введение метрики в алгебре Ли позволяет рассматривать в ней такую операцию, как скалярное произведение любых двух векторов (элементов группы) в этом линейном пространстве, и понятие ортогональности векторов. Репер эрмитовых генераторов действительной алгебры, в котором метрика

$g_{ab}$  имеет каноническую форму, будет набором взаимно ортогональных векторов в соответствующем пространстве. Очевидно, что скалярное произведение любых векторов в этом пространстве всегда действительно.

В классификации групп Ли имеется довольно много терминов, названий для группировки групп и алгебр с похожими свойствами. Например, если число параметров группы Ли является конечным, то говорят о конечномерной группе Ли. Если область изменения параметров некоторой группы является компактной (т.е. каждый параметр изменяется в конечных пределах — как, например, углы поворотов могут меняться от 0 до  $2\pi$ ) то и группа называется *компактной*. Некоторое подпространство в абстрактном векторном пространстве представления данной группы называют *инвариантным подпространством относительно этого представления*, если любой вектор из этого подпространства при преобразованиях в группе всегда в нём остаётся. Если *единственными* инвариантными подпространствами представления являются само это пространство и нулевой вектор, то говорят, что такое представление *неприводимо*. В противном случае представление называется *приводимым*. При изучении свойств некоторой группы достаточно изучить только её неприводимые представления. Всякое её приводимое представление можно тогда рассматривать как прямую сумму неприводимых. В присоединённом матричном представлении его матрицы будут иметь блочно-диагональную структуру, где каждый блок будет соответствовать неприводимому представлению. Компактная группа называется *простой* если она не имеет инвариантных подгрупп Ли. Если компактная группа не имеет инвариантных абелевых подгрупп, то она называется *полупростой*. Соответственно, полупростая группа Ли общего вида является произведением простых групп, и блочно-диагональные матрицы реализуют её алгебру в присоединённом представлении. Имеет место теорема Картана, утверждающая, что необходимым и достаточным условием для алгебры Ли *быть полупростой* является требование  $\det g \neq 0$  для её метрики. Метрика *компактной полу-*

*простой* алгебры Ли может быть приведена к виду  $g_{ab} = -\delta_{ab}$ .

Вернёмся к причинам того, что сведения из теории групп являются для нас важными. Понятие группы в нашем описании мира возникает из понимания того факта, что любое описание мира числами, результатами процедур измерений не является единственным. От выбора процедур измерений зависят, в первую очередь, координаты, приписанные тем или иным точкам мира как континуума, мира как пространства-времени. Переходы от одних координат к другим и описываются группами преобразований. Кроме того, все остальные комплексы чисел, привязанные к каждой точке и полученные тоже с помощью измерений **теми же объектами**, которые были использованы для приписывания **этим точкам** мира координат тоже преобразуются с помощью тех же самых преобразований. Такие комплексы чисел, уже рассматриваемые как геометрические объекты, мы (используя математику как язык описания) называем тензорами и тензорными плотностями. И классифицируем эти объекты в соответствии именно с тем, каким образом они преобразуются при переходах между процедурами измерений, а значит при преобразованиях координат. Среди тензоров для нас явным образом выделен важнейший их тип — контравариантные векторы. Выделены такие векторы потому, что именно к этому типу относятся те самые объекты, которые мы используем как **единицы измерения** для приписывания точкам мира чисел. Далее, хотя каждая единица измерения, каждый такой вектор и может рассматриваться совершенно отдельно от всех остальных, но для полноценного описания мира как континуума мы обязательно оперируем такими векторами как совокупностями, называемыми базисами или реперами. Число векторов, объединённых в базис, фиксировано для некоторого континуума, и является одной из его основных характеристик. Для нашего мира это число равно четырём.

Мы можем по своему желанию использовать не все возможные (сохраняющие мерность описания пространства-времени) наборы векторов как базисы. Вполне понятно, что какой-то выбор может быть удобнее другого. В ряде конкретных случаев

это можно сделать очевидным. А при более внимательном рассмотрении результатов наших измерений, мы можем прийти и к выводу, что определённым ограничениям на выбор реперов, процедур измерений мы вполне будем обязаны следовать всегда. Или всегда будем иметь возможность перейти к некоторой предпочтительной (стандартизированной) процедуре измерений, чтобы лучше понимать связи между её результатами. Преобразования, оставляющие наши реперы внутри ограниченной “группы”, не выводящие из неё, будут уже настоящей группой, одной из подгрупп самых общих допустимых преобразований координат.

