пространстве имеется выделенное направление (а оно имеется фактически всегда, это направление движения какой-либо движущейся относительно системы отсчёта частицы), то ещё и проекция спина на это направление.

11.6 Представления полной группы Пуанкаре

Перейдём теперь к описанию представлений полной группы Пуанкаре, когда в преобразования поворота вовлечено и время. Нам ведь необходимо описание не только для единственного наблюдателя, но и для разных, не совпадающих наблюдателей. А значит для систем отсчёта движущихся друг относительно друга. Речь опять будет идти только об ортогональных поворотах, сдвигах и отражениях, которые не затрагивают величины единиц измерения всех координат, более того, в случае поворотов единицы подразумеваются одинаковыми для всех четырёх направлений.

Представление контравариантного вектора четырьмя матрицами в пространстве состояний описано в § 10.5. Явный вид таких матриц $\boldsymbol{\gamma}^i$ является следствием условия сохранения локальной псевдоевклидовости (10.19), характеризующего группу Пуанкаре.[6] Эти матрицы служат в пространстве состояний образом единичного касательного к траектории вектора и образующими для полного репера в алгебре $M(4,C)$. Привязывая репер к таким образом определённым образующим мы увязываем его ориентацию, ориентацию пространства состояний, с направлением траектории в данной точке пространства-времени, согласуем их. Все представления преобразований из группы Пуанкаре в пространстве состояний могут быть разложены по такому реперу. Например, по реперу (11.10). Да и самая естественная для нас реализация полной группы Лоренца изначально является ничем иным как группой 4×4 матриц, подчиняющихся определённым условиям.

[6] Отметим, что это, векторное представление группы Лоренца, является представлением подобия.

Полная группа Лоренца имеет *четыре связные* компоненты. Внутри каждой связной подгруппы группы Лоренца от одной процедуры измерения к другой можно перейти *непрерывным* изменением, поворотом репера масштабов. Переход между разными связными подгруппами возможен только с помощью дискретных отражений временной координаты (изменения направления отсчёта времени) и изменения ориентации пространственного репера. Изменение его ориентации может быть достигнуто посредством изменения порядка нумерации составляющих этот репер масштабов (нечётной перестановкой номеров), также как и с помощью изменения направления всех масштабов репера или только одного из них.

Точно такую же структуру должны иметь и все представления полной группы. Это касается как представлений преобразованиями, так и представлений векторами состояния. Классификация чистых вращений (внутри связных компонент) в четырёхмерном случае становится более сложной, чем в трёхмерном. Собственная группа Лоренца $SO(3,1)$ (связная компонента полной группы Лоренца, с определителем равным $+1$) не является компактной. Вращения на мнимый угол в плоскости $\{x^4 = \mathbf{i}t, \mathbf{n}\}$ имеют областью изменения параметра t всю действительную прямую $[-\infty, \infty]$. Поэтому прямое применение для классификации её представлений оператора Казимира вида (11.25), расширенного учётом генераторов Лоренцовских бустов (поворотов, вовлекающих время), не может опираться на соответствующие теоремы теории групп Ли. В то же время ясно и то, что при ограничении процедур измерения только до группы покоящихся друг относительно друга, должны быть возможны все уже упоминавшиеся ранее способы классификации как векторов состояния, так и их преобразований. Для сохранения такого соответствия желательно использовать характеристические числа именно оператора (11.25) и для классификации представлений группы $SO(3,1)$. Сейчас мы попытаемся проследить возникающие при этом соотношения, как абстрактные (учитывающие только необходимое и достаточное для их описания количество

компонент) представления векторов состояния, так и, по возможности, появляющиеся при этом структурные свойства для наших векторов состояния из пространства 4×4 матриц.

Структура базиса (11.10) позволяет легко видеть, что требования на соответствие характеристических чисел в полноценном четырёхмерном описании тем, которые имеются для случая покоя, действительно можно удовлетворить, и с его помощью можно описывать неприводимые представления группы $SO(3,1)$. Рассмотрим генераторы $\Gamma^c_{10} \div \Gamma^c_{15}$. Их совокупность образует подгруппу (подалгебру) в полной группе (алгебре) генераторов базиса. На её основе можно построить необходимые нам представления собственной группы Лоренца. Именно по этой причине для классификации представлений группы Пуанкаре в нашем пространстве состояний удобно использовать репер, образующими которого являются $\boldsymbol{\gamma}$-матрицы. Поставим в соответствие каждому повороту в пространстве-времени в плоскости $\{i,k\}$ на угол ϕ матрицу в пространстве 4×4 комплексных матриц по правилу

$$U_{(ik)}(\phi) = \exp(\pm \mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}^{ik} j\phi), \tag{11.32}$$

где j пока произвольное действительное число.

