ния метрики вне масштабов. Мы и делали это, когда ввели представление о нормальной метрике, на которую не накладываются никакие специальные условия *вне подпространств существования масштабов.* Так что, там, где классическая метрика не может быть построена мы всегда можем вести разговор на языке связности и тех её производных структур, которые *существуют везде, где можно говорить о связности.* Однако представление о классической метрике не является просто заблуждением, которое можно с лёгкостью отбросить. Если это сделать, то нужно также отказаться и от *описания мира с помощью координат, заполняющих его непрерывно*, которые призрачны ровно в той же степени, что и классическая метрика. По крайней мере, до тех пор, пока речь идёт о противоречии: часть мира как масштаб — пустая часть мира. Выход из этого замкнутого круга мы уже неоднократно упоминали — не нужно жёстко фиксировать наше изображение мира там, где средств для этого мы не имеем. В этом плане и описание мира пространством аффинной связности является слишком жёстким на некотором уровне. Однако остаётся очень много уровней описания мира, на которых структуры аффинной связности *достаточно* адекватно соответствуют миру и, более того, *являются необходимыми.* Так и классическая метрика при определённых условиях (уже подробно обсуждённых выше) оказывается незаменимой структурой для понимания связей между событиями в мире. Достаточно использовать её там, где это необходимо, и не экстраполировать её свойства туда, где это ничем не оправдано.

5.6 Обсуждение

В предыдущих параграфах мы показали, что при определённых условиях аффинная связность проявляет себя как гравитационное поле, причём при этих условиях возможно применение математического аппарата, развитого в Общей Теории Относительности. В ОТО классическая метрика, основная структура теории имеет всеобщее значение, она не может не существовать. Здесь же она не более чем удобный инструмент, дополнительная структура, позволяющая описывать явления на определённом языке, и её существование, и вместе с ней применимость этого языка ограничено, требует выполнения определённых условий.

Поскольку одним из оснований введения классической метрики является желание распространить понятие практически твёрдого тела отсчёта на пустые области пространства-времени, совсем не удивительно, что уравнениями для неё вне материальных тел является требование исчезновения симметричной части тензора Риччи, которая содержит нормальную метрику, описывающую именно наличие материальных объектов, могущих быть реальными масштабами. По сути дела, уравнения (5.17 и 5.18) *не накладывают никаких дополнительных ограничений* на классическую метрику, не считая её привязки к реальной кривизне посредством совместного выбора гравитационной постоянной и величины массы (её единицы).

Ранее мы уже встречались с размерными постоянными, такими как скорость света и постоянная Планка. Эти постоянные, очевидно, не являются истинными скалярами, поскольку имеют разное значение для разных процедур измерения. Происхождение их разное.

Скорость света как постоянная появляется из возможности ограничения процедур измерения одним достаточно узким классом, и имеет универсальное значение только в этом классе систем координат. При выходе из этого класса она может иметь столько разных значений, сколько имеется пространственных (воображаемых) масштабов, и, более того, все эти величины могут зависеть от точки. То, что мы называем эту постоянную скоростью света, мы пока никак не обосновали, разве что очевидной параллелью со Специальной Теорией Относительности. Мы и не могли этого пока сделать, поскольку ещё не обсуждали электромагнитные явления. Так что в соответствующем месте нам будет нужно показать, что скорость распространения электромагнитных волн как раз и равна этой постоянной.

Постоянная Планка в некотором смысле более универсальна. Причина её существования лежит в отделимости элементарных событий, изображении существования частицы одновременно непрерывной и дискретной последовательностями. Она позволяет увидеть единство двух характеристик частицы — её энергии-импульса (массы) и частоты генерации элементарных событий на траектории. Однако и она родственна скорости света, т.к. одновременно с этим ещё и связывает две единицы — единицу времени и единицу массы, которая в классическом приближении кажется отдельной независимой единицей. Собственно, именно отношение действия частицы к постоянной Планка и определяет степень применимости классического приближения. Когда можно считать события на траектории практически непрерывными, т.е. когда эта постоянная пренебрежимо мала по сравнению с изучаемыми изменениями действия, тогда и нужно говорить о классическом приближении. При этом можно спокойно забыть о существовании постоянной Планка и описываемых ею связях, но можно при желании их и использовать. Физический смысл этих связей остаётся незыблемым.