К чему это ведёт с точки зрения теории групп? К необходимости рассматривать и **классифицировать, описывать** возникающие таким образом **подгруппы** полной группы допустимых преобразований координат. И, в первую очередь, наше внимание должно быть сосредоточено на **неприводимых** подгруппах. Таких, которые объединяют часть наших математических (а значит и физических) объектов в некоторые замкнутые общности, из которых не происходит выхода при ограничении (в результате нашего выбора, или в результате наличия естественных условий) преобразованиями только из этой подгруппы. Как мы видим в этом параграфе, теория групп, рассматриваемая с самых общих позиций, предоставляет в наше распоряжение необходимые термины и инструменты.

Но ведь нас интересуют, в первую очередь, отнюдь не свойства преобразований. Нас интересует то, что происходит с результатами измерений, комплексами чисел, которые мы объединили в тензоры и тензорные плотности. Можно ли рассматривать некоторые совокупности самих этих объектов именно как группы? В строгом соответствии с приведённым выше определением этого понятия?

Ответ на этот вопрос следующий. Можно. Но только по отношению к операции сложения. Все тензорные величины одного и того же строения (т.е. преобразующиеся одинаковым образом) по отношению к этой операции соответствуют определению группы в точности. Также как и обычные числа, скаляры, которые мы

включили в общее понятие тензора, полагая, что **отсутствие какого-либо преобразования, изменения** при выборе другой процедуры измерения тоже можно включить в общую схему. Как ранее мы в такую схему включили пустое множество в теории множеств, и число нуль в теории чисел.

Но ведь сами преобразования для тензорных величин это тоже **операции**, в определённом смысле объединяющие разные числовые комплексы, разные представления тензора в некую общность, ограниченную некоторым условием совокупности. Не уместно ли рассматривать такие совокупности, тензорные величины вместе с операциями их преобразования тоже как группы?

Если говорить на строгом языке математики, то НЕТ. Такие совокупности не удовлетворяют определению группы. Однако, мы можем называть такие совокупности группами на обычном, бытовом языке. Ведь налицо их объединение по некоторому признаку. И я часто делаю это. Только, чтобы подчеркнуть, что это не строгий математический термин, я беру его в кавычки — “группа”. Такой выбор представляется мне гораздо более удобным, чем попытка ввести какие-то новые, специальные термины для таких совокупностей. Излишнее усложнение языка не ведёт обычно ни к чему хорошему, а в нашем случае может сместить акценты в нежелательном направлении. Причина моего выбора в том, что объединение нами тех или иных совокупностей объектов в такие “группы” при создании описания мира будет **всегда** увязано с некоторой группой (в точном математическом смысле) преобразований. Увязано тем, что операции в “группе” будут ограничены только элементами группы преобразований.

Например, я часто пишу — “группа” процедур измерений. Что подразумевается? Это совокупность всех тех процедур измерений, переходы между которыми описываются некоторой конкретной **группой** преобразований. Или “группа” реперов. То же самое. Все те реперы, которые можно преобразовать друг в друга (как набор **векторов**) с помощью указанной группы преобразований.

Обращаю ваше внимание, что элементы группы преобразо-

ваний **сами являются для нас операциями**. Причём операциями, связывающими сторонние объекты точно также, как сама групповая операция связывает элементы группы. Чаще в таком контексте вместо слова “операция” употребляется слово “оператор”. Элемент группы определённого строения, который **тем или иным способом изменяет** математический объект, на который действует. Заметьте, это уже новый для математики уровень иерархии понятий. С одной стороны, совокупность матриц как **объектов, элементов** с операцией их умножения друг на друга. С другой стороны, эта же самая совокупность матриц, но уже как **операций, действий** на другие объекты. Т.е. понятие группы мигрировало с множества неких абстрактных объектов, связанных некими операциями на множество операций, объединяемых такой же самой операцией.