Нетрудно видеть, что указанные выше генераторы $(\boldsymbol{\sigma}^{ik})$ являются блочными матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \pm\sigma & 0 \\ 0 & \pm\sigma \end{pmatrix}, \tag{11.33}$$

где σ представляют собой 2×2 матрицы Паули (дополненные единичной). А преобразования (11.32) являются диагональными блочными матрицами вида

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\pm\mathbf{i}\sigma j\phi) & 0 \\ 0 & \exp(\pm\mathbf{i}\sigma j\phi) \end{pmatrix}. \tag{11.34}$$

В пространстве $M(4,C)$ *любую* матрицу можно рассматривать как состоящую из четырёх 2×2 клеток. В общем случае такое разбиение матрицы не сохраняется после преобразований матриц, поскольку компоненты клеток после преобразования могут

образовываться с участием компонент из разных клеток, сформированных до преобразования. Если же такое разбиение в той или иной форме сохраняется и после любого допустимого преобразования, принадлежащего некоторой группе, то оно является *характерным структурным признаком самой этой группы* матриц. Очевидно, что любое произведение матриц вида (11.34) снова является матрицей такого вида.

Действие любого такого преобразования сохраняет 2×2 клеточную структуру 4×4 матрицы произвольного вектора состояния. Каждая из клеток преобразованной матрицы вектора состояния зависит только от элементов той же самой клетки исходной матрицы и коэффициентов преобразования, тоже не всех, а только из соответствующей клетки матрицы преобразования:

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Psi_1 & U_1\Psi_2 \\ U_4\Psi_3 & U_4\Psi_4 \end{pmatrix} \tag{11.35}$$

для произвольного вектора состояния Ψ и

$$\begin{pmatrix} \overline{\Psi}_1 & \overline{\Psi}_2 \\ \overline{\Psi}_3 & \overline{\Psi}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{-1} & 0 \\ 0 & U_4^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_1 U_1^{-1} & \overline{\Psi}_2 U_4^{-1} \\ \overline{\Psi}_3 U_1^{-1} & \overline{\Psi}_4 U_4^{-1} \end{pmatrix} \tag{11.36}$$

для сопряжённого ему вектора состояния $\overline{\Psi}$. При действии такого представления собственных преобразований Лоренца в пространстве состояний все четыре клетки вектора состояния преобразуются по-отдельности и остаются на своих местах.

Если мы отождествим значение j со спином, числом, производящим собственные значения оператора Казимира для подгруппы чисто трёхмерных вращений (11.25), то для $j = \frac{1}{2}$ получим полное соответствие с рассмотренной для покоящихся систем схемой классификации этого набора (спинорных) представлений. Из сравнения (11.34,11.35) и (11.26,11.28), а также (11.34,11.36) и (11.26,11.30) можно заключить, что каждый *отдельный* столбец в 2×2 блоке матрицы 4×4 вектора состояния Ψ, и каждая *отдельная* строка в 2×2 блоке матрицы 4×4 сопряжённого вектора состояния $\overline{\Psi}$ преобразуются как спинор (11.27) и сопряжённый спинор (11.29).

Инвариантное относительно спинорного представления собственной группы Лоренца разбиение произвольного вектора состояния на четыре независимых блока при переходе к рассмотрению полной группы Лоренца автоматически ассоциирует каждый из этих четырёх блоков с одной из четырёх связных компонент этой группы. Каждая из этих компонент отличается своим собственным выбором ориентации трёхмерного пространственного репера и выбором направления времени. Поэтому естественно называть блоки матрицы вектора состояния в соответствии с этим выбором — левоориентированные (или просто левые) компоненты, правоориентированные (правые) компоненты, а также, согласно с выбором направления времени — частицы и античастицы.