Гравитационная постоянная гораздо менее универсальна, т.к. служит для связи величины локальной кривизны (её части, тензора Риччи) и *дополнительной служебной* структуры, классической метрики. Её величина тоже зависит от выбора единиц времени и массы и, таким образом, с её помощью можно связать эти единицы. Только действует эта связь в области дополнительной к области значимости постоянной Планка, в классическом приближении. Да и высвечивает она другую сторону связи — не линейную по времени скорость генерации событий на множестве существования тела, а определённую эквивалентность между массой тела и локальной кривизной, которая конечно тоже определяется скоростью генерации событий, но уже квадратичным образом. А связь кривизны и времени также не является очевидной. Меньшая же универсальность гравитационной постоянной связана с невозможностью введения классической метрики во всех случаях даже в классическом приближении. Там, где употребление классической метрики невозможно, там и эта постоянная перестаёт иметь какое-либо значение.

Масса покоя классической частицы в этих приближениях является относительным инвариантом, который в теории определён быть не может и остаётся внешним параметром. Ещё одним относительным инвариантом, который, однако, является уже предметом теории пространства-времени, становится четырёхмерный инфинитезимальный интервал $dl = \sqrt{-\mathsf{g}_{ik}dx^i dx^k}$, порождающий канонический скалярный (относительный) параметр для траекторий классических частиц. Поэтому появляется и относительный вектор $\frac{dx^i}{dl}$, касательный к траектории классической частицы который, также как и $\frac{dx^i}{ds}$, сохраняется вдоль траектории: $\frac{\overline{\nabla}}{dl}\frac{dx^i}{dl} = 0$.

При наличии классической метрики, помимо (относительного) скаляра $\overline{r} = \mathsf{g}^{ik}\overline{r}_{ik}$ возникает второй инвариант тензора Риччи: $\overline{r}_1 = \overline{r}_{ik}\overline{r}^{ik} = \mathsf{g}^{ip}\mathsf{g}^{kl}\overline{r}_{ip}\overline{r}_{il}$. Таким образом, имеется всего пять естественных Δ-плотностей, $\mathfrak{g} = \sqrt{\det\|\mathsf{g}_{ik}\|}$, $\Gamma_0 \exp\Gamma = \exp\int\partial_j\Gamma dx^j$, $\overline{r}\mathfrak{g}$, $\overline{r}_1\mathfrak{g}$ и $\overline{\mathfrak{r}} = \sqrt{\det\|\overline{r}_{ik}\|}$.

Первая из этих плотностей регулярна по определению и не различает наличие или отсутствие частиц в области, поэтому не может дать действие области. Её интеграл изменяется с изменением метрики при её произвольных вариациях, отражая произвольность переопределения базового метрического объёма.

Остальные четыре тоже могут быть проинтегрированы по объёму области, порождая тем самым интегральные инварианты области, пропорциональные её действию и поэтому стационарные при вариациях метрики.

Вторая плотность, $\Gamma_0 \exp\Gamma$, безусловно содержит частицы как сингулярности и воспроизводит действие области (в показателе экспоненты). Однако она не зависит от классической метрики напрямую, а только через уравнения Кристоффеля, и поэтому выявление с её помощью влияния вариаций этой метрики на действие области затруднительно. Тоже касается и последней из перечисленных плотностей, $\overline{\mathfrak{r}}$. По этой причине мы и выбрали в качестве порождающей интегральное действие области простейшую из оставшихся плотностей, $\overline{r}\mathfrak{g}$. С её помощью легче всего исследовать влияние на действие вариаций (существования) классической метрики. Интегралы для всех четырёх порождающих действие области плотностей должны быть стационарны *одновременно.* В принципе, условия стационарности для разных плотностей, содержащих классическую метрику в явном виде, могли бы перекрываться частично или даже не перекрываться совсем, поскольку она не является истинным тензором. Последний случай означал бы просто *невозможность* построить требуемую классическую метрику. При частичном перекрытии условий *только общая их часть* позволяет построить требуемую структуру. Легко видеть, что при полученном выше условии (5.17) вариация функционала от лагранжевой плотности $\overline{r}_1\mathfrak{g}$ также равна нулю.

$$\delta(\overline{r}_{ik}\overline{r}^{ik}\mathfrak{g}) = \delta(\overline{r}_{ik})\overline{r}^{ik}\mathfrak{g} + \overline{r}_{ik}\delta(\overline{r}^{ik}\mathfrak{g}). \tag{5.28}$$

Выражение справа в (5.28), очевидно, исчезает при $\overline{r}_{ik} = 0$.

Поэтому проблема совместности не возникает, а также и не требуется исследовать дополнительно условия стационарности второго метрического скаляра тензора Риччи. Те, которые решают поставленную проблему построения классической метрики, уже найдены.[9] Точно тоже самое можно сказать и по поводу плотности $\overline{\mathfrak{r}}$.