Вполне ясно, что второй случай в определённом смысле должен быть богаче свойствами. И так и есть, для групп операторов в общей теории групп появляются дополнительные возможности классификации. Возможности, которые мы можем использовать и для нашего построения описания мира, в физике. Я имею ввиду понятие об операторах Казимира.

В случае компактных групп, рассматриваемых как группы операторов, из генераторов группы можно сформировать некоторые специальные операторы, называемые *операторами Казимира*, которые позволяют классифицировать неприводимые представления этих групп. Операторами Казимира  $C_a$  называются те операторы, которые **коммутируют со всеми генераторами**:

$$[C_a, G_b] = 0. \quad (1.42)$$

Имеется лемма Шура, утверждающая, что представление группы (или алгебры) является неприводимым, если и только если любые операторы, коммутирующие со всеми операторами представления, кратны единичному. Из этого следует, что если **все** операторы Казимира пропорциональны единице группы, удовлетворяют условию  $C_a = \lambda I$ , то представление будет неприводимым.

Какое применение в нашем описании могут иметь такие операторы (Казимира) и такой способ классификации преобразований координат, рассматриваемых как операторы? В некоторой произвольной группе такие операторы работают как фильтр, выделяющий определённую подгруппу. Происходит это таким образом.

Для элементов искомой неприводимой подгруппы  $g1$ , являющихся подмножеством группы  $g$ , должно выполняться соотношение

$$C_a g1 = \lambda I g1 = \lambda g1. \quad (1.43)$$

Это соотношение, рассматриваемое в рамках группы  $g$  как **уравнение**, определяет некоторые числа, **собственные значения**  $\lambda$  для оператора  $C_a$  (как решения уравнения  $C_a - \lambda I = 0$ ) и соответствующие этим числам **собственные векторы**  $g1$  среди элементов группы  $g$ .<sup>21</sup> Если собственные значения, как решения этого уравнения, являются вполне определёнными числами, в общем случае комплексными, то собственные векторы определены только с точностью до произвольного (не нулевого) комплексного множителя. Легко видеть, что, если некоторый вектор  $g1$  (элемент группы) удовлетворяет уравнению (1.43), то ему удовлетворяет и другой вектор  $c \cdot g1$ , где комплексное число  $c$  отличается от нуля, а в остальном произвольно.

Классификация неприводимых представлений группы  $g$  сводится к классификации собственных значений и собственных векторов операторов Казимира. Очевидной реализацией конкретного неприводимого представления (инвариантного подпространства векторов) в группе будет подпространство, в качестве базисных векторов которого принимается *полный набор собственных векторов* одного из операторов Казимира, соответствующих его конкретным собственным значениям. При этом базисные векторы определяются с точностью до произвольного комплексного множителя. Т.е. их **нормировка** может быть

---

<sup>21</sup>Эта терминология вполне применима, поскольку, как мы уже отмечали выше, интересующие нас группы мы можем рассматривать как линейные векторные пространства.

выбрана достаточно произвольно, из соображений удобства. На конкретизацию неприводимого представления группы, в смысле её групповых свойств, выбор нормировки не влияет.

Легко видеть, что методы, базирующиеся на операторах Казимира, могут быть нам полезны далеко за пределами собственно теории групп. В первую очередь, можно показать, что они работают для тех совокупностей математических объектов, используемых нами в описании мира, к которым мы применяем термин “группа”. Пусть у нас имеется некая совокупность объектов  $\{\Psi\}$ , которую мы будем называть “векторами состояния”. Здесь и сейчас это просто термин, никак не связанный с нашим **геометрическим понятием вектор**. Это может быть совокупность тензоров определённого строения, ограниченная неким условием. Или, например, совокупность реперов из  $n$  векторов, на структуру которых тоже наложены определённые ограничения. Рассматриваемая совокупность объектов, которую мы условно назовём “пространство состояний”, не обязана быть группой в строгом математическом смысле. Но операции внутри этой совокупности, связывающие разные её объекты, обязаны являться элементами некоторой группы  $g$ . Например, это могут быть невырожденные преобразования координат из общей линейной группы. Почему я использую слово “вектор” в этом термине, будет видно ниже.