О связи ярлыков "частица и античастица" с выбором направления времени мы уже достаточно говорили раньше. А вот понятия о левых и правых компонентах применительно к векторам состояний мы пока практически не касались. Только лишь немного говорили о действии оператора отражения (представления изменения ориентации пространственной части процедуры измерений) на вектор состояния. И связали с ним характеристическое число "чётность". То, что при таком преобразовании в пространстве-времени геометрические объекты, для которых имеется разница между правой и левой ориентацией, меняют или не меняют эту ориентацию, отслеживалось в нашем описании не полностью. Это было связано с ограниченностью рассматриваемой в предыдущих параграфах группы допустимых процедур измерений. Теперь же все эти свойства полностью представлены в структуре возможных векторов состояния. Для спинорного представления знак спинора оставался неопределённым (оба знака были совершенно равноправны, изменение знака возможно в результате *непрерывного* преобразования спинора). Поэтому, как должна проявляться "чётность", оставалось не ясным. Её нельзя было связать просто с изменением знака спинора. Здесь мы видим, что с ориентацией пространственного репера на самом деле связан не знак спинора, а его принадлежность к тому или иному

блоку в полной матрице вектора состояния. Имеются “правые” и “левые” спиноры, в остальном обладающие одинаковыми свойствами.

Какую процедуру измерения в пространстве-времени считать правоориентированной, вообще говоря, можно выбрать произвольно. Но выбрав однажды, мы разрушаем имеющиеся симметрии (свободу выбрать точку зрения). Как при выборе пространственной ориентации, так и при выборе направления отсчёта времени. Выбор направления времени навязан нам нашим собственным существованием. Естественно полагать последовательность событий именно в нашем существовании имеющей положительно направленное время. Ориентация в пространстве вроде бы не навязывается нам ничем. Но и это не совсем так. На самом деле, мы изначально допускали для объектов мира, которые используем в качестве масштабов, возможность иметь некоторую собственную ориентацию. Наличие такой ориентации неразрывно связано с неисчезающим тензором кручения на траектории соответствующего объекта мира. Вектор состояния является интегральным продуктом полной связности, включая кручение. Поэтому при наличии кручения в нашем мире, классификация векторов состояния может (должна) быть несимметричной и по отношению к ориентации пространственного репера. Кроме того, отметим, что фиксация части возможностей в выборе ориентации происходит также и при ассоциации с временной координатой всегда только номера 4 в нашем наборе масштабов. Это приводит к очевидной неравноправности 2×2 клеток в векторе состояния.

Учёт изменения ориентации пространственного репера осуществляется в пространстве состояний в киральном представлении матрицей

$$P = k \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{11.37}$$

а преобразование вектора состояния, соответствующее изменению направления времени осуществляется матрицей

$$T_- = k \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.38}$$

Соответственно,

$$P\Psi = k\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & \Psi_4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} \Psi_3 & \Psi_4 \\ \Psi_1 & \Psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (11.39)$$

$$T_-\Psi = k\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & \Psi_4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} \Psi_3 & \Psi_4 \\ -\Psi_1 & -\Psi_2 \end{pmatrix}. \quad (11.40)$$

Коэффициенты k в (11.37) и (11.38) могут быть выбраны равными ± 1 или $\pm\mathbf{i}$. Уточнять их выбор мы сейчас не будем.

Перейдём к изучению возможностей описания представлений группы сдвигов (в пространстве-времени и в начальных значениях векторов состояний). Оператором энергии-импульса (генератором подгруппы трансляций) в полноценном четырёхмерном рассмотрении становится свёртка $\boldsymbol{\gamma}^i\partial_i$. В этой формуле по пространственно-временному индексу i подразумевается суммирование, что отражает уже сделанный выбор направления сдвига. Таким способом мы и в пространстве состояний изображаем очевидную для пространства-времени возможность общего положения направления траектории в данной точке (направления сдвига) по отношению к выбранной процедуре измерений. Используя стандартные $\boldsymbol{\gamma}$-матрицы в каждом экземпляре пространства состояний, мы фактически ориентируем его в согласии с каждой возможной траекторией. Свёртка $\boldsymbol{\gamma}^i\mathsf{A}_i$ становится соответствующим генератором калибровки общей начальной фазы вектора состояния. Поскольку действие этих двух групп не разделимо, то эти два оператора всюду участвуют вместе как оператор