Полезно также напомнить, что принцип стационарного действия применяется несколько по-разному к действию, как функционалу области и к действию, как функционалу траектории. В первом случае варьируются только свойства масштабов, т.е. связность внутри области. Где именно в области находятся классические частицы, которые как сингулярности воспроизводят соб-

[9] Следует заметить, что, все упомянутые здесь функционалы от плотностей, хотя и стационарны вместе с действием, но только *пропорциональны ему* (и друг другу). Коэффициент пропорциональности же для каждой плотности свой. Более того, если для $\overline{r}\mathfrak{g}$ этот коэффициент размерный, то для $\overline{r}_1\mathfrak{g}$ он безразмерный, поскольку $\overline{r}_1$ содержит дополнительный множитель $\mathfrak{g}^{ik}$, компенсирующий дефект размерностей, возникающий из относительности тензора классической метрики.

ственное действие области, при этом не существенно. Какие траектории они имеют не важно. Поэтому требуется лишь равенство нулю всюду, где нет сингулярностей, некоторой тензорной плотности, сформированной только из коэффициентов связности (потенциалов) и их производных, Лагранжевой производной подынтегрального выражения. Если не требуется существование дополнительной структуры, согласованной со связностью (в рассматриваемом случае это классическая метрика), то это будут тождественные соотношения. Если такая структура должна существовать, то это будут уравнения, определяющие и структуру и связность совместно, *ограничивающие связность заданным классом.* В случае классической метрики, олицетворяющей классическую систему отсчёта, лагранжева производная плотности действия является также её производной и по метрике и носит название плотности тензора энергии-импульса. Эта плотность появляется как распределение по области в добавление к распределению вектора энергии-импульса, сосредоточенного только на траекториях частиц. Интеграл по области следа на метрике от плотности тензора энергии-импульса должен по определению сводиться к совокупности интегралов по траекториям классических частиц, содержащимся в этой области. Все события имеют место только на траекториях, нет "висящих" событий. Одним из следствий этого является необходимость исчезновения следа тензора энергии-импульса на метрике всюду вне траекторий. Когда между связностью и классической метрикой имеется полное соответствие (связность Кристоффелева, случай чистой гравитации) это требование усиливается до исчезновения вне частиц не только следа на метрике, но и самого тензора энергии-импульса. Гравитационное поле как таковое имеет только сингулярную компоненту.

В случае функционала траектории варьируются не только коэффициенты связности, но и сама траектория, поскольку фиксированы только её начальная и конечная точки. Результатом будут в первую очередь условия на траекторию — её геодезичность и каноничность варьируемого скаляра как параметра траектории. Если не требуется существование никакой дополнительной структуры, то мы получаем просто перефразировку иными словами всё тех же условий существования масштабов. Здесь же мы хотели, чтобы связность позволяла определение классической метрики, поэтому мы дополнительно получили условия, связывающие эту структуру и коэффициенты связности — соотношения Кристоффеля. Очевидно, это уравнения, ограничивающие тот класс связностей (масштабов!), который позволяет построить классическую метрику с заданными свойствами. Нужно также подчеркнуть, что это ограничение класса рассматриваемых связностей есть не что иное, как ограничение допустимых процедур измерений. Поэтому последовательно оперировать с классической метрикой можно только в некоторой ограниченной группе процедур измерений (очерченной группой допустимых преобразований координат и исходным представителем, в котором построено решение для классической метрики и связности в явном виде).

Вообще, хотя мы стараемся работать со связностью в наиболее общем виде, это не означает, что в качестве изображения реального мира мы рассматриваем пространство-время с *произвольной* аффинной связностью. Наоборот, нашей целью является установление того класса связностей, а значит и процедур измерений и вместе с ними той группы допустимых преобразований координат, которые могут и должны применяться для описания мира. Иными словами, нашей целью является выяснение свойств объектов реального мира, которые мы используем или можем использовать в качестве единиц измерения, служащих для построения образа реального мира. Идти по этому пути можно, как ограничивая изначально максимально широкий класс допустимых (рассматриваемых) связностей, так и наоборот, расширяя некоторый, для которого мы уже установили соответствие определённым свойствам физических объектов.

В этой главе мы выявили ту часть связности, ту часть изменчивости (или, если хотите, неизменности) классических масштабов, выраженной в терминах связности, которая в терминах классической физики описывается как гравитационные взаимодействия массивных тел. Наличие иных физических взаимодействий означает, что этот класс связностей (свойств классических масштабов) слишком узок и должен быть расширен. Этим мы и займёмся в следующих главах.