В этом пространстве состояний элементы группы  $g$  действуют как операторы:  $g\Psi = \Psi'$ . Если в группе  $g$  определены операторы Казимира, фиксирующие неприводимую подгруппу  $g1$ , то в рамках этой подгруппы действие операторов Казимира на векторы состояния определяет систему уравнений на собственные значения и собственные векторы, полностью аналогичную уравнениям (1.43):

$$C_a \Psi = \lambda \Psi. \quad (1.44)$$

Собственные значения  $\lambda$  при этом будут теми же самыми, что и для группы  $g1$ , а вот собственными векторами уже будут некоторые векторы состояний из пространства состояний. Как и в случае элементов самой группы, эти векторы тоже определены

с точностью до произвольной (но не нулевой) комплексной, в общем случае, нормы. И точно также, произвольный вектор состояния можно разложить по полному набору этих собственных векторов, создавая таким образом возможность исчерпывающего описания той части пространства состояний, операции в которой принадлежат к группе  $g1$ . Т.е., мы получаем возможность работы с такой совокупностью объектов, с таким “пространством состояний” как с настоящим векторным пространством. По крайней мере, в части классификации этих объектов. Вот здесь и лежит причина использования термина “вектор” в этом случае.

Для полупростой группы (алгебры) Ли один из операторов Казимира (собственно, только этот оператор и назывался изначально оператором Казимира) легко построить следующим путём. Для такой алгебры метрика (1.40) не вырождена и существует обратная ей матрица  $g^{ab}$ , такая что

$$g^{ad}g_{db} = \delta_b^a. \quad (1.45)$$

Оператор Казимира определяется как  $C = g^{ab}\Gamma_a\Gamma_b$ . То, что он коммутирует со всеми генераторами,  $[C, \Gamma_a] = 0$ , легко проверить прямым вычислением.

Для компактной полупростой группы этот оператор представляет собой просто сумму квадратов всех её генераторов.

В этом параграфе мы рассматривали непрерывные группы Ли с помощью методов геометрии. Поскольку в нашем подходе к геометрии все геометрические объекты обладают теми или иными размерностями, то нам необходимо обязательно прояснить, как с этим обстоит дело в случае такого описания группы. В геометрии размерности возникают из-за того, что все числа, полученные с помощью сравнения с масштабами, **измеренные**, получают в наследство размерность той единицы, которой они были измерены.

В случае применения методов геометрии к параметрическому описанию непрерывных групп, об измерении этих параметров речи не идёт. Размерности могут иметься (а могут и не иметься) у самих элементов группы. А у параметров их нет, поскольку нет

и речи об их каком-либо измерении. Параметры **стандартизованы**. Они имеют один и тот же смысл для групп, состоящих из **любых** элементов, главное чтобы **структура** групп этих разных элементов была одинакова. Поэтому все **геометрические** объекты в описании группы являются безразмерными. Размерными могут быть, в принципе, только генераторы. Да и то, в общем описании мы явным образом часто полагаем, что даже матричные представления генераторов вполне могут применяться стандартным образом, т.е. как одинаковые безразмерные объекты в совершенно разных ситуациях. Поэтому, при использовании общих результатов теории групп и алгебр Ли в применении к конкретным геометрическим ситуациям, в отношении размерностей геометрических объектов следует учитывать всё сказанное выше.

Объём сведений из теории групп, представленный в этом параграфе, значительно превышает то, что мне потребуется применить в текущем томе. По сути дела, в дальнейшем нам будет достаточно только самых базовых определений, приведённых в его начале. Остальное мы будем интенсивно использовать уже в следующем томе, при рассмотрении квантовых приближений. Однако, я счёл целесообразным осветить данный раздел математики именно в таком объёме потому, что это позволит читателю иметь более полное представление о важности, методах и его возможных применениях. Ограниченность применения сведений из этого параграфа в данном томе обусловлена только ограниченностью поставленных здесь целей.

В физике имеется очень много вопросов, для которых именно в классических приближениях эти методы будут прекрасно работать. Да, здесь я касаюсь только одного из таких вопросов, но, повторяю, только потому, что остальные выходят за пределы целей данной книги.

