плотности действия имеющихся в области (могущих существовать для каждой из возможных связностей) частиц. Так что для полного описания нам не хватает лагранжевой плотности частиц в расслоенном пространстве.

10.5 Лагранжиан частиц в расслоенном пространстве

В классическом приближении мы сначала ввели понятие действия на траектории отдельной частицы. Только потом мы ввели плотность действия в области пространства-времени и показали, что её интегрирование распадается на интегрирование действия вдоль траекторий отдельных частиц, находящихся в этой области. Так что два определения действия, через канонический скалярный параметр, и через плотность скаляра согласованы полностью. Происходит это за счёт наличия сингулярностей в связности только на траекториях классических частиц и нигде больше.

В квантовом приближении мы ввели расслоенное информационное пространство и связность в нём. Целью является упрощение, линеаризация описания ситуации, когда и траектории реальных частиц, и само количество событий в некоторой области не являются жёстко определёнными. И соответствующие поля связности тоже. Вместо гарантированных сингулярностей на некоторых траекториях мы теперь должны работать с распределением, *плотностью вероятности* наличия событий на множестве траекторий, которые могут быть (или не быть!) в этой области. При определении плотности действия в таких условиях мы начали с определения этой величины для поля связности в расслоенном пространстве. В § 10.4 нам удалось достаточно простым способом построить лагранжеву плотность действия для *всей* совокупности возможных реальных связностей в пространстве-времени, подменив её, эту совокупность, связностью в расслоенном пространстве. Связностью, описывающей эволюцию векторов состояния как синтетических информационных объектов. Связность эта в некотором смысле гораздо удобнее для описания. Она сравнительно проста, т.к. является реализацией, представлением одной достаточно простой группы. Реперы, с помощью которых мы описываем векторы состояний выбраны одинаковыми для всех точек пространства времени. Мы также упомянули, что уравнения, получающиеся при применении вариационного принципа к этой лагранжевой плотности поля будут действительны всюду, за исключением траекторий реальных частиц, имеющихся в рассматриваемой области. Естественно, из-за сингулярностей, имеющих место в событиях. Это уравнения для некоторого *тока*, сформированного из связности расслоенного пространства. То же самое имеет место и в классическом приближении. Только там вид этого тока на траекториях (в сингулярностях) получить легко, поскольку речь идёт об измеримых величинах. А какой же вид должен иметь ток, построенный из векторов состояния? И какую форму имеет плотность действия, сосредоточенная на траекториях частиц (что важно, всех возможных сразу!) в рассматриваемой области пространства-времени, если её выразить *только в терминах векторов состояния и связности в расслоенном пространстве*, без участия математических образов измеримых величин?

Прежде чем заняться формализацией ответов на эти вопросы, нужно сделать одно важное замечание. Необходимо остановиться на определённом (и важном) отличии применения принципа стационарности действия (а значит и построения полного лагранжиана) при изучении возможных состояний реальных частиц в квантовом описании от классического случая. Действие, на траектории или в области, есть не что иное как число событий. В классическом приближении оно очень большое и мы считаем его *инвариантом описания.* Но ведь квантовое описание тем и характерно, что накопленное число событий для *разных* путей прихода частицы в точку, где имеет место выделенное нами событие, нам *не может быть известно.* Как же можно применять тогда принцип стационарности действия, если число событий, действие, принципиально не является в этом случае стационарным?

И всё-таки, принцип стационарности действия прекрасно работает и в этом случае. Только он должен быть немного модифицирован. Вспомним, что *масса покоя всякой реальной частицы в нашем приближении всё ещё является свободным параметром.* Но ведь масса покоя и является скоростью появления событий на траектории частицы. Даже если мы рассматриваем превращение некоторого состояния реальной частицы (некоторых состояний реальных частиц) в другие, то все массы начальных и конечных состояний мы всегда полагаем известными. А значит, хотя число событий в квантовом описании и не фиксировано, скорость их появления в единицу времени на любых возможных траекториях *реальных* частиц, имеющихся в области остаётся инвариантом каждого конкретного эксперимента, выполненного или рассчитанного. Действие можно вычислить двумя способами. Через лагранжевы плотности для частиц общего вида, и через *заданные* параметры, массы частиц. *Для произвольных путей всех вовлечённых частиц результаты, вычисленные этими двумя способами обязательно совпадают.* Следовательно, *их разность всегда равна нулю.* Вот эта разность, имеющая нулевое значение, и является скаляром, к которому в квантовом случае применяется принцип стационарности действия. В лагранжиан вводятся *массовые члены*, которые *вычитаются* из полного лагранжиана, точнее, из каждой составляющей лагранжиана для определённого сорта частиц. Сами массы при этом остаются свободными, заданными извне параметрами. Поэтому они не варьируются. Вариациям подвергаются только функции поля и векторы состояния. Легко видеть, что в стандартной квантовой теории все вычисления проводятся именно с такими лагранжианами.