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{\gamma}^i\nabla_i = \boldsymbol{\gamma}^i(\partial_i + \mathsf{A}_i). \quad (11.41)$$

Представлением этих двух групп вместе преобразованиями в каждом экземпляре пространства состояний будет изменение нормировки вектора состояния с помощью множителя $\exp\phi(x^i)$. Коэффициент преобразования ϕ является комплекснозначной функцией точки в базе. Преставления этих же групп векторами состояния, прямыми и сопряжёнными, можно описывать в виде разложения по собственным векторам аналога оператора Казимира.

Аналогом оператора Казимира в этом случае будет оператор

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}^i\boldsymbol{\gamma}^j + \boldsymbol{\gamma}^j\boldsymbol{\gamma}^i)\nabla_i\nabla_j = \mathsf{g}^{ij}\nabla_i\nabla_j. \tag{11.42}$$

Рассмотрим строение матрицы обобщённого оператора энергии-импульса $\boldsymbol{\mathcal{P}}$. Эта матрица в киральном репере является клеточной и кососиагональной, первая и четвёртая её клетки равны нулю, а две оставшиеся эрмитово сопряжённые:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \tag{11.43}$$

где 2×2 матрица оператора $\mathbf{P}$ имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \nabla_4 - \mathbf{i}\nabla_3 & -\nabla_2 - \mathbf{i}\nabla_1 \\ \nabla_2 - \mathbf{i}\nabla_1 & \nabla_4 + \mathbf{i}\nabla_3 \end{pmatrix}. \tag{11.44}$$

Сам оператор $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ является эрмитово самосопряжённым, так что имеет только действительные собственные значения. Здесь мы должны отметить ещё, что столь простой блочный вид (11.43) оператор $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ имеет потому, что мы работаем с киральным репером в пространстве состояний, выбрали специфический вид для $\boldsymbol{\gamma}$-матриц Дирака. Для другого выбора образующих блочная структура, естественно, сохранится, но общая матрица не будет кососиагональной. Следует также подчеркнуть, что такой вид оператора энергии-импульса напрямую связан с разделением вектора состояния на правые и левые компоненты (полного вектора состояния, матрицы 4×4). Именно потому, что в киральном базисе они собраны в отдельные очевидные блоки, мы и используем этот базис в нашем изложении.

Матрица оператора Казимира очевидным образом пропорциональна единичной

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}\mathbf{P}^\dagger & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^\dagger\mathbf{P} \end{pmatrix} = I\nabla^2, \tag{11.45}$$

что в достаточной мере обосновывает возможность выбора этого оператора как ключевого для определения характеристик неприводимых представлений векторов состояний, связанных с наличием таких степеней свободы, как трансляции начала отсчёта в

пространстве-времени и сдвиги начальных фаз векторов состояния. Поскольку это 4×4 матрица, то её собственные векторы ψ, т.е. решения уравнения

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^2\boldsymbol{\psi} = \lambda\boldsymbol{\psi} \tag{11.46}$$

необходимо имеют 4 компоненты, $\psi^i(x^j)$, каждая из которых удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi^i(x^j) = \lambda\psi^i(x^j). \tag{11.47}$$

Важно подчеркнуть, что в собственный вектор оператора Казимира объединяются именно четыре решения этого уравнения для *одного и того же* собственного значения λ. При полной фиксации группы локально инерциальных процедур измерения (при выборе направления времени и ориентации, т.е. при фиксации одной из четырёх компонент полной группы Лоренца) имеются четыре возможности, четыре соответствующих представления, которые можно различать *дополнительно* к значению λ. Увеличение это несомненно связано не с чем иным как с добавлением пространственных степеней свободы в допустимые процедуры измерения. Но в предыдущем параграфе, да и немного раньше в этом, мы уже отметили две характеристики, спин и ориентацию, обязанные своим появлением учёту этих степеней свободы. И важным вопросом будет, нужно ли вводить ещё что-то новое, связанное только со сдвигами, или уже имеющихся характеристик достаточно для полного описания неприводимых представлений. Ответ на этот вопрос будет однозначный — перечисленных в конце предыдущего параграфа характеристик уже достаточно.