## 1.7 События и действие в классических приближениях

Как я уже многократно говорил, основой нашего описания мира, средством проверки правильности выбора описания, может служить только доступная нам информация о событиях и связях между ними. В первом томе я вёл изложение в направлении максимальной идеализации представлений об этих двух сторонах нашего знания о мире. Понятие о событии доведено до понятия об элементарном событии. Ему поставлено в соответствие понятие о точке, которую можно (и нужно) рассматривать изолированной, отделённой от других таких же точек, ассоциированных с другими элементарными событиями. А вот понятие о связях между событиями стало основой представления о непрерывном континууме, содержащем эти точки-события и делающем их единым описанием мира. Континуум связывает дискретный набор точек (элементарных событий), являющихся его составляющими, в единое целое.

В пределе такого идеального описания оказалось возможным классифицировать события и их причинно-следственные связи как цепочки всего лишь двух принципиально разных типов. Цепочки из трёх событий и более позволяют определить на их основе масштабы, дающие возможность “измерять”, сравнивать “промежутки времени” между событиями, т.е. “оцифровывать связи”. Дают возможность поставить в соответствие числа не только событиям (нумерация, счёт дискретных величин) но и позволяют сделать то же самое и для непрерывности, для связей. Пусть с помощью предельной идеализации, но что есть то есть, другого не дано. Такие цепочки событий ассоциированы мною с физическим понятием частицы, имеющей массу покоя. Сама масса покоя получает ясную интерпретацию — она определяется как число событий в истории такой частицы, приходящихся на выбранную единицу времени. Причём не на всякую возможную единицу, а только на определяемую всегда одним и тем же числом последовательных **элементарных** событий. Определение (постулиро-

вание) массы покоя и выбор единицы времени являются двумя сторонами одной медали.

Понятие “действие” с его минимальным **непрерывным** кусочком, квантом  $h$  потребовалось мне именно для того, чтобы вложить **цепочку связанных бинарными отношениями причина-следствие** дискретных событий в единую непрерывную линию. Переложив на непрерывность этой линии обязанность следить за неизменностью описания порядка событий в рассматриваемой цепочке. И обеспечение нерушимости причинно-следственных связей между событиями. Естественно, на том этапе отождествление непрерывного скалярного параметра на линии, объединяющей события в цепочку, с физическим понятием о такой величине как “действие” базировалось в основном на отождествлении самой такой линии с траекторией массивной частицы. Никакие связи, взаимодействия выделенной частицы с другими в таком параметре на траектории учтены быть не могут. Такое действие существует только на траектории массивной частицы и более нигде.

Но ведь события в любой такой цепочке, может быть не все, но некоторые обязательно, имеют связи и с другими событиями, но включёнными нами уже в существование других массивных частиц. Иначе она выпадет из единого континуума, который мы объединяем понятием “непрерывная часть мира”. Если связи эти могут быть описаны как такие же цепочки, включающие три или больше события, то, в принципе, для описания мира нам могло бы хватить только такого, сосредоточенного на этих линиях непрерывного параметра, действия. Однако, мы никак не можем исключить из нашего рассмотрения и самые элементарные возможные цепочки, всего из двух событий, связанных соотношением причина-следствие. А что между ними? Что их связывает, какой непрерывный “параметр”? Тот же, что и между любыми двумя событиями и на остальных цепочках. Сам мир рассматриваемый уже как непрерывность большего чем одно числа измерений. Опыт нам говорит, что число измерений нам нужно увеличить до четырёх. А как ввести единицы измерения для той

части непрерывности, в которой нет промежуточного события, позволяющего определить саму эту единицу?