Массовые члены являются наиболее простой компонентой полного лагранжиана. Их можно написать практически сразу. В самом деле, мы уже определили плотность вероятности появления *отдельного* события некоторого заданного типа (определяемого выбранными начальным и конечным состоянием). Имеется заданный извне параметр m_0, определяющий скорость появления событий этого типа, если они объединяются в цепочку, реализующую соответствующую реальную частицу. Следовательно, для *любой* траектории такой частицы, возможной в данной области пространства-времени, соответствующее ей возможное число событий, возможное действие будет равно

$$s = \int m_0 \overline{\mathbf{\Psi}}(x)\mathbf{\Psi}(x) d^4x = \int m_0 \overline{\mathbf{\Psi}}(l)\mathbf{\Psi}(l) dl. \tag{10.16}$$

Поскольку m_0 является внешним параметром, то здесь и далее мы включаем множитель $1/\hbar$ в определение массы покоя m_0 для упрощения записи. Интегрирование в левой части формулы производится по всей области, а в правой по любому *метрическому* параметру вдоль каждой траектории. Кроме того, в правой части допущена некоторая небрежность в обозначениях. Мы сохранили для *скалярной* вероятности то же самое обозначение, что и для плотности вероятности, только подставили в качестве аргумента значение параметра на траектории вместо координат точки в пространстве-времени. Нужно отметить, что в этой формуле совершенно не важно, какие именно точки в охваченной области пространства-времени проходила эта реальная частица для каждого значения параметра. Вся эта информация, все возможности накрыты зависимостью от точки пространства-времени плотности вероятности $\overline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}$, которая вырезает траектории вместо сингулярности в классическом приближении. Положение траекторий в квантовом описании не фиксировано, следовательно практическое значение имеет только левая часть равенства, представляющая собой интеграл по области. Поэтому мы и не стали вводить какого-либо специального дополнительного обозначения. При такой форме записи лагранжиана справа мы также явным образом ограничили выбор систем координат в пространстве-времени только локально Лоренцевыми системами отсчёта, сохраняющими введённую классическую метрику.

С точки зрения операторов, действующих в пространстве состояний, действие (10.16) представляет собой *среднее значение* некоторого оператора. Оператора, результатом действия которого на вектор состояния является скорость появления событий на траекториях реальных частиц. Таким оператором является оператор энергии-импульса. Однако, непосредственный результат его действия всё-таки не совсем то, что нам нужно, т.к. он является (относительным) ковариантным вектором. С его помощью можно получить только относительный скаляр, свёртывая с касательным вектором. А нам нужен оператор имеющий в качестве собственного значения плотность скаляра, так как касательный к траектории вектор не определён в квантовом описании единственным образом, если задана точка на траектории (в пространстве-времени).

В классическом случае проблема решается с помощью произведения ковариантного градиента плотности действия (суммы энергии-импульса и потенциала внешнего поля) на *вектор тока*. В качестве вектора тока служит касательный к траектории частицы вектор, отнесённый к метрическому скалярному параметру и превращённый в плотность с помощью сингулярного множителя, заряда. С его помощью действию, помимо скалярной плотности ставится в соответствие ещё и плотность его тока, ковариантной дивергенцией которого и оказывается скалярная плотность действия. Собственно, в этом и состоит смысл второй пары уравнений Максвелла. Ведь соотношение (6.23) можно переписать как

$$s_0 = \int (m_0 + A_i \widetilde{J}^i) dl = \int [(\partial_i s_0 + \mathbf{e} A_i) dx^i / dl] dl, \qquad (10.17)$$

В квантовом описании мы уже обнаружили, что в расслоенном пространстве действительно имеется вектор тока, порождаемый связностью в этом пространстве (10.14) и сосредоточенный только на траекториях (возможных!) реальных частиц. Таким образом, для правильной записи лагранжевой плотности частиц нам необходимо построить из векторов состояния не только плотность вероятности событий, но и *ток вероятности событий*, и среднее по состояниям *плотности тока вероятности событий*, которое и будет искомой лагранжевой плотностью.

