Второй инвариант тензора Риччи при $T^i_{jk} \neq 0$ можно записать в следующем виде (см. соотношения 2.14-2.17):

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{ik}R^{ik} = R_{ik}\mathbf{g}^{ip}\mathbf{g}^{kl}R_{pl} = (r_{ik} + a_{ik})(r^{ik} + a^{ik}) \quad (7.13) \\ &= r_{ik}r^{ik} + a_{ik}a^{ik} = r_1 + \frac{1}{4}\overline{F}_{ik}\overline{F}^{ik} + \frac{1}{4}T_{ik}T^{ik} + B. \end{aligned}$$

В относительный инвариант B мы включили члены с дивергенцией тензора кручения $\nabla_p T^p_{ik}$, а также все перекрёстные члены, образующиеся из перемножения этой дивергенции, $\overline{F}_{ik}$ и T_{ik}.

Как видно во второй строке (7.13), тензор напряжённостей кручения опять даёт вклад в эту плотность действия совершенно аналогичный вкладу тензора напряжённостей электромагнитного поля. Это означает, что аналогия этой части кручения с электромагнитным полем не ограничивается только тем, что оба тензора удовлетворяют системе уравнений Максвелла, но она имеет место в полной мере — эта часть кручения имеет и совершенно аналогичный тензор энергии-импульса, и создаёт силу Лоренца на траектории частицы, имеющей не нулевой ток кручения. Аналогия здесь настолько полная, что возможно даже, что всё то, что мы относим к электромагнитным явлениям, включает частично и эффекты кручения.

7.4 Обсуждение

В этой главе мы обсуждали те черты нашей картины мира, которые выходят за рамки существующей классической физики. Конечно, кручение как таковое не является необходимым свойством объектов реального мира а априори. Но нет также а априори никаких запретов на его существование хотя бы у части объектов реального мира. Более того, такое свойство элементарных частиц, как спин, вполне может быть связано с наличием у них кручения. Свойства элементарных частиц являются предметом второй части этой книги, здесь же нас интересуют только классические проявления кручения. Мы не исследовали этот вопрос

в полной мере. Только впечатляющая аналогия с электромагнитным полем привлекла здесь наше внимание. Как уже было сказано выше, эта аналогия настолько полна, что не исключено, что те явления которые мы рассматриваем как электромагнитные, являются на самом деле комбинацией проявления двух совершенно независимых свойств масштабов — не интегрируемой части симметричной связности и кручения, несимметричной части связности. Эти явления по природе своей могут быть разделены инвариантным образом.

Однако, нужно отметить, что могут иметь место также и эффекты перекрёстного взаимодействия между кручением и электромагнитным полем.[2] Все они были нами вынесены в относительный инвариант B в соотношении (7.13). Поскольку они объединены в отдельный инвариант, все они также инвариантно отделимы от чистых явлений электромагнетизма и кручения.

Что касается классической метрики, образа классической системы отсчёта, то при наличии кручения она также будет нести на себе его дополнительный отпечаток, как и в случае только электромагнитного поля.

[2] И с гравитационным тоже, инвариант r_1 содержит такие перекрёстные члены.