Мы используем дополнительные, стандартизованные конструкции для этого. Принимая нужные нам соглашения и следуя им при сопоставлении результатов наших опытов с теоретическими структурами, призванными сделать наше описание мира **самосогласованным**. Т.е. таким, чтобы составляющие его постулаты не противоречили друг другу. Кроме того, **достаточным**, т.е. обеспечивающим всё нужное для включения в описание всей накопленной нами информации о мире. И **необходимым**, т.е. не содержащим лишнего, таких свойств описания, без которых оно вполне может обойтись. Эти соглашения сводятся к созданию опорной, стандартизованной структуры, классического метрического тензора (хотя и не полностью соответствующего геометрическому понятию о тензоре), введения с его помощью главной, опорной части аффинной связности и дальнейшего уточнения тех дополнительных свойств связности, которые **необходимы** нам для описания мира. Необходимы в классических приближениях, когда мы считаем, что между событиями на траекториях массивных частиц, т.е. таких, для которых мы реально можем определить прототипы единиц измерения, нет никаких промежутков. Они заполняют траектории массивных частиц непрерывно. Такое предположение вносит в наше описание мира очень серьезные ограничения.

Во-первых, мы теряем связь такой характеристики нашего описания, как масса покоя с событиями на траектории массивной частицы. Результатом становится **необходимость постулировать** выделенность определённых процедур измерения среди всех остальных **принудительно**. Притом, что при построении полного описания мира последовательно мы эту выделенность не в состоянии конкретизировать с самого начала. Будет постулировано то, что это возможно. И только на определённом этапе создания нашей конструкции пространства аффинной связности, годного для описания мира, все постулаты будут сведены в единую, опирающуюся на опыт систему. Как следствие,

по ходу дела мне придётся всё время неоднократно подчёркивать этот момент.

Во-вторых, наше действие на траекториях массивных частиц теряет промежутки, что делает для такого описания мира сингулярными, особыми не отдельные точки, которые можно сопоставить событиям, а все те линии, которые мы связываем с существованием массивных частиц, и, соответственно, с существованием особых, реализуемых масштабов времени. Этим все связи между событиями на траекториях массивных частиц вообще выбрасываются нами из рассмотрения. Мы их не можем описать **принципиально**. Для правильного описания таких связей нам придётся перейти к совсем иным, **квантовым** приближениям.

Побочным следствием этого факта становится постулирование вполне определённых свойств для связностей, годных для описания мира в классических приближениях. На линиях массивных частиц **все линейные по смещению вдоль линии** скаляры (инварианты описания) обязаны сводиться к соотношению между массой покоя, временем в системе покоя такой частицы и действием на её траектории. Какие-либо дополнительные векторы на траекториях массивных частиц, построенные тем или иным способом из связности, могут появиться только как **пропорциональные, с постоянным коэффициентом**, двум характеризующим частицу векторам — касательному контравариантному или двойственному ему удельному ковариантному градиенту (только вдоль траектории) действия. Естественно, коэффициент пропорциональности обязан быть постоянным только при каноническом выборе скалярного параметра вдоль траектории при определении касательного к ней вектора. А так как оба вектора являются сингулярными, определёнными только на таких линиях, то и все пропорциональные им векторы тоже становятся сингулярными, определёнными только на этих же траекториях, и равными нулю всюду вне их.

Чтобы включить в наше описание и элементарные цепочки всего из двух событий нам требуется распространить определение нашего сингулярного действия на весь континуум. Един-

ственным непротиворечивым способом такого распространения является определение, постулирование **плотности** действия как некой функции, существующей для всех без исключения точек континуума. Функции координат и наших геометрических структур. Функции, имеющей на траекториях массивных частиц сингулярности, которые при интегрировании по всякому полномерному объёму в пространстве-времени автоматически выделяют эти траектории и только их. А это означает требование для такой плотности действия иметь равным нулю интеграл по любой области, не включающей массивные частицы. Структуру этой плотности, точнее многих плотностей, которые обязаны быть **пропорциональны** неизвестной нам изначально плотности действия мы будем определять постепенно, включая в рассмотрение всё больше возможностей для реперов масштабов меняться тем или иным способом от точки к точке. Принимая во внимание всё больше допустимых свойств аффинной связности. Опираясь на сформулированное выше требование мы будем строить наши приближения к определению плотности действия на всех этапах создания нашего описания мира. **Все сингулярности, допустимые в плотности действия будут сосредоточены на траекториях массивных частиц, и никак иначе.** Из этих соображений будут отбираться возможные расширения для аффинной связности на всех этапах создания нами описания мира в классических приближениях.