Ток вероятности является в пространстве состояний образом отнесённого к метрическому параметру касательного к траектории частицы вектора. Выбирая для всех точек пространства-времени некоторый стандартный вектор, каждая компонента которого в пространстве состояний будет некоторой постоянной матрицей, мы фактически ориентируем наше пространство состояний, задаём в нём направление, сопряжённое оператору энергии-импульса. И таким образом получаем возможность изображать векторами состояния базовую конструкцию для производной действия по направлению в пространства-времени — $ds_0/dl = \partial_i s_0 dx^i/dl$. Взятие среднего значения от такого вектора (оператора) по всем возможным входящим и выходящим состояниям проецирует результат в пространство-время, создаёт в нём плотность вероятности в данной точке для касательного вектора частицы иметь какое-то значение, описывает для неё возможность иметь в данной точке траекторию направленную тем или иным способом.

Соответственно, структура плотности тока вероятности определяется из следующих соображений. В первую очередь, это среднее значение некоторого оператора, имеющего *четыре контравариантные* компоненты с точки зрения преобразований в пространстве-времени:

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}^i = \overline{\boldsymbol{\Psi}}(x)\boldsymbol{\gamma}^i\boldsymbol{\Psi}(x). \tag{10.18}$$

Поскольку оператор этот действует в пространстве состояний, то *каждая его компонента является* 4×4 *матрицей*, т.к. каждая компонента представлена в пространстве состояний по отдельности. И $\boldsymbol{\gamma}^i = (\boldsymbol{\gamma}^a_b)^i$, где индексы a и b действуют в пространстве состояний.

В пространстве-времени мы ограничиваемся только локально Лоренцевыми преобразованиями координат, поэтому вектор $\boldsymbol{\gamma}^i$ в каждой точке должен удовлетворять условию

$$\mathsf{g}_{ij}\boldsymbol{\gamma}^i\boldsymbol{\gamma}^j = I = \delta^a_b. \tag{10.19}$$

С учётом симметричности метрического тензора это эквивалентно соотношению

$$\frac{1}{2}\{\boldsymbol{\gamma}^i, \boldsymbol{\gamma}^j\} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}^i\boldsymbol{\gamma}^j + \boldsymbol{\gamma}^j\boldsymbol{\gamma}^i) = \mathsf{g}^{ij} I. \tag{10.20}$$

Здесь мы ввели обозначение $\{A, B\}$ для *антикоммутатора* двух матриц (или операторов) A и B.

Любой оператор, *одинаковый во всех экземплярах пространства состояний*, ассоциированных с разными точками пространства-времени, удовлетворяющий соотношению (10.20) может быть выбран в качестве оператора вектора тока вероятности событий (одного и того же вида!) на возможных траекториях реальных частиц.

Среднее по состояниям плотности тока вероятности событий должно быть с точки зрения преобразований в пространстве-времени скалярной плотностью. Поэтому это будет среднее некоторого скалярного в этом смысле оператора, построенного с помощью плотности тока. С оператором только тока вероятности ассоциирован единственный такой оператор, его дивергенция, $\nabla_i \boldsymbol{\gamma}^i$. Поэтому кажется естественным рассматривать в качестве лагранжевой плотности среднее значение дивергенции. Однако такой выбор оказался ошибочным. Нужно вспомнить соотношение (10.17) и тогда становится ясным, что для согласия с классическим приближением таким оператором должна быть не дивергенция вектора тока вероятности, а проекция градиента вектора состояния на этот вектор, т.е. оператор, формируемый как свёртка