Отметим, что уравнение (11.46) является квадратичным по производной по времени. Соответственно, конкретизацию представления (одного из решений этого уравнения) можно делать с помощью решения одного из линейных уравнений (являющихся известными уравнениями Дирака)

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\boldsymbol{\psi} = \sqrt{\lambda}\boldsymbol{\psi} \tag{11.48}$$

или

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\dagger} = -\sqrt{\lambda}\overline{\boldsymbol{\psi}}, \tag{11.49}$$

поскольку операторы $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\dagger}$ коммутируют с $\boldsymbol{\mathcal{P}}^2$. Для каждого из этих линейных уравнений имеется два линейно независимых решения для некоторого заданного значения p_i с фиксированным (положительным) знаком p_4. Фаза решений записывается либо как $+\mathbf{i}p_ix^i$, либо как $-\mathbf{i}p_ix^i$. Такую возможность мы уже заметили и раньше, связали её с понятиями частицы и античастицы. Новое здесь то, что при последовательно четырёхмерном рассмотрении нужно принимать во внимание положительно частотные и отрицательно частотные компоненты как неотъемлемые компоненты *одного и того* же вектора состояния, характеризующего неприводимое представление. Одного и того же в том смысле, что произвольный вектор состояния может быть разложен по четырём таким линейно независимым решениям. И прямой вектор состояния, и сопряжённый имеют по четыре компоненты, среди которых двум соответствует фаза $+\mathbf{i}p_ix^i$, а двум другим фаза $-\mathbf{i}p_ix^i$. Т.е. эти компоненты присутствуют в векторе состояния и частицы, и античастицы. Для чистого вектора состояния частицы компоненты с отрицательной фазой могут быть нулевыми, но как компоненты обязательно присутствуют. Акцент в различиях между векторами состояния частицы и античастицы смещается с простой разницы в знаке зависимости единственной волновой функции от времени на отличие в структуре всего вектора состояния. Точнее, пока только на отличие в структуре представления в 4х-мерном векторном пространстве. Пространственная часть дифференциального оператора (11.47) привносит в возможную зависимость функций $\psi^k(x^i)$ *только от пространственных координат* структурные свойства, генетически связанные со значением ещё одной характеристики неприводимого представления, спина. В частности, это, например, может быть хорошо известное разложение по шаровым функциям. Которые являются представлениями той же самой группы пространственных вращений, но уже с точки зрения *функциональной зависимости от пространственных координат*. И конечно,

наличие спина как классификатора неприводимого представления сказывается в первую очередь в том, что для каждого из представлений, и для $m = \sqrt{\lambda}$, и для $m = -\sqrt{\lambda}$, существует $2j+1$ разных решений, $2j+1$ компонент в векторе состояния. Для спинорного представления, когда $j = \frac{1}{2}$, имеется ровно две различных компоненты. Соответственно, уравнениям (11.46-11.49) может удовлетворять вектор состояния, состоящий из *двух спиноров*.

Таким образом, при полноценном четырёхмерном рассмотрении (ограниченном системами отсчёта, связанными преобразованиями из группы Пуанкаре) мы имеем для $j = \frac{1}{2}$ согласованное представление одними и теми же векторами состояния как для группы сдвигов, так и для групп вращений — полной группы Лоренца и её трёхмерной подгруппы. Это представление реализуется собственными векторами оператора Казимира для группы сдвигов, 4х-компонентными наборами чисел, являющимися для подгруппы трёхмерных вращений парой спиноров. Такой вектор состояния в абстрактном представлении характеризуется четырьмя комплексными числами $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$, которые, как и в (11.27), обычно записывают в виде столбца и называют 4х-компонентным контравариантным спинором. Пространство таких 4х-компонентных спиноров разложено в прямую сумму двух двухкомпонентных спинорных пространств. Поэтому 4х-компонентные спиноры часто называют *биспинорами*. При ограничении группы $SO(3,1)$ до $SO(3)$ биспинорное представление распадается в сумму двух изоморфных неприводимых спинорных представлений. 4х-компонентный спинор преобразуется с помощью матриц (11.32), где $j = \frac{1}{2}$. Эрмитово сопряжённый 4х-спинор записывают в виде строки, как и в случае обычных (2х-компонентных) спиноров и его можно назвать ковариантным 4х-спинором. Сопряжённые спиноры преобразуются с помощью преобразования, комплексно сопряжённого преобразованию (11.32) умножением на него справа. Мы имеем полное соответствие 4х-спиноров нашим прямым и сопряжённым векторам состояния, включая их свёртку, определяющую это сопряжение.