$$\hat{P} = \boldsymbol{\gamma}^i \nabla_i, \tag{10.21}$$

который и будет скалярной плотностью скорости образования действия, скоростью появления возможных событий на этих траекториях. Этот оператор вроде бы мало отличается от оператора дивергенции. В стандартной квантовой теории часть оператора $\hat{P}$, включающая только частные производные по координатам, рассматривается и как имеющий 4 компоненты оператор (суммирование по i в его определении не производится). В такой форме его принято называть оператором энергии-импульса, поскольку в отсутствие внешнего поля его собственными значениями являются компоненты вектора энергии-импульса реальных свободных частиц. Обратим внимание, что в формуле (10.21), в отличие от оператора энергии-импульса, порядок сомножителей существенен, поскольку в оператор ∇_i в расслоенном пространстве входит связность этого пространства, совсем не обязательно коммутирующая с матрицами $\boldsymbol{\gamma}^i$. Именно в этом и состоит отличие оператора $\hat{P}$ от оператора дивергенции тока вероятности. В этом вопросе неразрывно связаны такие понятия как выбор направления времени (какие векторы состояния соответствуют прошлому, а какие будущему), определение частиц и античастиц и требование противоположности знаков их зарядов. Эту связь мы будем обсуждать подробно далее.

В стандартной квантовой теории используют все действительные координаты и локальная псевдоевклидовость пространства-времени изображается условиями на метрический тензор — $\mathsf{g}^{\alpha\alpha}_{st} = -1$, $\mathsf{g}^{44}_{st} = 1$. Здесь мы псевдоевклидовость пространства-времени изображаем разницей в координатах — действительные числа для пространства, мнимое число для времени. Соответственно, локальный метрический тензор у нас не отличается от евклидова, т.е. $\mathsf{g}^{ij} = \delta^{ij}$. Нужная разница в знаках появляется из-за мнимости одной из координат. Следовательно, в нашем описании и вид матриц $\boldsymbol{\gamma}^i$, удовлетворяющих соотношению (10.20), и соответствующий вид оператора энергии-импульса $\hat{P}$ будут несколько отличаться от стандартного. Поэтому мы приведём как стандартные выражения, так и приспособленные для нашего описания.

Соотношению (10.20) удовлетворяет не единственный набор матриц $\boldsymbol{\gamma}^i$. Одним из примеров искомых матриц будут 4×4 матрицы, записанные как блочные 2×2 матрицы с 2×2 блоками

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}^1_{st} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad & \boldsymbol{\gamma}^2_{st} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\gamma}^3_{st} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad & \boldsymbol{\gamma}^4_{st} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10.22}$$

Эти матрицы называются матрицами Дирака.

Матрицы 2×2, обозначенные как $\sigma_a,\ a = 1,2,3$, называют матрицами Паули.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.23}$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 2\mathbf{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma \qquad \text{и} \tag{10.24}$$

$$\frac{1}{2}\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\} = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta\sigma_\alpha) = \mathsf{g}_{\alpha\beta}I = \delta_{\alpha\beta}I. \tag{10.25}$$

Индексы α, β и γ пробегают значения $1, 2, 3$. Символ $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ меняет знак при перестановке двух соседних индексов и $\epsilon_{123} = 1$. Первое из этих соотношений означает, что матрицы $\mathbf{i}\sigma_a/2$ реализуют представление алгебры Ли группы трёхмерных вращений $SO(3)$, а второе гарантирует сохранение такими преобразованиями метрики $\mathsf{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Это условие характеризует *именно эту* группу, гарантирует сохранение *евклидовой* локальной метрики пространства. Для того, чтобы подчеркнуть это, мы и выбрали для номеров матриц Паули греческие буквы, как делали это обычно раньше для индексов в трёхмерном пространстве. По сути дела, симметризованное произведение матриц Паули и является реализацией этой трёхмерной пространственной метрики в пространстве состояний.

Вместе с единичной матрицей I, матрицы Паули образуют полный базис в пространстве матриц 2×2.

Соотношению (10.20) удовлетворяют не только матрицы вида (10.22), но и любые другие, связанные с данными унитарным преобразованием подобия. Записанный выше вид используется чаще всего. Для нас он полезен тем, что позволяет сразу видеть связь получающегося представления собственной группы Лоренца $SO(3, 1)$ со спинорным представлением группы $SO(3)$. Эту связь мы обсудим чуть ниже. Также как и для матриц Паули, симметризованное произведение матриц Дирака является реализацией псевдоевклидовой пространственно-временной метрики векторами пространства состояний. Но уже полной, четырёхмерной метрики. В нашем случае, когда метрический тензор является евклидовым по виду, а псевдоевклидовость изображается мнимой координатой x^4, мы будем использовать вместо матриц $\boldsymbol{\gamma}^i_{st}$ матрицы $\boldsymbol{\gamma}^\alpha = \mathbf{i}\boldsymbol{\gamma}^\alpha_{st}$ и $\boldsymbol{\gamma}^4 = \boldsymbol{\gamma}^4_{st}$.

Шестнадцать матриц — единичная $I = \delta^a_b$, четыре матрицы Дирака $\boldsymbol{\gamma}^i$, матрица $\boldsymbol{\gamma}^5 = -\mathbf{i}\boldsymbol{\gamma}^4\boldsymbol{\gamma}^1\boldsymbol{\gamma}^2\boldsymbol{\gamma}^3$, четыре матрицы $\boldsymbol{D}^i = \mathbf{i}\boldsymbol{\gamma}^i\boldsymbol{\gamma}^5$ и шесть матриц $\boldsymbol{\sigma}^{ik} = \frac{1}{2\mathbf{i}}(\boldsymbol{\gamma}^i\boldsymbol{\gamma}^k - \boldsymbol{\gamma}^k\boldsymbol{\gamma}^i) \quad (i < k)$ являются линейно независимыми, и могут быть использованы в качестве базиса в пространстве 4×4 комплексных матриц. Они образуют *действительную* алгебру в $M(4, C)$. Использование обозначения $\boldsymbol{\sigma}^{ik}$ не должно приводить к путанице с матрицами Паули, т.к. в этом случае индексов *всегда* два. А оправдано оно тем, что эти матрицы в четырёхмерном случае играют роль, похожую на роль матриц Паули в двумерном комплексном пространстве. Преобразование от базиса, основанного на стандартных матрицах Дирака к базису, основанному на используемых здесь матрицах является унимодулярным. Как легко видеть, весь базис можно сформировать, используя именно четыре матрицы $\boldsymbol{\gamma}^i$. Поэтому их называют *образующими* соответствующей алгебры.

Далее нам также понадобится ещё один матричный базис, отличающийся от данного переопределением образующих матриц алгебры, $\boldsymbol{\gamma}^i$, а также и $\boldsymbol{\gamma}^5$. Соответственно, изменяются и производные от них матрицы $\boldsymbol{D}^i$ и $\boldsymbol{\sigma}^{ik}$. Базис этот называют *киральным*. В киральном базисе

$$\boldsymbol{\gamma}^\alpha_c = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i}\sigma_\alpha \\ \mathbf{i}\sigma_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \tag{10.26}$$

т.е. отличаются от введённых выше матриц $\boldsymbol{\gamma}^\alpha$ знаком, а матрицы $\boldsymbol{\gamma}^4$ и $\boldsymbol{\gamma}^5$ фактически меняются местами:

$$\boldsymbol{\gamma}^4_c = -\mathbf{i}\boldsymbol{\gamma}^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{10.27}$$

$$\boldsymbol{\gamma}^5_c = \boldsymbol{\gamma}^1_{\mathrm{c}}\boldsymbol{\gamma}^2_{\mathrm{c}}\boldsymbol{\gamma}^3_{\mathrm{c}}\boldsymbol{\gamma}^4_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{\gamma}^4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{10.28}$$

Поскольку ток вероятности по определению должен преобразовываться при преобразованиях Лоренца $L^{i'}_i$ в пространстве-времени как контравариантный вектор, то нам важно найти соответствующее каждому конкретному преобразованию Лоренца преобразование векторов состояния, которое также будет преобразованием подобия для $\boldsymbol{\gamma}$-матриц Дирака в пространстве состояний. Одинаковым для всех матриц, но *действующим на каждую $\boldsymbol{\gamma}$-матрицу по-отдельности.* Так что результат его действия на все четыре матрицы вместе будет выглядеть как поворот четырёх вектора. Очевидно, всей группе Лоренца в пространстве состояний будет соответствовать тоже группа преобразований, некоторое представление группы Лоренца (может быть не единственное). Т.е. нам нужно найти матрицы $U_{(i'i)}$, такие, что