Действие оператора $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ на произвольный вектор состояния Ψ

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}\Psi_3 & \mathbf{P}\Psi_4 \\ \mathbf{P}^\dagger\Psi_1 & \mathbf{P}^\dagger\Psi_2 \end{pmatrix}, \tag{11.50}$$

и

$$\begin{pmatrix} \overline{\Psi}_1 & \overline{\Psi}_2 \\ \overline{\Psi}_3 & \overline{\Psi}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_2\mathbf{P}^\dagger & \overline{\Psi}_1\mathbf{P} \\ \overline{\Psi}_4\mathbf{P}^\dagger & \overline{\Psi}_3\mathbf{P} \end{pmatrix} \tag{11.51}$$

для сопряжённого ему вектора состояния $\overline{\Psi}$, для частиц имеющих не нулевую массу покоя связывает левые и правые компоненты векторов состояния.

Переход к полноценному четырёхмерному рассмотрению (в пределах процедур измерения, принадлежащих группе Пуанкаре) позволил нам увидеть новые детали структуры полного вектора состояния. Но это всё ещё отнюдь не вся его структура. Выход же за пределы локализованной группы Пуанкаре в наших экспериментах мы практически никогда не делаем. Поэтому для таких экспериментов, для такого описания, структура полного вектора состояния останется скрытой. Хотя проявляться она будет всё равно, но уже при превращениях реальных свободных частиц друг в друга. Ведь там-то никаких ограничений на преобразования нет и быть не может.

Легко видеть, что в пространстве 4×4 матриц, которое только и является полноценным пространством состояний, для спинорного представления каждый столбец матрицы произвольного вектора состояния преобразуется как 4х-компонентный спинор, каждая строка сопряжённого ему вектора состояния — как сопряжённый ему 4х-спинор. Помимо этого, столбцы матрицы полного вектора состояния и строки сопряжённого вектора являются собственными векторами оператора Казимира (11.46) и уравнений (11.48) и (11.49). Оператор Казимира комбинированной группы сдвигов, при дополнительном учёте группы поворотов, позволяет рассматривать ситуацию с векторами состояния с позиции максимально жёсткой, максимально ограниченной. А уравнения (10.34) и (10.38), наоборот, соответствуют

максимально широкой группе возможных процедур измерения (в смысле возможностей для изменения масштабов). Такой, всех представителей которой заведомо невозможно реализовать доступными средствами. Здесь мы сравниваем две симметрии — максимально узкую и максимально широкую. И то, что представляется отдельными объектами с точки зрения первой симметрии, может быть лишь компонентами одного объекта с точки зрения второй. Таковым и является соотношение между биспинорами, как решениями уравнения Дирака, и столбцами и/или строками единой матрицы вектора состояния. Вполне очевидно, что отнюдь не всякие четыре биспинора являются компонентами одного (матричного) вектора состояния. А обратное всегда будет верно, как это мы уже видели выше. Это взгляд с точки зрения структуры векторов состояния.

Таким образом, выделенность процедур измерений из локальной группы Пуанкаре делает выделенной также группировку матрицы всякого вектора состояния по столбцам и всякого сопряжённого вектора состояния по строкам. Каждый отдельный столбец или отдельная строка в матрице является сам/сама по себе отдельной, цельной сущностью с точки зрения любой такой процедуры измерений. Представлением этой группы. Полный вектор состояния при этом является неразрушимым набором таких представлений. Не просто таблицей из 16 элементов, а таблицей, в которой эти элементы сгруппированы по 4 в столбцы и/или строки. И эти столбцы и строки при измерениях проявляют себя как целое, биспинор или сопряжённый биспинор.