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{J}}^{i'} &= \overline{\boldsymbol{\Psi}'}(x)\boldsymbol{\gamma}^{i'}\boldsymbol{\Psi}'(x)\\ &= \overline{\boldsymbol{\Psi}}(x)U^{-1}_{(i'i)}\boldsymbol{\gamma}^{i'}U_{(i'i)}\boldsymbol{\Psi}(x)\\ &= \overline{\boldsymbol{\Psi}}(x)L^{i'}_i\boldsymbol{\gamma}^{i}\boldsymbol{\Psi}(x)\\ &= L^{i'}_i\boldsymbol{\mathcal{J}}^{i}.\end{aligned} \tag{10.29}$$

Явный вид матриц $U_{(i'i)}$ мы получим в следующей главе, при подробном обсуждении представлений группы Лоренца.

Вернёмся теперь к главной теме этого параграфа, к обсуждению вида плотности действия, порождаемой *возможным* существованием в заданной области реальных частиц. Мы теперь имеем в руках всё, чтобы написать ещё одну формулу для вероятного действия реальной частицы в рассматриваемой области пространства-времени, какой бы не была её траектория в этой области:

$$s = \int \overline{\boldsymbol{\Psi}}(x)\boldsymbol{\gamma}^i\nabla_i\boldsymbol{\Psi}(x)d^4x. \tag{10.30}$$

Здесь по всем внутренним для пространства состояний индексам производится свёртка. Полная плотность Лагранжа данной области пространства-времени является суммой плотности поля связности расслоенного пространства (10.15) и плотности (10.30) для *всех* частиц, которые могут иметься в данной области:

$$s = \int (\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i \nabla_i \boldsymbol{\Psi} + \frac{1}{4}\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathfrak{g}) d^4x. \tag{10.31}$$

Чтобы иметь возможность применить к данной области принцип стационарности её действия, из её полной плотности должны быть вычтены плотности вида (10.16) *для каждой из реальных частиц*, могущих появиться в области:

$$s = \int (\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i \nabla_i \boldsymbol{\Psi} - m_0 \overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\Psi} + \frac{1}{4}\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathfrak{g}) d^4x. \tag{10.32}$$

Параметр m_0 следует здесь рассматривать как обобщённый символ, принимающий значение массы покоя для каждой конкретной реальной частицы тогда, когда в $\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\Psi}$ входит соответствующий этой частице вектор состояния. Эта формула для действия всегда даёт *нулевые* значения.

Варьируя полный лагранжиан мы можем получить теперь как уравнения в расслоенном пространстве для векторов состояния, описывающих те или иные реальные частицы, так и уравнения связывающие эти векторы состояния и связность в расслоенном пространстве. Сделать это очень просто, т.к. все три подлежащие варьированию совокупности — векторы начальных состояний $\boldsymbol{\Psi}$, векторы конечных состояний $\overline{\boldsymbol{\Psi}}$ и связность $\boldsymbol{\mathcal{A}}_i$ (входящая в ковариантную производную) — совершенно независимы с этой точки зрения и мы получаем следующие три уравнения.

Стационарность действия при вариации $\overline{\boldsymbol{\Psi}}$ требует, чтобы для произвольного значения $\delta\overline{\boldsymbol{\Psi}}$, исчезающего на границе области, выполнялось соотношение

$$\delta s = \int \delta\overline{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{\gamma}^i \nabla_i \boldsymbol{\Psi} - m_0 \boldsymbol{\Psi}) d^4x = 0. \tag{10.33}$$

Отсюда необходимо следует уравнение

$$\boldsymbol{\gamma}^i \nabla_i \boldsymbol{\Psi} - m_0 \boldsymbol{\Psi} = 0. \tag{10.34}$$

Это же требование при вариации $\boldsymbol{\Psi}$ ведёт к соотношениям

$$\begin{aligned}\delta s = & \int(\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i\nabla_i\delta\boldsymbol{\Psi} - m_0\overline{\boldsymbol{\Psi}}\delta\boldsymbol{\Psi})d^4x = \\ & \int(\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i\partial_i\delta\boldsymbol{\Psi} + \overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i\boldsymbol{\mathcal{A}}_i\delta\boldsymbol{\Psi} - m_0\overline{\boldsymbol{\Psi}}\delta\boldsymbol{\Psi})d^4x = 0.\end{aligned} \tag{10.35}$$

Примем во внимание, что $\partial_i(\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i\delta\boldsymbol{\Psi}) = \partial_i\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i\delta\boldsymbol{\Psi} + \overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i\partial_i\delta\boldsymbol{\Psi}$. Интеграл по объёму области от дивергенции, стоящей в левой части этого соотношения равен интегралу по границе этой области от $\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i\delta\boldsymbol{\Psi}$ и обращается в нуль по условиям на вариации $\delta\boldsymbol{\Psi}$. Соответственно,

$$\int(\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i\partial_i\delta\boldsymbol{\Psi})d^4x = -\int(\partial_i\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i\delta\boldsymbol{\Psi})d^4x. \tag{10.36}$$

Тогда соотношение (10.35) можно переписать в виде

$$\delta s = \int(-\partial_i\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i + \overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i\boldsymbol{\mathcal{A}}_i - m_0\overline{\boldsymbol{\Psi}})\delta\boldsymbol{\Psi}d^4x = 0. \tag{10.37}$$

Это соотношение выполняется, если справедливо уравнение

$$\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i\overline{\nabla}_i + m_0\overline{\boldsymbol{\Psi}} = 0. \tag{10.38}$$

Здесь мы ввели обозначение $\overline{\nabla}_i = \partial_i - \boldsymbol{\mathcal{A}}_i$ для ковариантной производной в расслоенном пространстве со связностью, сопряжённой *по знаку*. Кроме того, при взятии производной $\boldsymbol{\mathcal{A}}_i$ умножается на $\overline{\boldsymbol{\Psi}}$ *справа*.

Наконец, при вариации $\boldsymbol{\mathcal{A}}_j$ устанавливается связь между дивергенцией тензора кривизны и средним значением тока вероятности реальной частицы (мы опускаем выкладки, приведённые в § 10.4):

$$\nabla_k\boldsymbol{\mathcal{F}}^{ki} = \boldsymbol{\mathcal{J}}^i = \overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\gamma}^i\boldsymbol{\Psi}. \tag{10.39}$$

По сути дела, последнее соотношение является просто определением среднего значения тока реальной частицы, так же как это имело место в классическом приближении. [2]

[2] Оно является также и определением среднего значения по всем возможным траекториям касательного к траектории вектора, отнесённого к *метрическому* параметру.

Важно отметить, что, хотя при формировании лагранжианов (10.31,10.32) все внутренние для векторов состояния индексы должны быть свёрнуты, в уравнениях (10.34,10.38,10.39) это уже не так, поскольку эти уравнения должны выполняться при вариации *каждой* компоненты $\boldsymbol{\Psi}$, $\overline{\boldsymbol{\Psi}}$ или $\boldsymbol{\mathcal{A}}_j$ по-отдельности, независимо друг от друга. При этом, конечно, уравнения остаются справедливыми и при свёрнутых внутренних индексах.

10.6 Обсуждение

В этой главе мы увидели, как в нашем описании естественным образом появляются расслоенные пространства и калибровочные поля — та подоснова, на которой выросло здание современной квантовой теории.

Описание мира с помощью расслоенного пространства намного упрощает учёт того, что информация, имеющаяся у нас о реальном мире, принципиально ограничена. Всё многообразие возможных ситуаций вне выделенного для исследования объекта проинтегрировано и локализовано в окрестности этого объекта. Все возможности сосредоточены в слоях пространства состояний, их можно классифицировать и вычислять вероятности их реализации. Мы не собираемся пока заниматься вычислениями вероятностей тех или иных процессов, и поэтому не уделяли должного внимания этой стороне описания.

К настоящему моменту мы уже имеем в руках практически все необходимые инструменты для описания мира в неклассических (квантовых) терминах. И эти инструменты не отрицают классические, а естественным образом выросли из них как расширение и уточнение их свойств в более общей ситуации. Полная конструкция для описания мира теперь представляет собой новый математический образ — расслоенное пространство. Базой этого пространства, его основой остаётся собственно пространство-время. В базе, в пространстве-времени, существуют разнообразные геометрические объекты, *являющиеся результатами измерений* одних физических объектов другими физиче-