С точки зрения функциональной, в первую очередь той её части, которая связана собственно с группой сдвигов, отметим, что собственные значения $\lambda = m_0^2$, как характерные числа представлений, являются совершенно произвольными положительными числами.[7] Произвольность m_0^2 означает, что свойство столбца

[7] Как мы уже указывали ранее, скорее неотрицательными. Потому что мы имеем полное право расширить наше рассмотрение и на случай $m_0^2 = 0$, хотя бы формально. Это значение тоже является допустимым решением для уравнения на собственные значения оператора Казимира группы трансляций. Да, этот случай не соответствует никакой классической частице, с кото-

или строки матрицы вектора состояния быть биспинором или сопряжённым биспинором, решением уравнения Дирака, этим параметром никак не ограничивается. Массой покоя, которую можно измерить, является значение $\sqrt{\mathsf{g}^{ij}p_ip_j}$, где p_i является градиентом фазы нормирующего множителя всего матричного вектора состояния, т.е. его определителя. Поэтому связывать с отдельными столбцами или строками определённую массу совсем не обязательно, хотя и возможно.

Биспинорные представления группы Пуанкаре отнюдь не всегда обязаны рассматриваться как векторы состояния реальных частиц. Реальным частицам могут быть поставлены в соответствие только такие биспиноры, которые одновременно

- являются решениями уравнения Дирака в данной области;
- являются компонентами полного вектора состояния, который является решением уравнений Лагранжа в этой же области.

Это ставит нас перед необходимостью изучить условия, при которых такая ситуация возможна. Сравнение оператора энергии-импульса (11.41) с оператором ковариантной дивергенции (10.21) позволяет понять и общее между ними, и разницу, и причины этой разницы. И проистекающие отсюда следствия. Структура этих операторов очень похожа. Но в первом операторе $\nabla_i = \partial_i + \mathsf{A}_i$ не является полноценной ковариантной производной в расслоенном пространстве, в отличие от $\nabla_i = \partial_i + \boldsymbol{\mathcal{A}}_i$ во втором операторе. Отмеченное выше требование может выполняться лишь в том случае, когда в некоторой области действие полной связности $\boldsymbol{\mathcal{A}}_i$ на вектор состояния сводится только к действию A_i,

рой можно было бы связать группу процедур измерений. Исчезает то свойство, что собственно и послужило основой для введения понятия о векторах состояния. Но мы уже так далеко ушли от этой основы по пути обобщения состояния, рассматриваем вообще все матрицы подходящего строения как возможные кандидаты на эту роль, что расширить его ещё немного ничему не помешает. Просто в рассмотрение добавятся некоторые дополнительные специфические векторы состояния, описывающие *только пары событий*, связанные этими векторами состояния.

той её части, которая изменяет *общую нормировку* вектора состояния. И оставляет структуру вектора состояния неизменной. Довольно ясно, что мы естественным образом пришли к тому, что подразумевали с самого начала — с реальными *свободными* частицами мы ассоциируем цепочки событий *одного и того же типа*. Причём структура вектора состояния и до и после события одна и та же. Ясно также, что такая ситуация может реализоваться только для определённой структуры связности и/или для весьма специфического вида самого вектора состояния. Поэтому нам совершенно необходимо заняться также и классификацией структуры возможной связности в расслоенном пространстве.

11.7 Представления полной внутренней симметрии и её подгруппы $SU(4)$

Перейдём теперь к преобразованиям, которые могут применяться к векторам в пространстве состояний вне какой-либо их связи с преобразованиями в базе. Это внутренние преобразования, внутренние симметрии. Если бы нам были доступны все процедуры измерений, индуцирующие полную группу внутренних симметрий, то все векторы состояния, связанные преобразованиями из этой группы ассоциировались бы с одной и той же частицей, рассматриваемой с разных точек зрения. Симметрии эти нарушаются тем, что доступные нам преобразования в пространстве-времени ограничены и индуцируют в качестве преобразований в пространстве состояний представления другой группы, группы Пуанкаре.

Самым общим преобразованием, которое действует на все без исключения векторы состояния, является изменение их нормы. Операция эта состоит в умножении определителя вектора состояния на не обращающееся в нуль комплексное число и все такие возможные операции образуют очевидную подгруппу в полной группе возможных преобразований комплексных 4×4 матриц. В реперe (11.5) этой подгруппе соответствует генератор Γ_0, тождественное преобразование для вектора состояния как структуры.